

ТРУДЫ

**Белорусского
государственного
технологического
университета**

*Издается с июля 1993 года
Выходит один раз в год*

Серия VI

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
НАУКИ И ИНФОРМАТИКА**

ВЫПУСК XVII

Учредитель – учреждение образования
«Белорусский государственный
технологический университет»

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом университета.

Главный редактор научного журнала «Труды БГТУ»
ректор, профессор И. М. Жарский

Редакционная коллегия:

В. М. Марченко, зав. кафедрой, доктор физ.-мат. наук, профессор (главный редактор серии);
И. И. Наркевич, зав. кафедрой, доктор физ.-мат. наук, профессор (зам. главного редактора);
В. С. Вихренко, зав. кафедрой, доктор физ.-мат. наук, профессор;
П. П. Урбанович, доктор техн. наук, профессор;
В. Л. Колесников, доктор техн. наук, профессор;
М. А. Журавков, зав. кафедрой БГУ, доктор физ.-мат. наук, профессор;
А. И. Калинин, зав. кафедрой БГУ, доктор физ.-мат. наук, профессор;
Н. Т. Квасов, зав. кафедрой БГУИР, доктор физ.-мат. наук, профессор;
В. И. Кувшинов, генеральный директор Объединенного института энергетических и ядерных исследований НАН Беларуси, доктор физ.-мат. наук, профессор;
Л. И. Минченко, зав. кафедрой БГУИР, доктор физ.-мат. наук, профессор;
Я. В. Радыно, зав. кафедрой БГУ, доктор физ.-мат. наук, профессор, член-кор. НАН Беларуси;
Н. П. Можей, доцент, канд. физ.-мат. наук (секретарь)

Работы, рассмотренные и принятые к опубликованию редакционной коллегией семнадцатого выпуска серии «Физико-математические науки и информатика», проклассифицированы по следующим направлениям: математика (ответственный проф. В. М. Марченко); механика (ответственный проф. В. С. Вихренко); физика (ответственный проф. И. И. Наркевич); общетехнические науки и информатика (ответственные проф. В. Л. Колесников и проф. П. П. Урбанович).

Раздел «Математика» представлен исследованиями по теории стационарных гибридных управляемых систем, методам решения систем дифференциальных уравнений, а также изучению действий групп на многообразиях.

Раздел «Механика» посвящен исследованию методами статистической механики равновесных и транспортных характеристик молекулярных и решеточных систем, в том числе диффузии в решеточном газе при случайном экспоненциальном распределении барьеров, термодиффузии в двухкомпонентных решеточных флюидах, кинетики фазовых переходов в решеточных системах, нелинейного упругого деформирования эластомеров, модели локального расплетания спирали ДНК, использованию интегральных уравнений для частичных функций распределения при описании однокомпонентной плазмы.

Раздел «Физика» включает результаты гидродинамического рассмотрения процесса расширения кварк-глюонной плазмы, учета корреляционного вклада в решеточную теплоемкость кристалла с вакансиями, применения кинетической теории ползучести для предсказания землетрясений, изучения влияния компрессионных плазменных потоков на состав и электрохимическое поведение Mo-покрытий на Ni-основе, формирования покрытий с повышенной износостойкостью на поверхности резины, исследования особенностей поляризации излучения жидкостных лазеров, разработки методики определения подвижности носителей заряда в высокоомном кремнии и кинетического анализа переноса энергии в хлорофилле.

Раздел «Общетехнические науки и информатика» содержит результаты научных исследований по проблемам оптимального оперативного управления процессами химической технологии, моделирования дискретных систем и стационарных случайных процессов, программной криптографической компьютерной защиты информационных потоков и повышения помехоустойчивости каналов связи, теории и практики создания интерактивных компьютерных средств обучения.

Выпуск будет полезен научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов, интересующимся фундаментальными и прикладными исследованиями в области математики, механики, физики, автоматизации и информатики.

Статьи поступили в редакцию 19.03.2009.

УДК 517.977

В. М. Марченко, профессор

ГИБРИДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

The paper considers a special kind of hybrid difference-differential dynamic systems, i. e. differential-algebraic systems with delays (DAD systems), with some variables being continuous the other – piecewise continuous. It is shown that several classes of dynamic systems such as neutral type time-delay systems as well as hybrid discrete-continuous ones can be reduced to DAD systems. The modern state of the qualitative control and observation DAD system theory is also discussed.

Введение. При построении математических моделей реальных физических процессов наряду с динамическими (дифференциальными) встречаются и алгебраические (функциональные) зависимости. Такие процессы описываются дифференциально-алгебраическими (DAE) системами (отдельные уравнения которых являются дифференциальными, другие – алгебраическими). Эти системы появились в русскоязычной литературе под названием «гибридные системы». В настоящее время, особенно в англоязычной литературе, этот термин в основном используется для дискретно-непрерывных систем и систем, содержащих логические переменные. В связи с этим представляет интерес точка зрения на гибридность как на неоднородность в природе (дискретные, непрерывные, кусочно-непрерывные, детерминированные, стохастические, логические переменные и т. д.) изучаемого процесса или в его описании (дифференциальные, дискретные, разностные уравнения и т. д.).

В данной работе обсуждается современное состояние и перспектива дальнейших исследований качественной теории управления и наблюдения в гибридных дифференциально-разностных (ГДР) системах, к которым, в частности, сводятся стандартные типы систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа, а также непрерывно-дискретных систем. Историю вопроса можно проследить по работам [1–18] и приведенной в них библиографии.

1. Мотивация: примеры ГДР-систем. Рассмотрим уравнение с запаздывающим аргументом нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = ax(t) + a_1x(t-h) + d\dot{x}(t-h), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$x(\tau) = \varphi(\tau), \quad \tau \in [-h, 0], \quad (2)$$

более общее уравнение

$$\frac{d}{dx}(x(t) - dx(t-h)) = ax(t) + a_1x(t-h), \quad (3)$$

а также гибридную дискретно-непрерывную систему

$$\dot{x}(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y[k], \quad t \in [kh, (k+1)h), \quad (4)$$

$$y[k] = a_{21}x(kh) + a_{22}y[k-1], \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

$$x(0) = x, \quad y[-1] = y. \quad (6)$$

Здесь $a, a_1, d, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, h, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, $h > 0$; символ $y[k]$ означает функцию целочисленной переменной k , а функция φ берется из класса C^1 дифференцируемых функций.

Объекты (1)–(6) обычно рассматриваются отдельно. Ниже предлагается единый подход к исследованию указанных объектов путем сведения их к ГДР-системам.

Вводя обозначения

$$x_1(t) = x(t) - dx(t-h), \quad x_2(t) = x(t)$$

и определяя числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ соотношениями $a_{22} = d, a_{11} + a_{12} = a, a_{11}a_{22} = -a_1$, уравнение (1) сведем к ГДР-системе вида

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \quad (7)$$

$$x_2(t) = a_{21}x_2(t) + a_{22}x_2(t-h), \quad t \geq 0, \quad (8)$$

$$x_1(0) = \varphi(0) - d\varphi(-h), \quad x_2(\tau) = \varphi(\tau), \quad \tau \in [-h, 0].$$

Аналогично поступая с уравнением (3), придем к ГДР-системе (7), (8) с более общими начальными условиями.

Рассмотрим теперь систему (4), (5). Введем обозначения

$$x(t) = x_1(t), x_2(t) = \begin{bmatrix} x(kh) \\ y[k] \end{bmatrix},$$

$$t \in [kh, (k+1)h), k = 0, 1, \dots$$

Тогда система (4), (5) сводится к ГДР-системе

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t),$$

$$x_2(t) = A_{22}x_2(t-h), \quad t \geq 0,$$

* Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом.

где

$$A_{11} = a_{11}, A_{12} = [0 \ a_{12}],$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} e^{a_{11}h} & a_{12} \int_0^h e^{a_{11}(h-\tau)} d\tau \\ a_{21}e^{a_{11}h} & a_{22} + a_{21}a_{12} \int_0^h e^{a_{11}(h-\tau)} d\tau \end{bmatrix}$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_0,$$

$$x_2(\tau) = \begin{bmatrix} e^{-a_{11}h}(x_0 - a_{12}y_0 \int_0^h e^{a_{11}(h-\tau)} d\tau) \\ y_0 \end{bmatrix}, \tau \in [-h, 0].$$

Представляется, что разобранные примеры дают достаточную мотивацию для дальнейшего рассмотрения и изучения ГДР-систем.

2. Некоторые математические модели гибридных систем. В качестве общей модели линейной гибридной системы управления и наблюдения с последствием можно взять следующую систему функционально-дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1(t) = \int_{-h}^0 d_s A_{11}(t, s) x_1(t+s) + \int_{-h}^0 d_s A_{12}(t, s) x_2(t+s) + \int_{-h}^0 d_s B_1(t, s) u(t+s), \quad (9)$$

$$x_2(t) = \int_{-h}^0 d_s A_{21}(t, s) x_1(t+s) + \int_{-h}^0 d_s A_{22}(t, s) x_2(t+s) + \int_{-h}^0 d_s B_2(t, s) u(t+s), \quad (10)$$

с выходом

$$y(t) = \int_{-h}^0 d_s C_1(t, s) x_1(t+s) + \int_{-h}^0 d_s C_2(t, s) x_2(t+s).$$

В литературе не существует сколь-нибудь полной качественной теории управления и наблюдения для систем вида (9), (10).

Если меры Стильтеса в (9), (10) являются дискретными, сосредоточенными в точках

$$-h_j, j = 0, 1, \dots, l; \quad 0 = h_0 < h_1 < \dots < h_l = h,$$

и мера $d_s G(t, s)$ исчезает в нуле, получаем ГДР-систему с сосредоточенными запаздываниями

$$\dot{x}_1(t) = \sum_{j=0}^l (A_{11j}(t) x_1(t-h_j) + A_{12j}(t) \times x_2(t-h_j) + B_{1j}(t) u(t-h_j)),$$

$$x_2(t) = \sum_{j=0}^l (A_{21j}(t) x_1(t-h_j) + A_{22j}(t) \times x_2(t-h_j) + B_{2j}(t) u(t-h_j)), \quad t \geq t_0.$$

К настоящему моменту наиболее изученной является простейшая ГДР-система (в нормальной форме)

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}(t) x_1(t) + A_{12}(t) x_2(t) + B_1(t) u(t), \quad (11)$$

$$x_2(t) = A_{21}(t) x_1(t) + A_{22}(t) x_2(t-h) + B_2(t) u(t), \quad (12)$$

$$t \geq t_0$$

с начальными условиями

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(\tau) = \varphi(\tau), \quad \tau \in [t_0 - h, t_0], \quad (13)$$

где

$$A_{11}(t) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \quad A_{12}(t) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}, \quad A_{21}(t) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1},$$

$$A_{22}(t) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, \quad B_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1 \times r}, \quad B_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2 \times r},$$

$x_{10} \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\varphi(\cdot)$ – кусочно-непрерывная n_2 -вектор-функция.

Принимая во внимание 2-D-системный подход, простейшую ГДР-систему можно рассмотреть в симметрической форме, заменив $x_2(t)$ в левой части (12) на $x_2(t+h)$.

Замечание. ГДР-систему (11), (12) можно интерпретировать как обыкновенную динамическую систему, управляемую разностным (или дискретным, ср. с (4), (5)) регулятором. Такие системы возникают также при исследовании квантованных систем.

3. Представление решений ГДР-систем.

Под решением $x_i(t) = x_i(t, t_0, x_{10}, \varphi, u)$, $t \geq 0$, $i = 1, 2$, системы (11)–(13) понимаются абсолютно непрерывная $x_1(\cdot)$ и кусочно-непрерывная $x_2(\cdot)$ вектор-функции, которые удовлетворяют начальным условиям (13) и уравнению (12) для $t \geq 0$, а также почти всюду при $t \geq 0$ формуле (11). Если при этом выражение (11) удовлетворяется для всех $t \geq 0$, то соответствующее решение считается строгим. Имеет место утверждение [7, 14, 15].

Утверждение 1. Решение $x_i(t) = x_i(t, t_0, x_{10}, \varphi, u)$, $t \geq 0$, $i = 1, 2$, системы (11)–(13) существует единственно и может быть вычислено по следующей формуле (обобщенная формула Коши):

$$x_i(t) = x_i(t, t_0, x_{10}, \varphi, u) =$$

$$= X_{i1}^*(t, t_0 - 0) x_{10} + \int_{t_0 - h}^{t_0} X_{i2}^*(t, \tau + h) \times$$

$$\times A_{22}(\tau + h) \varphi(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^t (X_{i1}^*(t, \tau) B_1(\tau) + X_{i2}^*(t, \tau) B_2(\tau)) u(\tau) d\tau +$$

$$+ Z_i^*(t, t - T_i h) A_{22}(t - T_i h) \varphi(t - T_i h - h),$$

$$t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

где $X_{ij}^*(\cdot, \cdot)$, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$ – решение сопряженной системы

$$\frac{\partial X_{i1}^*(t, \tau)}{\partial \tau} + X_{i1}^*(t, \tau) A_{11}(\tau) + X_{i2}^*(t, \tau) A_{21}(\tau) = 0,$$

$$\tau \leq t, \quad \tau \neq t - kh;$$

$$X_{i2}^*(t, \tau) = X_{i1}^*(t, \tau)A_{12}(\tau) + X_{i2}^*(t, \tau + h)A_{22}(\tau + h),$$

$$\tau \leq t;$$

$$X_{i2}^*(t, \tau) = 0, \tau > t;$$

$$X_{i1}^*(t, t - kh - 0) - X_{i1}^*(t, t - kh + 0) =$$

$$= Z_i^*(t, t - kh)A_{21}(t - kh);$$

$$Z_i^*(t, t - kh) = Z_i^*(t, t - kh + h)A_{22}(t - kh + h),$$

$$k = 1, 2, \dots, T_i,$$

с граничными условиями вида

$$X_{11}^*(t, t - 0) = I_{n_1}, \quad Z_1^*(t, t) = 0 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2},$$

$$X_{21}^*(t, t - 0) = A_{21}(t), \quad Z_2^*(t, t) = I_{n_2}.$$

Замечание 1. Формула Коши допускает обобщение на случай многих соизмеримых запаздываний [14], а также для импульсных систем вида (11)–(13), когда у функции $x_1(t)$ допускаются скачки [18] при $t \geq 0$.

В стационарном случае: коэффициенты системы (11), (12) – постоянные матрицы,

$$A_{ij}(t) = A_{ij}, \quad B_i(t) = B_i, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, \quad t_0 = 0; \quad (15)$$

формула (14) упрощается, так как можно положить, что

$$X_{ij}^*(t, \tau) = X_{ij}^*(t - \tau), \quad Z_i^*(t, t - kh) = Z_i^*(kh),$$

$i = 1, 2; \quad j = 1, 2$. Более того, в этом случае решения системы (11), (12), (15) раскладываются в ряды по решениям ее определяющих уравнений [14, 15].

Утверждение 2. Решение $x_v(t)$, $v = 1, 2$, (11)–(13), (15) существует единственно и может быть вычислено по формуле

$$x_v(t) = x_v(t, 0, x_{10}, \varphi, u) = x_v(t, x_{10}, \varphi, 0) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i \\ (t-ih>0)}} X_{k+1}^v(ih) \int_0^{t-ih} \frac{(t-\tau-ih)^k}{k!} u(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{\substack{i \\ (t-ih \geq 0)}} X_0^v(ih) u(t-ih), \quad (16)$$

где $x_v(t, x_{10}, \varphi, 0)$, $v = 1, 2$ – решение системы (11)–(13), (15), представленное формулой (14) в случае нулевого управляющего воздействия: $u(t) \equiv 0, t > 0$; матричные функции $X_k^v(t)$, $v = 1, 2$, являются решением определяющих уравнений вида

$$X_{k+1}^1(t) = A_{11}X_k^1(t) + A_{12}X_k^2(t) + B_1U_k(t), \quad (17)$$

$$X_k^2(t) = A_{21}X_k^1(t) + A_{22}X_k^2(t-h) + B_2U_k(t),$$

$$k = -1, 0, 1, \dots; \quad t \geq 0;$$

с начальными условиями

$$X_k(t) = 0, \quad Y_k(t) = 0,$$

если

$$k < 0, \text{ или } t < 0; \quad (18)$$

$$U_0(0) = I_r, \quad U_k(t) = 0,$$

если

$$k^2 + t^2 \neq 0. \quad (19)$$

Замечание 2. Нетрудно видеть, что

$$X_k(t) = 0, \quad Y_k(t) = 0$$

для $t \neq jh, j = 0, 1, \dots; \quad k = 0, 1, \dots$

Кроме того, $X_0(t) \equiv 0, t \geq 0$.

При исследовании свойств ГДР-систем, а также различных вопросов качественной теории управления и наблюдения для таких систем важное значение имеют алгебраические свойства решений их определяющих уравнений. Приведем некоторые из них.

Лемма 1. Имеют место следующие тождества:

$$\left(A_{11} + A_{12}(I_m - A_{22}\omega)^{-1}A_{21} \right)^k (B_1 +$$

$$+ A_{12}(I_m - A_{22}\omega)^{-1}B_2) \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} X_{k+1}(jh)\omega^j;$$

$$(I_m - A_{22}\omega)^{-1}A_{21} \left(A_{11} + A_{12}(I_m - A_{22}\omega)^{-1}A_{21} \right)^k \times$$

$$\times (B_1 + A_{12}(I_m - A_{22}\omega)^{-1}B_2) \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} X_{k+1}^2(jh)\omega^j,$$

$$k = 0, 1, \dots;$$

$$(I_m - A_{22}\omega)^{-1}B_2 \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} X_0^2(jh)\omega^j,$$

откуда $|\omega| \leq \omega_1$, где ω_1 – достаточно малое положительное число.

Лемма 2 (Обобщенная теорема Гамильтона – Кэли) [14]. Найдутся действительные числа r_{ij}, \dots , такие, что решения определяющего уравнения (17) удовлетворяют соотношениям

$$X_\gamma^v(kh) = - \sum_{j=1}^{\min\{k, nm\}} r_{0j} X_\gamma^v((k-j)h) -$$

$$- \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{\min\{k, nm\}} r_{ij} X_{\gamma-i}^v((k-j)h), \quad v = 1, 2,$$

$$\gamma = n + 1, n + 2, \dots$$

Замечание 3. Можно показать, что решения стационарных ГДР-систем вида (11)–(13), (15) имеют рост не выше, чем экспоненциальный, при аналогичном росте управляющих воздействий, что позволяет применять к таким системам преобразование Лапласа.

Дальнейшие результаты по представлению решений более общих ГДР-систем можно найти в работах [14, 15, 18].

4. Элементы качественной теории управления в ГДР-системах. К качественной теории управления относятся такие важные проблемы математической теории управления, как управляемость, наблюдаемость, двойственность,

стабилизация, модальное управление, реконструкция, реализация переходных отображений, построение канонических представлений ГДР-систем и др.

Определение 1. Система (11), (12) называется относительно $(H - t_1)$ -управляемой при $t_1 > t_0$,

если для любых векторов $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$

и любых допустимых начальных данных x_{10} , $\varphi(\cdot)$ существует кусочно-непрерывное управление $u(\cdot)$ такое, что соответствующее решение системы обладает свойством

$$H \begin{bmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Если в этом определении $H = [I_{n_1} \ 0]$, то система считается относительно t_1 -управляемой по x_1 ; аналогично относительно t_1 -управляемой по x_2 , если $H = [0 \ I_{n_2}]$.

Определение 2. Система (11), (12) называется полностью $(H - t_1)$ -управляемой при $t_1 > t_0 + h$, если требование (20) заменить следующим условием:

$$H \begin{bmatrix} x(t_1 + t) \\ y(t_1 + t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Для того чтобы стационарная система (11), (12), (15) была относительно t_1 -управляемой по x_1 , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\text{rank} \left[X_k^1(t), k=1, 2, \dots, n_1; t \in [0, t_1] \right] = n_1.$$

Аналогично рассматриваются [14, 15] другие типы относительной управляемости.

Теорема 2. Для того чтобы стационарная система (11), (12), (15) была полностью $(H - t_1)$ -управляемой при $H = I_{n_1+n_2}$, необходимо, чтобы

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ -A_{21} & 1 - A_{22}e^{-\lambda h} & B_2 \end{bmatrix} = n_1 + n_2, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где \mathbb{C} – множество комплексных чисел.

Обобщением сформулированных задач управляемости являются задачи $\mathbb{R}^n - (s, t)$ - и (s, t) -управляемости, которые можно рассматривать как игровые задачи преследования однотипных объектов, когда начала движения преследующего и преследуемого объектов не совпадают: при заданных s, t ($s \geq t \geq 0$) система (11), (12), (15) считается $(s, t) - t_+$ -управляемой по x_j , если для любых начальных данных $x_{10}, x_{10}, \varphi, \varphi$ системы (11), (12) и любого допустимого управления $v(\cdot)$ существует допустимое управление $u(\cdot)$ такое, что

$x_i(t_+ + \tau, t_+ - s, x_{10}, \varphi, u) = x_i(t_+ + \tau, t_+ - t, \tilde{x}_{10}, \tilde{\varphi}, v)$ для $\tau \geq 0$; если же последнее соотношение выполняется только при $\tau = 0$, то приходим к задаче $\mathbb{R}^n - (s, t) - t_+$ -управляемости (см. рисунок).

Для сформулированных игровых задач управляемости можно построить и сформулировать двойственные задачи линейной наблюдаемости. Некоторые результаты в этом направлении имеются в [9].

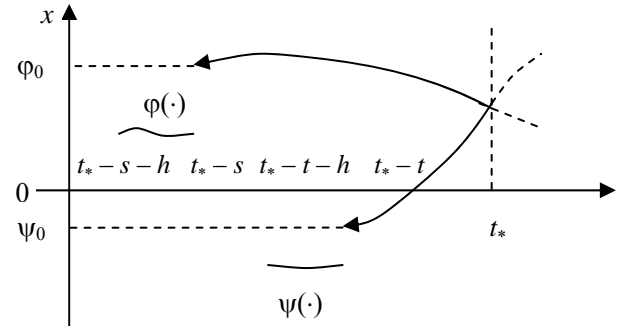


Рисунок. $\mathbb{R}^n - (s, t)$ -управляемость

Классической в теории регулирования и теории динамических систем является проблема их устойчивости. Рассмотрим, например, невозмущенную ГДР-систему (11), (12), (15):

$$u(t) = 0 \quad \text{при } t \geq 0. \quad (21)$$

Определение ее асимптотической и экспоненциальной устойчивости аналогично соответствующим понятиям для систем запаздывающего типа.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) система (11), (12), (15), (21) экспоненциально устойчива;
- 2) система (11), (12), (15), (21) асимптотически устойчива;
- 3) система (11), (12), (15), (21) асимптотически устойчива по x_2 ;
- 4) спектральный радиус матрицы A_{22} строго меньше 1 и все корни характеристического уравнения

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & 1 - A_{22}e^{-\lambda h} \end{bmatrix} = \Delta(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (22)$$

имеют отрицательные действительные части.

В скалярном случае коэффициентов системы условие отрицательности действительных частей корней уравнения (22) можно выразить непосредственно через коэффициенты.

Заключение. Предложен унифицированный подход к изучению таких важных в приложениях и различных по природе классов динамических систем, как систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа, а также дискретно-непрерывных систем. Подход основан на сведениях указанных систем к ГДР-системам.

дении указанных систем к ГДР-системам. Проанализировано современное состояние качественной теории управления и наблюдения (КТУН) в ГДР-системах. Более полное рассмотрение КТУН, а также некоторых нерешенных задач этой теории для ГДР-систем можно найти в работах [9, 11–15, 17, 18].

Литература

1. Кириллова, Ф. М. Необходимые условия оптимальности управлений в гибридных системах / Ф. М. Кириллова, С. В. Стрельцов // Управляемые системы: сб. тр. / Ин-т математики Сибир. отд. АН СССР. – 1975. – Вып. 14. – С. 24–33.
2. Ахундов, А. А. Управляемость линейных гибридных систем / А. А. Ахундов // Управляемые системы: сб. тр. / Ин-т математики Сибир. отд. АН СССР. – 1975. – Вып. 14. – С. 4–10.
3. Трофимчук, Т. С. Управляемость систем, неразрешенных относительно старшей производной / Т. С. Трофимчук // Управляемые системы: сб. тр. / Ин-т математики Сибир. отд. АН СССР. – 1980. – Вып. 20. – С. 75–82.
4. De la Sen, M. The reachability and observability of hybrid multirate sampling linear systems / M. De la Sen // Computers Math. Applic. – 1996. – Vol. 31, № 1. – P. 109–122.
5. Hybrid Systems / J. J. Gertler [et al.] // Prepr. 13th World Congr. IFAC. – 1996. – Vol. J. – P. 473–476.
6. Марченко, В. М. Вполне регулярные системы с последствием / В. М. Марченко // Труды Ин-та математики. – 2001. – Т. 7. – С. 97–104.
7. Марченко, В. М. Представление решений управляемых гибридных систем / В. М. Марченко, О. Н. Поддубная // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 6. – С. 17–25.
8. Observability of linear hybrid systems / R. Vidal [et al.] // Hybrid systems: Computation and Control. – 2003. – Vol. 2623. – P. 526–539.
9. Марченко, В. М. О двойственности в задачах управления и наблюдения для гибридных систем / В. М. Марченко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2003. – Вып. XI. – С. 3–7.
10. Hybrid Systems: Computation and Control: IEEE conf. «MMAR'2004». Vol. 1: Control Theory, Control Engineering, Modelling and Simulation / Eds. S. Domek, R. Kaszynski. – Blazejewko, Poland, 2004
11. Щеглова, А. А. Наблюдаемость вырожденных линейных гибридных систем с постоянными коэффициентами / А. А. Щеглова // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 11. – С. 86–101.
12. Marchenko, V. M. Hybrid control and observation systems in symmetric form / V. M. Marchenko, O. N. Poddubnaya, Z. Zaczkiwicz // IEEE conf. «RoMoCo». – Poznan, Poland, 2005. – P. 1371–43.
13. Marchenko, V. M. Observability for linear differential-algebraic systems with delay / V. M. Marchenko, Z. Zaczkiwicz // IEEE conf. «MMAR'2005». – Blazejewko, Poland, 2005. – P. 299–303.
14. Марченко В. М. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями / В. М. Марченко, О. Н. Поддубная // Докл. РАН. – 2005. – Т. 404, № 4. – С. 465–469.
15. Поддубная, О. Н. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием: дис. ... канд. физ.-мат. наук / О. Н. Поддубная. – Минск, 2005.
16. Куржанский, А. Б. Отчет о 16-м международном конгрессе ИФАК (IFAC) – международной федерации по автоматическому управлению / А. Б. Куржанский // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 1. – С. 183–189.
17. Марченко, В. М. Некоторые нерешенные задачи в теории управляемых динамических ГДР-систем / В. М. Марченко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2006. – Вып. XIV. – С. 3–6.
18. Zaczkiwicz, Z. Obserwowalność układów różniczkowo-algebraicznych z opóźnieniem / Z. Zaczkiwicz // Rozprawa doktorska. – Warszawa: Politechnika Warszawska, 2008.

ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ ТИПА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

The article considers the problem of the stabilization of second-order time-delay systems by action of regulators of various types. The special attention is paid to the stabilization of second-order systems by action of a feedback in the form of difference regulators. In the case the question of existence of a difference regulator is open a linear integral feedback is constructed by using the Wiener – Paley theorem concerning entire functions of exponential type. The article also proposes to apply difference regulators to the stabilization of second-order systems which are not solved over derivative.

Введение. Одной из основных проблем качественной теории управления динамическими системами является задача стабилизации таких систем. В результате воздействия на исходную систему регулятором, построенным по принципу обратной связи, необходимо обеспечить устойчивость полученной замкнутой системы.

В статье рассматривается возможность стабилизации двумерных динамических систем с запаздывающим аргументом с помощью регуляторов разностного типа, реализация которых существенно проще регуляторов интегрального типа. Представлены конструктивные алгоритмы построения регуляторов разностного типа, не требующие знания характеристических значений. В случае, когда вопрос о существовании разностного регулятора, стабилизирующего исходную систему, остается открытым, предлагается метод построения интегрального регулятора, основанный на теореме Винера – Пэли из теории целых функций конечной степени.

Представляет также определенный интерес задача стабилизации такого класса систем управления, как дескрипторные системы. Эти системы достаточно достоверно описывают в физически реальных переменных работу систем автоматического управления и технологические процессы. Теория дескрипторных систем является интенсивно развивающимся разделом качественной теории управления.

В работе рассматривается проблема стабилизации разностными регуляторами двумерных дескрипторных систем с запаздыванием.

Основная часть. Рассмотрим систему с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(\cdot) \in R, x(\cdot) \in R^n, b \in R^n, A_i \in R^{n \times n}, i = 0, 1,$$

где h – постоянное запаздывание. Присоединим к системе (1) регулятор типа обратной связи вида

$$u(t) = q'_0 x(t) + q'_1 x(t-h), \quad (2)$$

$$q_0, q_1 \in R^n,$$

не выводящий систему за пределы заданного класса.

Систему (1), (2) назовем стабилизируемой, если существует регулятор вида (2) такой, что

корни характеристического уравнения замкнутой системы имеют отрицательные действительные части.

Рассмотрим систему (1) при $n = 2$. Обратную связь (2) запишем в операторной форме:

$$u(t) = [\beta_1(e^{-ph}), \beta_2(e^{-ph})]x(t),$$

$$\beta_1(e^{-ph}) = \beta_{10} + \beta_{11}e^{-ph},$$

$$\beta_2(e^{-ph}) = \beta_{20} + \beta_{21}e^{-ph},$$

$$[\beta_{10}, \beta_{20}] = q'_0, [\beta_{11}, \beta_{21}] = q'_1,$$

$$\beta_{ij} \in R, i = 1, 2, j = 0, 1;$$

где e^{-ph} – оператор запаздывания ($e^{-ph}x(t) = x(t-h)$), $p = d/dt$.

Поскольку условие

$$\text{rank}[\lambda I - A_0 - e^{-\lambda h} A_1, b] = n,$$

$$\forall \lambda \in C, \text{Re } \lambda \geq 0$$

является необходимым для стабилизации системы (1), будем предполагать его выполненным.

Существуют две возможности:

$$1) \det[b, A_1 b] = 0,$$

$$2) \det[b, A_1 b] \neq 0.$$

В первом случае преобразование $x = Ty$, $T = [d, b]$ с произвольным вектором d таким, что $\det T \neq 0$, приводит систему к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} y(t) + \\ &+ \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & 0 \\ \alpha_{21}^1 & \alpha_{22}^1 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{11}^1, \alpha_{21}^1, \alpha_{22}^1$ – некоторые действительные числа.

Лемма. Пусть α, β – действительные числа. Тогда корни уравнения

$$\lambda + \alpha + \beta e^{-\lambda h} = 0$$

имеют только отрицательные действительные части в том и только в том случае, если точка (α, β) принадлежит области устойчивости Ω , граница которой описывается линиями [1]

$$\beta = -\alpha \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha + \beta \cos(hg) = 0, \\ g - \beta \sin(hg) = 0, \end{cases} \quad 0 < g < \frac{\pi}{h}.$$

Теорема 1. Если $\det[b, A_0b]=0$, $\det[b, A_1b]=0$, то система (1) стабилизируема регулятором (2) тогда и только тогда, когда точка $(-\alpha_{11}, -\alpha_{11}^1)$ из (3) принадлежит области Ω .

В случае $\det[b, A_1b]=0$, $\det[b, A_0b] \neq 0$ возможно приведение системы (1) к виду

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t).$$

Теорема 2. Если $\det[b, A_0b] \neq 0$, $\det[b, A_1b]=0$, то система (1) стабилизируема обратной связью (2) при любом запаздывании $h, h > 0$.

Рассмотрим второй случай, когда $\det[b, A_1b] \neq 0$. После ее преобразования и выбора соответствующего управления получим:

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t).$$

Теорема 3. Пусть $\det[b, A_1b] \neq 0$. Тогда система (1) стабилизируема регулятором (2), если точка $(\alpha_{11}, \alpha_{12})$ принадлежит области Ω_2 , которая ограничена линиями $\alpha_{12}=1$, $\alpha_{12}=-1$, $\alpha_{12}=\alpha_{11}h-1$.

В случае $(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \notin \Omega_2$ вопрос о стабилизируемости системы остается открытым. Но если $e^{-\alpha_{11}h} + \alpha_{12} \neq 0$ для $\alpha_{11} > 0$, то существует интегральный регулятор, решающий проблему стабилизации. В силу теоремы Винера – Пэли с учетом вида регулятора его коэффициенты в операторной форме достаточно искать в классе линейных комбинаций многочленов первой степени по отношению к e^{-ph} и целых функций, квадратично интегрируемых вдоль мнимой оси. Тогда, возвращаясь к оригиналам, получим искомый регулятор.

Стабилизирующий регулятор имеет следующий вид:

$$v(t) = \frac{-\alpha_{11}r_1 - \alpha_{11} - r_2}{\alpha_{12} + e^{-\alpha_{11}h}} y_1(t) - (r_1 + \alpha_{11})y_2(t) + \int_{-h}^0 q_2(-\mu)y_2(t+\mu)d\mu.$$

Далее рассмотрим построение стабилизирующих регуляторов в применении к такому важному классу систем управления, как дескрипторные системы с запаздывающим аргументом вида

$$S\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

$$u(\cdot) \in R, \quad x(\cdot) \in R^n, \quad S, A_i \in R^{n \times n}, \quad i = 0, 1,$$

при воздействии линейной обратной связи

$$u(t) = q_0'x(t) + q_1'x(t-h), \quad q_0, q_1 \in R^n. \quad (5)$$

Выше показано, что в случае разрешимости системы (4) относительно производной для $n=2$ и при условии выполнения представленных достаточных условий стабилизируемости можно осуществить стабилизацию системы регуляторами разностного типа. Предложен также интегральный регулятор, решающий проблему стабилизации.

Проведем анализ возможности стабилизации системы (4), не разрешенной относительно производной.

Систему (4), где $\det S = 0$, но S – ненулевая, назовем $Sx(t)$ -стабилизируемой регулятором вида (5), если существует регулятор (5) такой, что замкнутая система (4) является $Sx(t)$ -асимптотически устойчивой [2].

Используя канонические формы для систем с запаздывающим аргументом, получим достаточные условия $Sx(t)$ -стабилизируемости системы (4), (5) в двумерном случае.

Пусть $\det[b, Sb] \neq 0$.

Тогда найдется такая матрица $D, \det D \neq 0$, что преобразование $x = Du$ приведет исходную систему (4) к виду

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t). \quad (6)$$

Дальнейшее преобразование системы (6) в случае $\alpha_{11} \neq 0$ приводит ее к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{z}_2(t) = z_1(t) + \alpha_1 z_1(t-h) + \alpha_2 z_2(t-h), \\ 0 = \beta_{10} z_1(t) + \beta_{11} z_1(t-h) + \beta_{20} z_2(t) + \\ + \beta_{21} z_2(t-h). \end{cases} \quad (7)$$

Из второго уравнения системы (7) получаем:

$$z_1(t) = -\frac{1}{\beta_{10}} (\beta_{11} z_1(t-h) + \beta_{20} z_2(t) + \beta_{21} z_2(t-h)),$$

тогда

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(t) = & -\frac{1}{\beta_{10}} (\beta_{11} z_1(t-h) + \beta_{20} z_2(t) + \\ & + \beta_{21} z_2(t-h)) + \alpha_1 z_1(t-h) + \alpha_2 z_2(t-h). \end{aligned}$$

Выбирая β_{11}, β_{10} таким образом, чтобы $\beta_{11} = \beta_{10}\alpha_1$, имеем:

$$\dot{z}_2(t) = -\frac{\beta_{20}}{\beta_{10}} z_2(t) + \left(-\frac{\beta_{21}}{\beta_{10}} + \alpha_2 \right) z_2(t-h). \quad (8)$$

Для обеспечения асимптотической устойчивости последнего уравнения определим условия, при которых отрицательны действительные части корней характеристического уравнения

$$\lambda + \frac{\beta_{20}}{\beta_{10}} - \left(\alpha_2 - \frac{\beta_{21}}{\beta_{10}} \right) e^{-\lambda h} = 0. \quad (9)$$

В случае, когда точка с координатами $(\beta_{20} / \beta_{10}, \beta_{21} / \beta_{10} - \alpha_2)$ принадлежит области устойчивости Ω , описанной выше, корни уравнения (9) будут иметь отрицательные действительные части. При соответствующем выборе коэффициентов регулятора всегда можно обеспечить попадание точки в требуемую область, а следовательно, и система (4) в этом случае является $Sx(t)$ -стабилизируемой.

Пусть в (6) $\alpha_{11} = 0$. Тогда система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \\ &+ \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t), \\ \left\{ \begin{aligned} \dot{y}_2(t) &= \alpha_{12} y_2(t) + \alpha_{11}^1 y_1(t-h) + \alpha_{12}^1 y_2(t-h), \\ 0 &= \beta_{10} y_1(t) + \beta_{11} y_1(t-h) + \\ &+ \beta_{20} y_2(t) + \beta_{21} y_2(t-h). \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

При $\alpha_{11}^1 = 0$ первое уравнение системы устойчиво тогда и только тогда, когда точка $(-\alpha_{12}, -\alpha_{12}^1)$ принадлежит вышеуказанной области устойчивости Ω .

Если $\alpha_{11}^1 \neq 0$, то перейдем при помощи невырожденного преобразования к системе вида

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{z}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t), \end{aligned}$$

из которой получим:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{z}_2(t) &= \alpha_{12} z_2(t) + z_1(t-h), \\ 0 &= \beta_{10} z_1(t) + \beta_{11} z_1(t-h) + \\ &+ \beta_{20} z_2(t) + \beta_{21} z_2(t-h). \end{aligned} \right.$$

Пусть $\beta_{10} = 0, \beta_{11} = 1$, тогда

$$0 = z_1(t-h) + \beta_{21} z_2(t-h) + \beta_{20} z_2(t).$$

Имеем:

$$\dot{z}_2(t) = (\alpha_{12} - \beta_{20}) z_2(t) - \beta_{21} z_2(t-h). \quad (10)$$

Выбирая β_{20}, β_{21} так, чтобы точка $(-\alpha_{12} + \beta_{20}, \beta_{21})$ попадала в область устойчивости Ω , обеспечим асимптотическую устойчивость уравнения (10). Таким образом, исходная система является $Sx(t)$ -стабилизируемой.

Обобщим рассмотренные случаи.

Утверждение. Для $Sx(t)$ -стабилизируемости системы (4) регулятором вида (5) достаточно, чтобы выполнялось условие $\det[b, Sb] \neq 0$ и при этом α_{11} из (6) было отлично от нуля. В случае $\det[b, Sb] \neq 0, \alpha_{11} = 0$ систему можно стабилизировать, либо если $\alpha_{11}^1 = 0$ и точка $(-\alpha_{12}, -\alpha_{12}^1) \in \Omega$, либо если $\alpha_{11}^1 \neq 0$.

Заключение. В статье обобщаются результаты по стабилизации двумерных динамических систем с запаздыванием, разрешенных относительно производной, а также дескрипторных систем с запаздыванием при воздействии регуляторов различных типов.

На основании полученных данных по параметрам исходной системы проводится построение линейной обратной связи в виде разностных регуляторов вида (5), обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Литература

1. Борковская, И. М. О стабилизации линейных двумерных систем с запаздывающим аргументом / И. М. Борковская, В. М. Марченко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 1995. – Вып. II. – С. 23–33.
2. Борковская, И. М. Стабилизация двумерных дескрипторных систем с запаздыванием / И. М. Борковская // X Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 3–7 нояб. 2008 г. / Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2008. – Ч. 3. – С. 89.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОБЛЕМЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

The controllability problem of time-invariant singularly perturbed dynamic systems with constant delay (SPSD)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}x(t-h) + C_{11}y(t) + C_{12}y(t-h) + B_1u(t) \\ \mu \dot{y}(t) = A_{21}x(t) + A_{22}x(t-h) + C_{21}y(t) + C_{22}y(t-h) + B_2u(t) \end{cases}$$

is considered in this paper with the help of state space method. Some criteria as well as algebraic necessary, sufficient conditions of relative controllability, x -controllability, y -controllability without traditional condition $\det(C_{21} + mC_{22}) \neq 0$ are obtained. These criteria are obtained in terms of the solutions of the defining equations which are recurrence matrix algebraic equations. Defining equations are constructed according to the SPSPD by introducing a special correspondences between vector-functions and matrix-functions with two indexes.

Введение. В работе [1] предложен один подход к исследованию управляемости сингулярно возмущенных систем (СВС) с запаздыванием (СВСЗ), основанный на декомпозиции свойства управляемости систем большой размерности. Динамика многих управляемых объектов содержит элементы временных задержек, запаздываний по управлению, по состоянию. Поэтому проблема управляемости в современной теории управления является особенно актуальной при исследовании управляемости таких систем, как функционально-дифференциальные системы, СВС, СВСЗ.

Во многих задачах динамики полета, химической кинетики, автоматического управления и регулирования условие управляемости является необходимым условием существования решения исследуемых задач. Проблеме управляемости стационарных и нестационарных СВС с различными видами запаздываний (малыми, постоянными, зависящими от времени) и без запаздываний в последние годы посвящен ряд работ как отечественных, так и зарубежных ученых [1–6]. Возросшее внимание к СВС объясняется широким спектром их приложения. Достаточно хорошо изучена управляемость стационарных СВС. Очевидно, однако, что СВСЗ наиболее адекватно отражают наличие задержек в работе исследуемых объектов. Такие объекты описываются, например, линейными стационарными СВС с запаздыванием (ЛССВСЗ) вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}x(t-h) + \\ &+ C_{11}y(t) + C_{12}y(t-h) + B_1u(t), \\ \mu \dot{y}(t) &= A_{21}x(t) + A_{22}x(t-h) + \\ &+ C_{21}y(t) + C_{22}y(t-h) + B_2u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

как в медленных x , так и в быстрых y переменных. В (1) $\{x(t), y(t)\}$ – $(n_1 + n_2)$ -вектор состояния системы в момент времени t ; $t \in [0, T]$,

$x(t) \in R^{n_1}$, $y(t) \in R^{n_2}$, u – управляющее воздействие ($u \in PC([0, T], R^r)$) из класса кусочно-непрерывных r -вектор-функций, называемое далее *допустимым*; A_{ij} , C_{ij} , B_j , $i, j = 1, 2$ – заданные постоянные матрицы соответствующих размеров; μ – малый положительный параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$; h – запаздывание, $h = \text{const} > 0$.

В данной работе для ЛССВСЗ (1) с помощью *метода пространства состояний* получен ряд условий (критериев, необходимых, достаточных условий) относительной управляемости, x -управляемости, y -управляемости без традиционного предположения относительно матриц C_{21}, C_{22} : $\det(C_{21} + mC_{22}) \neq 0$. Все полученные результаты носят эффективный характер, поскольку выражены через решения матричных рекуррентных *определяющих уравнений*, впервые введенные автором в работе [6].

Вспомогательные результаты. Рассмотрим ЛССВСЗ (1), решение которой определяется начальными условиями

$$x(0, \mu) = \{\varphi(\theta), x(0) = x_0\}, \quad (2)$$

$$y(0, \mu) = \{\psi(\theta), y(0) = y_0\}, \quad \theta \in [-h, 0),$$

где $\varphi \in PC([-h, 0), R^{n_1})$, $\psi \in PC([-h, 0), R^{n_2})$ – кусочно-непрерывные n_1 - и n_2 -вектор-функции на $[-h, 0)$, $x_0 \in R^{n_1}$, $y_0 \in R^{n_2}$.

Определение. ЛССВСЗ (1), (2) при заданном μ называется относительно управляемой (x -управляемой, y -управляемой) на отрезке $[0, T]$, если для любых векторов $c_1 \in R^{n_1}$, $c_2 \in R^{n_2}$ (любого вектора $c_1 \in R^{n_1}$, любого вектора $c_2 \in R^{n_2}$) и любых начальных условий (2) существует допустимое управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, такое, что соответствующее решение $\{x(t, \mu), y(t, \mu)\}$, $t > 0$, ЛССВСЗ (1), (2) компонента $x(t, \mu) = x(t, \mu; x, \varphi; y, \psi; u)$, $t > 0$; компонента $y(t, \mu) = y(t, \mu; x, \varphi; y, \psi; u)$, $t > 0$ решения $\{x(t, \mu), y(t, \mu)\}$, $t > 0$ удовлетворяет

условиям $x(T, \mu) = c_1$, $y(T, \mu) = c_2$ (условию $x(T, \mu) = c_1$; условию $y(T, \mu) = c_2$).

Для вывода эффективных условий относительно управляемости ЛССВСЗ (1), (2) введем $(n_1 + n_2)$ -вектор $z(t) = \text{col}\{x(t), y(t)\}$, $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)$ -матрицы $A(\mu)$ и $A_1(\mu)$, $(n_1 + n_2) \times r$ -матрицу $B(\mu)$ вида

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} A_{11} & C_{11} \\ A_{21} & C_{21} \\ \mu & \mu \end{pmatrix}, A_1(\mu) = \begin{pmatrix} A_{12} & C_{12} \\ A_{22} & C_{22} \\ \mu & \mu \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$B(\mu) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \mu \end{pmatrix}.$$

В силу обозначений (3) ЛССВСЗ (1), (2) примет вид

$$\dot{z}(t) = A(\mu)z(t) + A_1(\mu)z(t-h) + B(\mu)u(t), \quad (4)$$

$$z(0, \mu) = \{\xi(\theta), z(0) = z_0\}, \quad \theta \in [-h, 0).$$

Согласно [7], критерий (т. е. необходимое и достаточное условие) относительной управляемости (ОУ) системы (4) на отрезке $[0, T]$ имеет следующий вид:

$$\text{rank} \{Z_k(s), k=1, n_1+n_2, s=0, \alpha h\} = n_1+n_2, \quad (5)$$

где $\alpha = \left\lceil \frac{T}{h} \right\rceil$, символ $[m]$ означает целую часть

(антье) числа m . В (5) $Z_k(s) \in R^{(n_1+n_2) \times r}$ – для любых $k=0, 1, 2, \dots$, $s=lh$, $l=0, 1, 2, \dots$, матричные решения алгебраического *определяющего уравнения*

$$Z_{k+1}(s) = A(\mu)Z_k(s) + A_1(\mu)Z_k(s-h) + B(\mu)U_k(s), \quad (6)$$

системы (4) с начальными условиями

$$U_0(s) = \begin{cases} E_r, & s=0, \\ 0_r, & s \neq 0, \end{cases} U_k(s) = 0_r, \quad k=1, 2, \dots \quad (7)$$

$$Z_0(s) = 0_{(n_1+n_2) \times r} \quad \forall s, Z_k(s) = 0_{(n_1+n_2) \times r}, \quad \forall s < 0. \quad (8)$$

Критерий (6) содержит в знаменателе большие степени (до $\mu^{n_1+n_2}$) малого параметра μ и является труднопроверяемым. Цель работы – получить эффективные необходимые и достаточные условия ОУ ЛССВСЗ (1), (2) только в терминах ее параметров $A_{ij}, C_{ij}, B_j, i, j=1, 2$.

Для решения задачи ОУ ЛССВСЗ (1) представим ее в операторной форме

$$px(t) = (A_{11} + A_{12}e^{-ph})x(t) + (C_{11} + C_{12}e^{-ph})y(t) + B_1u(t),$$

$$\mu py(t) = (A_{21} + A_{22}e^{-ph})x(t) + (C_{21} + C_{22}e^{-ph})y(t) + B_2u(t), \quad (9)$$

где p – оператор дифференцирования, $p \equiv d/dt$; e^{-ph} – оператор сдвига аргумента функции на величину h : $e^{-ph}z(t) \equiv z(t-h)$.

Каждой вектор-функции $x(t), y(t), u(t)$, входящей в ЛССВСЗ (1), поставим в соответствие постоянные матрицы $X_k^i(s) \in M^{n_1 \times r}$, $Y_k^i(s) \in M^{n_2 \times r}$, $U_k^i(s) \in M^{r \times r}$ с двумя индексами k, i и аргументом s , а оператору p и малому параметру μ – операторы сдвига Δ_+, Δ^+ соответственно нижнего и верхнего индекса матричной функции на единицу вправо:

$$x(t) \rightarrow X_k^i(s), \quad y(t) \rightarrow Y_k^i(s), \quad u(t) \rightarrow U_k^i(s), \quad (10)$$

$$p \rightarrow \Delta_+, \quad \mu \rightarrow \Delta^+.$$

Таким образом, согласно (10), для любой матричной функции $Q_k^i(s)$ действие на нее операторов Δ_+, Δ^+ означает: $\Delta_+ Q_k^i(s) = Q_{k+1}^i(s)$, $\Delta^+ Q_k^i(s) = Q_k^{i+1}(s)$. В силу соответствий (10) ЛССВСЗ (1) может быть представлена в виде

$$\Delta_+ X_k^i(s) = A_{11}X_k^i(s) + A_{12}X_k^i(s-h) + C_{11}Y_k^i(s) + C_{12}Y_k^i(s-h) + B_1U_k^i(s),$$

$$\Delta^+ \Delta_+ Y_k^i(s) = A_{21}X_k^i(s) + A_{22}X_k^i(s-h) + C_{21}Y_k^i(s) + C_{22}Y_k^i(s-h) + B_2U_k^i(s),$$

или с учетом определения операторов Δ_+, Δ^+ в виде алгебраической системы рекуррентных по k, i матричных уравнений

$$X_{k+1}^i(s) = A_{11}X_k^i(s) + A_{12}X_k^i(s-h) + C_{11}Y_k^i(s) + C_{12}Y_k^i(s-h) + B_1U_k^i(s), \quad (11)$$

$$Y_{k+1}^{i+1}(s) = A_{21}X_k^i(s) + A_{22}X_k^i(s-h) + C_{21}Y_k^i(s) + C_{22}Y_k^i(s-h) + B_2U_k^i(s),$$

которую будем решать с начальными условиями

$$U_0^0(0) = E_r, U_k^i(s) = 0_r, \quad k \neq 0 \vee i \neq 0 \vee s \neq 0, \quad (12)$$

$$X_0^i(s) = 0_{n_1 \times r} \quad \forall s, Y_0^i(s) = 0_{n_2 \times r} \quad \forall s.$$

Для каждого индекса $k, i, k, i=0, 1, 2, \dots$ и аргумента s пара матриц $\{X_k^i(s), Y_k^{i+1}(s)\}$ определяет решение уравнений (11), (12). Уравнения (11) назовем *определяющими уравнениями* ЛССВСЗ (1). Матричную пару $\{X_k^i(s), Y_k^{i+1}(s)\}$, вычисленную в силу начальных условий (12), назовем *решением определяющих уравнений* (11); каждую из матриц $X_k^i(s), Y_k^{i+1}(s)$ – компонентой решения $\{X_k^i(s), Y_k^{i+1}(s)\}$. Заметим, что в (5) решения $Z_k(s)$ определяющего уравнения (6) рассчитываются в точках, кратных запаздыванию h : $s=lh$, $l=0, 1, 2, \dots$. В этих же точках

будем вычислять и решения $\{X_k^i(s), Y_k^{i+1}(s)\}$ определяющих уравнений (11) с начальными условиями (12). Заметим, что в силу вида (11) определяющих уравнений и начальных условий (12) компоненты $X_k^i(s), Y_k^{i+1}(s)$ обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} X_k^i(sh) &= 0_{n_1 \times r}, \forall s \geq k, \forall i \geq 0, \\ Y_k^i(sh) &= 0_{n_2 \times r}, \forall s \geq k, \forall i \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Установим связь между решениями $Z_k(s)$ определяющего уравнения (6) и решением определяющих уравнений (11).

Решение задачи относительной управляемости. Для решения поставленной задачи введем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Для любого натурального числа k справедливо равенство

$$Z_k(0) = A^{k-1}(\mu)B(\mu).$$

Доказательство леммы легко проводится методом математической индукции по k .

Лемма 2. Для любых натуральных чисел k, l справедливо равенство

$$Z_k(lh) = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{X_k^j(lh)}{\mu^j} \\ \sum_{j=0}^{k-1} \frac{Y_k^{j+1}(lh)}{\mu^{j+1}} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Доказательство леммы также проводится методом математической индукции по двум переменным k, l с учетом свойств (13) определяющего уравнения (11), но в силу громоздкости здесь доказательство не приводится.

Представление (14) с учетом критерия (5) позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1 [1]. Для относительной управляемости ЛССВСЗ (1) на отрезке $[0, T]$ при любом $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rank} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{X_k^j(lh)}{\mu^j} \\ \sum_{j=0}^{k-1} \frac{Y_k^{j+1}(lh)}{\mu^{j+1}} \end{array}, k = \overline{1, n_1 + n_2}, s = \overline{0, \alpha} \right\} = n_1 + n_2.$$

Очевидна связь относительной управляемости ЛССВСЗ (1) на отрезке $[0, T]$ с x -управляемостью и y -управляемостью ЛССВСЗ (1).

Теорема 2. Если ЛССВСЗ (1) относительно управляема на отрезке $[0, T]$ для любого $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, то она x -управляема и

y -управляема для этих же значений малого параметра, т. е. выполняются условия

$$\begin{aligned} \text{rank} \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \frac{X_k^j(lh)}{\mu^j}, k = \overline{1, n_1 + n_2}, s = \overline{0, \alpha} \right\} &= n_1, \\ \text{rank} \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \frac{Y_k^{j+1}(lh)}{\mu^{j+1}}, k = \overline{1, n_1 + n_2}, s = \overline{0, \alpha} \right\} &= n_2. \end{aligned}$$

Заключение. С помощью метода пространства состояний исследована относительная управляемость, x -управляемость, y -управляемость линейных стационарных сингулярно возмущенных систем с постоянным запаздыванием без традиционного предположения относительно матриц C_{21}, C_{22} этой системы: $\det(C_{21} + mC_{22}) \neq 0$. Доказан критерий, необходимые достаточные условия всех видов управляемости. Все полученные результаты носят эффективный характер, поскольку выражены через решения матричных рекуррентных определяющих уравнений.

Литература

1. Копейкина, Т. Б. Управляемость стационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / Т. Б. Копейкина, А. С. Гусейнова // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2008. – Вып. XVI. – С. 9–14.
2. Копейкина, Т. Б. Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / Т. Б. Копейкина // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25, № 9. – С. 1508–1518.
3. Kopeikina, T. B. Some approaches to the controllability investigation of singularly perturbed dynamic systems / T. B. Kopeikina // Systems Science. – 1995. – Vol. 21, № 1. – P. 17–36.
4. Glizer, V. Y. Controllability of nonstandard singularly perturbed systems with small state delay / V. Y. Glizer // IEEE Trans. Automat. Control. – 2003. – Vol. 48, № 34. – P. 1280–1285.
5. Копейкина, Т. Б. Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с малым запаздыванием / Т. Б. Копейкина, А. С. Гусейнова // Вестник БНТУ. – 2006. – № 4. – С. 54–58.
6. Копейкина, Т. Б. О критериях управляемости линейных стационарных сингулярно возмущенных систем / Т. Б. Копейкина // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2006. – Т. 14, № 4. – С. 54–65.
7. Габасов, Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – М.: Наука, 1971. – 508 с.

В. И. Мататов, доцент (БГУ); Е. Я. Кричавец, ассистент (БГТУ);
Т. А. Любецкая, ассистент (БГТУ); Н. В. Рабчун, ассистент (БГЭУ)

**О ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧКАХ РЕШЕНИЙ
АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА**

This article is about fourth degree Hamilton's autonomous systems, as
$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i=1, 2, \end{cases} \quad \text{where}$$

$$H = F(\varphi_1, \varphi_2), \quad F - \text{holomorphic function of } \varphi_1, \varphi_2, \quad \varphi_1 = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_0}{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0}, \quad \varphi_2 = \frac{\gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2 + \gamma_0}{\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 + \delta_0}.$$

It was shown if even one determination $\Delta_1 = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2$ or $\Delta_2 = \gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2$ differ from zero solution of the system has the second degree branching points as moving critical points. If all of the foregoing determinations are equal to zero, the solution has no critical points.

Введение. Многие задачи естествознания и техники моделируются с помощью систем дифференциальных уравнений Гамильтона [1–7]. Часто они оказываются автономными, т. е. их гамильтонианы явно не зависят от времени. Исследование характера подвижных особых точек решений нелинейных однородных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений является одной из основных задач аналитической теории дифференциальных уравнений [8–17].

В статьях [13, 14] исследованы системы двух дифференциальных уравнений «перекрестного типа». Найдены условия однозначности подвижных особых точек решений указанных систем. В работе [15] изучены автономные системы Гамильтона вида

$$x' = H'_y(x, y), \quad y' = -H'_x(x, y),$$

$$H(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

где P, Q – взаимно простые полиномы.

Показано, что решения таких систем могут иметь в плоскости независимой переменной C только алгебраические подвижные особые точки.

Статья [16] посвящена исследованию подвижных особенностей системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} = \frac{P(z, x, y)}{Q(z, x, y)} = F, \\ \frac{dy}{dz} = \frac{R(z, x, y)}{S(z, x, y)} = G, \end{cases}$$

где P, Q, R, S – полиномы не выше второй степени относительно x, y с голоморфными по z коэффициентами. Правые части системы удовлетворяют условию

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0.$$

В работе [17] исследованы подвижные особые точки решений неавтономной системы Гамильтона вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} = P_3(z, x, y), \\ \frac{dy}{dz} = Q_3(z, x, y), \end{cases}$$

где P_3, Q_3 – полиномы третьей степени относительно x, y с голоморфными по z коэффициентами.

Основная часть. Предположим, что гамильтониан $H = F(\varphi_1, \varphi_2)$, где

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_0}{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0}, \quad \varphi_2 = \frac{\gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2 + \gamma_0}{\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 + \delta_0},$$

F – голоморфная функция относительно $\varphi_1, \varphi_2, t \in C, x_1, x_2, y_1, y_2 \in C \cup \{\infty\}$. Соответствующая система Гамильтона будет иметь следующий вид:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial y_1} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}, \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial y_2} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2}, \tag{2}$$

$$\dot{y}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \tag{3}$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\frac{\partial F}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}. \tag{4}$$

Теорема 1. Если хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix}$ не равен нулю, то решения системы (1)–(4) в качестве подвижных особых точек имеют точки ветвления второго порядка.

Доказательство. Систему (1)–(4) можно записать так

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{-\Delta_1 x_1 + \alpha_2 \beta_0 - \alpha_0 \beta_2}{(\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0)^2}, \quad (5)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} \frac{-\Delta_2 x_2 + \delta_0 \gamma_2 - \gamma_0 \delta_2}{(\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 + \delta_0)^2}, \quad (6)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{\Delta_1 y_1 + \alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0}{(\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0)^2}, \quad (7)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} \frac{\Delta_2 y_2 + \gamma_0 \delta_1 - \delta_0 \gamma_1}{(\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 + \delta_0)^2}, \quad (8)$$

где $\Delta_1 = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2$, $\Delta_2 = \gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2$.

Рассмотрим следующие случаи:

$$1) \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$2) \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$3) \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть имеет место первый случай, а именно: $\Delta_1 = \beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2 \neq 0$, $\Delta_2 = \delta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \delta_2 \neq 0$.

Сделаем в системе (5)–(8) замену

$$x_1 = X_1 + a, \quad x_2 = X_2 + b, \quad y_1 = Y_1 + c, \quad y_2 = Y_2 + d,$$

где a, b, c, d удовлетворяют следующим системам:

$$\begin{cases} \alpha_1 a + \alpha_2 c + \alpha_0 = 0, & \gamma_1 d + \gamma_2 b + \gamma_0 = 0, \\ \beta_1 a + \beta_2 c + \beta_0 = 0; & \delta_1 d + \delta_2 b + \delta_0 = 0. \end{cases}$$

Тогда получим:

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 Y_1}{\beta_1 X_1 + \beta_2 Y_1}, \quad \tilde{\varphi}_2 = \frac{\gamma_1 X_2 + \gamma_2 Y_2}{\delta_1 X_2 + \delta_2 Y_2}.$$

А система (5)–(8) преобразуется к виду

$$\dot{X}_1 = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial Y_1} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1} \frac{\Delta_1 X_1}{(\beta_1 X_1 + \beta_2 Y_1)^2}, \quad (9)$$

$$\dot{X}_2 = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_2} \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial Y_2} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_2} \frac{\Delta_2 X_2}{(\delta_1 X_2 + \delta_2 Y_2)^2}, \quad (10)$$

$$\dot{Y}_1 = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial X_1} = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1} \frac{\Delta_1 Y_1}{(\beta_1 X_1 + \beta_2 Y_1)^2}, \quad (11)$$

$$\dot{Y}_2 = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_2} \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial Y_2} = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_2} \frac{\Delta_2 Y_2}{(\delta_1 X_2 + \delta_2 Y_2)^2}. \quad (12)$$

Из уравнений (9) и (11) имеем, что $\frac{dY_1}{dX_1} = \frac{Y_1}{X_1}$. Откуда $\frac{X_1}{Y_1} = C_1$, где C_1 – произвольная постоянная.

Используя дифференциальное уравнение (ДУ) (9), будем иметь

$$\frac{dX_1}{dt} = \Phi_1(C_1, C_2) \frac{\Delta_1}{(\beta_1 + \beta_2 C_1)^2 X_1},$$

$$\text{где } \Phi_1(C_1, C_2) = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1} \Bigg|_{\substack{\tilde{\varphi}_1 = \frac{\alpha_1 C_1 + \alpha_2}{\beta_1 C_1 + \beta_2} \\ \tilde{\varphi}_2 = \frac{\gamma_1 C_2 + \gamma_2}{\delta_1 C_2 + \delta_2}}.$$

Это позволяет записать ДУ (9) так:

$$X_1 dX_1 = \frac{\Delta_1 \Phi_1(C_1, C_2)}{(\beta_1 + \beta_2 C_1)^2} dt.$$

После интегрирования последнего уравнения получим:

$$\frac{X_1^2}{2} = \frac{\Delta_1 \Phi_1(C_1, C_2)}{(\beta_1 + \beta_2 C_1)^2} (t - C_3),$$

где C_3 – произвольная постоянная.

Откуда

$$X_1 = \sqrt{2 \frac{\Delta_1 \Phi_1(C_1, C_2)}{(\beta_1 + \beta_2 C_1)^2} (t - C_3)}, \quad \text{а } Y_1 = \frac{1}{C_1} X_1.$$

Аналогично из (10) и (12) следует $\frac{X_2}{Y_2} = C_2$,

где C_2 – произвольная постоянная.

Имеем:

$$\frac{dX_2}{dt} = \Phi_2(C_1, C_2) \frac{\Delta_2}{(\delta_1 + \delta_2 C_2)^2 X_2},$$

$$\text{где } \Phi_2(C_1, C_2) = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_2} \Bigg|_{\substack{\tilde{\varphi}_1 = \frac{\alpha_1 C_1 + \alpha_2}{\beta_1 C_1 + \beta_2} \\ \tilde{\varphi}_2 = \frac{\gamma_1 C_2 + \gamma_2}{\delta_1 C_2 + \delta_2}}.$$

Тогда решения системы (9)–(12) примут следующий вид:

$$X_2 = \sqrt{2 \frac{\Delta_2 \Phi_2(C_1, C_2)}{(\delta_1 + \delta_2 C_2)^2} (t - C_4)}; \quad Y_2 = \frac{1}{C_2} X_2,$$

где C_4 – произвольная постоянная.

Рассмотрим второй случай (третий случай исследуется аналогично):

$$\Delta_1 = \beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2 = 0, \quad \Delta_2 = \delta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \delta_2 \neq 0.$$

Решения X_2, Y_2 системы (5)–(8) в качестве подвижных особых точек имеют точки ветвления второго порядка (очевидно из доказательства, проведенного выше).

Поскольку $\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$, то $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = k$. То-

гда $\tilde{\varphi}_1 = \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1$ и уравнения (5), (7) преобразуются к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial y_1} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1} \beta_2, \\ \dot{y}_1 = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1} \beta_1. \end{cases} \quad (13)$$

$$\quad (14)$$

Из уравнений (13) и (14) имеем следующее:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{\beta_1}{\beta_2}, \text{ т. е.} \quad (15)$$

$$\beta_2 y_1 + \beta_1 x_1 = C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Используя уравнение (13), получим:

$$\frac{dx_1}{dt} = \Phi_1(C_1, C_2) \beta_2,$$

$$\text{где } \Phi_1(C_1, C_2) = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1} \Bigg|_{\substack{\tilde{\varphi}_1 = C_1 \\ \tilde{\varphi}_2 = \frac{\gamma_1 C_2 + \gamma_2}{\delta_1 C_2 + \delta_2}}}.$$

Интегрируя данное ДУ и пользуясь равенством (15), имеем:

$$x_1 = \Phi_1(C_1, C_2) \beta_2 (t - C_3),$$

$$y_1 = -\frac{\beta_1}{\beta_2} \Phi_1(C_1, C_2) \beta_2 (t - C_3) + \frac{C_1}{\beta_2}.$$

Следовательно, x_1 и y_1 не имеют в S никаких подвижных особых точек.

Исходя из вышеизложенного, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. Если все определители $\begin{vmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\ \beta_1 \beta_2 \end{vmatrix}$,

$\begin{vmatrix} \gamma_1 \gamma_2 \\ \delta_1 \delta_2 \end{vmatrix}$ равны нулю, то решения системы (5)–(8) не имеют в S никаких подвижных особых точек.

Заключение. В статье рассмотрены автономные системы Гамильтона четвертого порядка вида

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i=1, 2, \end{cases}$$

где $H = F(\varphi_1, \varphi_2)$, F – голоморфная функция относительно φ_1, φ_2 , где

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_0}{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0}, \quad \varphi_2 = \frac{\gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2 + \gamma_0}{\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 + \delta_0}.$$

Показано, что если хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\ \beta_1 \beta_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \gamma_1 \gamma_2 \\ \delta_1 \delta_2 \end{vmatrix}$ не равен нулю, то решения рассматриваемой системы в качестве подвижных особых точек имеют точки ветвления

второго порядка. Если же каждый из вышеуказанных определителей равен нулю, то ее решения не имеют никаких подвижных особых точек.

Литература

1. Кильчевский, Н. А. Курс теоретической механики / Н. А. Кильчевский. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – С. 543.
2. Мышкис, А. Д. Математика. Специальные курсы / А. Д. Мышкис. – М.: Наука, 1971. – С. 632.
3. Айзерман, М. А. Классическая механика / М. А. Айзерман. – М.: Наука, 1974. – С. 367.
4. Дубошин, Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы / Г. Н. Дубошин. – М.: Наука, 1968. – С. 799.
5. Гребеников, Е. А. Метод усреднения в прикладных задачах / Е. А. Гребеников. – М.: Наука, 1986. – С. 255.
6. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский. – М.: Высшая школа, 1971. – Т. 2. – С. 487.
7. Петкевич, В. В. Теоретическая механика / В. В. Петкевич. – М.: Наука, 1981. – С. 496.
8. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков: ГНТИУ, 1939. – С. 718.
9. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. – С. 436.
10. Еругин, Н. П. Проблема Римана / Н. П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1982. – С. 336.
11. Еругин, Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1972. – С. 664.
12. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – С. 480.
13. Яблонский, А. И. Об одной системе дифференциальных уравнений без подвижных критических особых точек / А. И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1966. – Т. 2, № 6. – С. 752–762.
14. Яблонский, А. И. Системы дифференциальных уравнений, критические особые точки которых неподвижны / А. И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, № 3. – С. 468–478.
15. Мататов, В. И. О характере подвижных особых точек некоторых систем Гамильтона / В. И. Мататов // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, № 8. – С. 1502–1503.
16. Мататов, В. И. Об условиях однозначности подвижных особых точек у одной системы дифференциальных уравнений / В. И. Мататов // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9, № 11. – С. 2092–2094.
17. Мататов, В. И. Исследование подвижных особенностей неавтономных систем Гамильтона с кубическими нелинейностями / В. И. Мататов, Л. В. Сабынич // Вестник БГУ. Сер. 1. – 1993. – № 2. – С. 59–63.

ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

This work is devoted to classifying homogeneous space with an invariant non-degenerate almost symplectic structure such that the isotropic representation is faithful. It is known that the problem of classification of homogeneous spaces (\bar{G}, M) is equivalent to the classification (up to equivalence) of pairs of Lie groups (\bar{G}, G) . By linearization, the problem can be reduced to the problem of classification of pairs of Lie algebras (\bar{g}, g) viewed up to equivalence of pairs. It is sufficient to consider only the effective action of the group \bar{G} on the manifold M . This problem is solved in the following way: classify all subalgebras g of the Lie algebra $sp(n, \mathbb{C})$; for each subalgebra g describe all complex isotropically-faithful pairs such that their isotropic representation are conjugate to g ; for each complex pair find all its real forms; for each real form construct all corresponding pairs of Lie groups and the homogeneous spaces.

Введение. Проблема описания подмногообразий была поставлена еще в начале прошлого века, в дальнейшем были классифицированы различные специальные классы подмногообразий. Наиболее интересным случаем как с математической, так и с физической точки зрения является однородный случай. Большинство физических моделей являются однородными, и это условие часто бывает априорным, большинство пространств, появляющихся в различных разделах математики, тесно связанных с приложениями, также считаются однородными. Условие однородности является принципиальным и с математической точки зрения, оно позволяет свести задачу к чисто алгебраической, применить технику теории групп и алгебр Ли. Настоящая работа посвящена классификации изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой.

Основная часть. Пусть (\bar{G}, M) – однородное пространство и $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Паре (\bar{G}, G) поставим в соответствие пару (\bar{g}, g) , где \bar{g} – алгебра Ли группы Ли \bar{G} и g – подалгебра в \bar{g} , соответствующая подгруппе Ли G .

Две пары групп Ли (\bar{G}_1, G_1) и (\bar{G}_2, G_2) эквивалентны, если существует изоморфизм групп Ли

$$\pi: \bar{G}_1 \rightarrow \bar{G}_2, \text{ такой что } \pi(G_1) = G_2.$$

Проблема классификации однородных пространств (\bar{G}, M) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли (\bar{G}, G) . Используя линеализацию, эту проблему можно свести к классификации пар алгебр Ли (\bar{g}, g) с точностью до эквивалентности пар.

Пары (\bar{g}_1, g_1) и (\bar{g}_2, g_2) называются эквивалентными, если существует изоморфизм алгебр Ли

$$\pi: \bar{g}_1 \rightarrow \bar{g}_2, \text{ такой что } \pi(g_1) = g_2.$$

Назовем пару (\bar{g}, g) эффективной, если подалгебра g не содержит ненулевых идеалов алгебры Ли \bar{g} .

Строение пар групп Ли (\bar{G}, G) , соответствующих данной эффективной паре алгебр Ли (\bar{g}, g) , было описано в [1]. Поэтому проблема

классификации однородных пространств сводится к классификации пар.

Отображение

$$\rho: \bar{g} \rightarrow gl(\bar{g}/g), \quad x \mapsto \text{ad}|_{\bar{g}/g} x$$

называется *изотропным представлением* подалгебры g . Пара (\bar{g}, g) называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры g . В дальнейшем рассматриваются только такие пары.

Пусть $V = \bar{g}/g$ – g -модуль, соответствующий изотропному представлению. Пространство $B(V)$ билинейных форм на V естественным образом становится g -модулем, если положить

$$x.b(v_1, v_2) = -b(x.v_1, v_2) - b(v_1, x.v_2),$$

где $x \in g, v_1, v_2 \in V, b \in B(V)$.

Почти симплектической структурой на g -модуле V называется невырожденная, кососимметрическая билинейная форма $b \in B(V)$ такая, что $x.b = 0$ для всех $x \in g$. Другими словами, $b \in B_g(V)$. Пусть B – матрица симплектической структуры в некотором базисе пространства V , а A_x – матрица элемента $x \in \rho(g)$ в том же базисе.

Пара (\bar{g}, g) допускает почти симплектическую структуру, если выполняется следующее свойство: $A_x^t B + B A_x = 0, \forall x \in \rho(g)$.

Для изотропно-точной пары (\bar{g}, g) отождествим алгебры g и $\rho(g)$.

Существует единственная (с точностью до сопряженности) невырожденная кососимметрическая билинейная форма b [2]. Множество всех эндоморфизмов пространства V , сохраняющих невырожденную кососимметрическую билинейную форму b , является алгеброй Ли.

Зафиксируем базис $\{u_1, \dots, u_4\}$ пространства V , в котором матрица B имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная алгебра Ли обозначается $sp(4, \mathbb{R})$. Она представима в виде

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y & u & w \\ z & t & w & v \\ s & p & -x & -z \\ p & r & -y & -t \end{pmatrix} \right\} x, y, z, t,$$

$$u, v, s, w, p, r \in \mathbb{R} \}.$$

Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что алгебра Ли g является подалгеброй в линейной алгебре Ли $sp(4, \mathbb{R})$.

Рассмотрим сначала комплексификации пар (\bar{g}, g) . Решение задачи разбивается на следующие этапы:

1. Классификация с точностью до сопряженности всех подалгебр $g^{\mathbb{C}}$, допускающих почти симплектическую структуру, что равносильно классификации (с точностью до сопряженности) подалгебр алгебры Ли $sp(4, \mathbb{C})$.

2. Для каждой подалгебры $g^{\mathbb{C}}$ из пункта 1 производим классификацию (с точностью до эквивалентности) изотропно-точных пар $(\bar{g}^{\mathbb{C}}, g^{\mathbb{C}})$, у которых изотропное представление сопряжено подалгебре $g^{\mathbb{C}}$.

3. Для каждой пары $(\bar{g}^{\mathbb{C}}, g^{\mathbb{C}})$ находим (с точностью до эквивалентности пар) все вещественные формы (\bar{g}, g) .

1 этап. Для обозначения

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha z & x & y & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha z & 0 \\ 0 & 0 & -x & -z \end{pmatrix} \right\} x, y, z \in \mathbb{C} \},$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$ – параметр (т. е. это, вообще говоря, целый класс алгебр), будем использовать запись вида

αz	x	y	
	z		
		$-\alpha z$	
		$-x$	$-z$

Однако две алгебры g_1 и g_2 этого класса, определенные параметрами α_1 и α_2 соответственно, могут быть сопряжены при некоторых значениях параметров. Очевидно, что отношение сопряженности подалгебр задает отношение эквивалентности на множестве параметров: два набора параметров эквивалентны тогда и только тогда, когда сопряжены соответствующие подалгебры. Чтобы отметить возможную эквивалентность наборов параметров, используем два способа: указываем фундаментальную область данного отношения эквивалентности или выписываем образующие некоторой конечной группы преобразований множества параметров, орбиты которой в точности совпадают с классами эквивалентности. Например, $|\alpha| \leq 1$ или $\alpha \mapsto 1/\alpha$.

Теорема. Пусть g – подалгебра в алгебре Ли $sp(4, \mathbb{C})$. Тогда g сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:

$\dim g = 1.$

1.

		x	
	x		
			$-x$
2.

			x
		x	
3.

			x
4.

	x		
			x
		$-x$	
5.

λx			
	x		
		$-\lambda x$	
			$-x$

$$\lambda \mapsto 1/\lambda, \lambda \mapsto -\lambda$$

$\dim g = 2.$

1.

$3y$	x		
	y		x
		$-3y$	
		$-x$	$-y$
2.

		y	
	y		x
			$-y$
3.

y		x	
		$-y$	
4.

αy		x	
	y		
		αy	
			$-y$
5.

y			x
		x	y
		$-y$	
6.

αy			x
	y	x	
		$-\alpha y$	
			$-y$
7.

		x	
			y
8.

			x
		x	y
9.

x			
	y		
		$-x$	
			$-y$
10.

	y	x	
			y
		$-y$	

$$\alpha \mapsto -\alpha;$$

$$\alpha \mapsto 1/\alpha;$$

$\dim g = 3.$

1.

		x	y
		y	z
2.

x		z	
	y		
		$-x$	
			$-y$
3.

x			z
	y	z	
		$-x$	
			$-y$
4.

	z	x	y
		y	z
		$-z$	
5.

	x	y	z
		z	
		$-x$	
6.

		z	x
	z	x	y
			$-z$

7.

$3y$	x	z	
	y		x
		$-3y$	
		$-x$	$-y$

8.

x	y	z	
		$-x$	
		$-y$	

5.

x		u	
	y		w
z		$-x$	
			$-y$

9.

αz	x	y	
	z		
		$-\alpha z$	
		$-x$	$-z$

10.

αz		y	
	z		x
		$-\alpha z$	
			$-z$

$\dim g = 6.$

1.

x	y	t	u
	z	u	v
		$-x$	
		$-y$	$-z$

2.

x		y	
	t		u
z		$-x$	
	v		$-t$

11.

x		y	
z		$-x$	

12.

x		y	
	x		y
z		$-x$	
	z		$-x$

$\alpha \mapsto 1/\alpha;$

3.

x		u	v
t		v	w
s		$-x$	$-t$

4.

x	y	u	v
z	$-x$	v	w
		$-x$	$-z$
		$-y$	x

$\dim g = 7.$

13.

$3x$	y		
$3z$	x		$-2y$
		$-3x$	$-3z$
	$-2z$	$-y$	$-x$

$\dim g = 4.$

1.

x		u	v
t	y	v	w
s		$-x$	$-t$
			$-y$

2.

x	z	u	v
t	y	v	w
		$-x$	$-t$
		$-z$	$-y$

$\dim g = 10.$

x	y	u	w
z	t	w	v
s	p	$-x$	$-z$
p	r	$-y$	$-t$

$= sp(4, \mathbb{C}).$

1.

	x	y	z
		z	t
		$-x$	

2.

x		z	
	y		t
		$-x$	
			$-y$

3.

αz		x	y
	z	y	t
		$-\alpha z$	
			$-z$

4.

x	z		
t	y		
		$-x$	$-t$
		$-z$	$-y$

$\alpha \mapsto 1/\alpha;$

5.

$3t$	z	x	y
	t	y	z
		$-3t$	
		$-z$	$-t$

6.

t	x	y	z
		z	t
		$-t$	
		$-x$	

7.

x	y	z	t
		t	
		$-x$	
		$-y$	

8.

αt	x	y	t
	t	z	
		$-\alpha t$	
		$-x$	$-t$

$\alpha \mapsto -\alpha;$

9.

x		t	z
	y	z	
		$-x$	
			$-y$

10.

x		u	
			w
z		$-x$	

11.

x		u	
	y		
z		$-x$	
			$-y$

$\dim g = 5.$

1.

αu	x	y	z
	u	z	t
		$-\alpha u$	
		$-x$	$-u$

2.

x	y	z	t
		t	u
		$-x$	
		$-y$	

3.

x		z	t
	y	t	u
		$-x$	
			$-y$

4.

x	y	u	t
	z	t	
		$-x$	
		$-y$	$-z$

Доказательство. Поскольку любая разрешимая подалгебра в $sp(4, \mathbb{C})$ сопряжена (относительно группы $GL(4, \mathbb{C})$) подалгебре максимальной разрешимой алгебры r , классифицируем сначала подалгебры в r с точностью до сопряженности относительно группы R матриц, сохраняющих r . Среди найденных алгебр будут сопряженные в группе $GL(4, \mathbb{C})$, поэтому разобьем полученные подалгебры на классы сопряженных (относительно группы $GL(4, \mathbb{C})$) и выберем из каждого класса по одному представителю. Получим искомую классификацию разрешимых подалгебр в $sp(4, \mathbb{C})$.

Из теории полупростых алгебр Ли следует, что все полупростые подалгебры в $sp(4, \mathbb{C})$ (с точностью до сопряженности) имеют вид

x	0	y	0
0	0	0	0
z	0	$-x$	0
0	0	0	0

$3x$	y	0	0
$3z$	x	0	$-2y$
0	0	$-3x$	$-3z$
0	$-2z$	$-y$	$-x$

x	0	y	0
0	x	0	y
z	0	$-x$	0
0	z	0	$-x$

x	0	y	0
0	t	0	u
z	0	$-x$	0
0	v	0	$-t$

и сама $sp(4, \mathbb{C})$. Для каждой полупростой подалгебры $a \in sp(4, \mathbb{C})$ найдем (с точностью до сопряженности) все алгебры g , такие что a является ее подалгеброй Леви.

Подалгебра $sp(4, \mathbb{C})$ является a -модулем (относительно присоединенного представления) и

разлагается в прямую сумму изотипных компонент

$$sp(4, \mathbb{C}) = a \oplus S_1 \oplus \dots \oplus S_n.$$

Если g – неразрешимая подалгебра, то она является прямой суммой своих пересечений с изотипными компонентами, поэтому находим в S_i все подмодули α -модуля S_i , составляем их суммы и проверяем, получается ли подалгебра.

2 этап. Рассмотрим теперь задачу классификации для заданной подалгебры g с точностью до эквивалентности изотропно-точных пар (\bar{g}, g) , у которых изотропное представление сопряжено подалгебре g .

Обобщенным модулем называется пара (g, U) , где g – алгебра Ли, а U – g -модуль.

Назовем обобщенные модули (g_1, U_1) и (g_2, U_2) *изоморфными*, если существует такая пара отображений (f, F) , что $f: g_1 \rightarrow g_2$ – изоморфизм алгебр Ли, $F: U_1 \rightarrow U_2$ – изоморфизм векторных пространств, и для всех x, g_1, U_1 выполняется следующее условие:

$$F(x.u) = f(x).F(u).$$

Пусть V – векторное пространство, а g – подпространство в нем. Пара (V, g) , снабженная билинейным отображением

$$B: G \times V \rightarrow V, \quad (x, v) = x.v,$$

называется *виртуальной парой*, если выполняются следующие условия:

- 1) $g.g \in g$;
- 2) ограничение B на $g \times g$ задает на g структуру алгебры Ли $([x, y] = x.y)$;
- 3) V – g -модуль относительно B .

Любой виртуальной паре (V, g) естественным образом соответствует обобщенный модуль $(g, V/g)$, который называется *ассоциированным с виртуальной парой*.

Пусть (V_1, g_1) и (V_2, g_2) – две виртуальные пары и $H: V_1 \rightarrow V_2$ – изоморфизм векторных пространств. Назовем H *изоморфизмом виртуальных пар*, если

- $H(g_1) = g_2$;
- $H(x.v) = H(x).H(v)$ для всех $x \in g_1, v \in V_1$.

Пусть $H: V_1 \rightarrow V_2$ – изоморфизм виртуальных пар (V_1, g_1) и (V_2, g_2) . Пусть $f: g_1 \rightarrow g_2$ – ограничение H на g_1 и пусть $F: V_1/g_1 \rightarrow V_2/g_2$ – отображение, определяемое $F(v + g_1) = H(v) + g_2$ для всех $v \in V_1$. Тогда (f, F) – изоморфизм обобщенных модулей $(g_1, V_1/g_1)$ и $(g_2, V_2/g_2)$, ассоциированный с H .

Классификация (с точностью до изоморфизма) изотропно-точных g -модулей U эквивалентна классификации подалгебр в $sp(4, \mathbb{C})$ с точностью до сопряженности. Для каждого найденного g -модуля U классифицируем (с

точностью до эквивалентности) все пары (\bar{g}, g) , такие что g -модули U и \bar{g}/g изоморфны.

3 этап. Имея классификацию пар над полем \mathbb{C} , получим классификацию над полем \mathbb{R} .

Пространство $V^{\mathbb{C}}$ называется *комплексификацией* вещественного векторного пространства V . Если на V задана структура вещественной алгебры Ли g , то она продолжается до структуры комплексной алгебры $g^{\mathbb{C}}$.

Пусть теперь g – алгебра Ли над \mathbb{C} , a – вещественная подалгебра в g (алгебру над \mathbb{C} можно рассматривать как алгебру над \mathbb{R} вдвое большей размерности).

Подалгебра a называется *вещественной формой* алгебры Ли g , если

$$a \oplus i a = g, \quad a \cap i a = 0.$$

Пусть a – вещественная форма алгебры g . *Сопряжением* относительно a называется отображение $\zeta: g \rightarrow g$, $\zeta(x + i y) = x - i y$, $\forall x, y \in a$. Отображение называется *антиинволюцией*, если

$$\zeta^2 = \text{id } g, \quad [\zeta(x), \zeta(y)] = \zeta([x, y]),$$

$$\zeta(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda} \zeta(x) + \bar{\mu} \zeta(y)$$

$\forall x, y \in g, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Вещественные формы алгебры Ли – неподвижные точки антиинволюций. Две вещественные формы переводятся друг в друга автоморфизмом тогда и только тогда, когда соответствующие антиинволюции сопряжены. Чтобы классифицировать вещественные формы абстрактной алгебры Ли, нужно классифицировать с точностью до группы автоморфизмов все антиинволюции.

Рассмотрим теперь пару (\bar{g}, g) . Множество всех вещественных форм пары (\bar{g}, g) находится во взаимно однозначном соответствии с множеством таких антиинволюций ζ алгебры \bar{g} , что $\zeta(g) = g$. Для каждой пары $(\bar{g}^{\mathbb{C}}, g^{\mathbb{C}})$ определяем (с точностью до эквивалентности пар) все вещественные формы (\bar{g}, g) .

Заключение. Классифицированы подалгебры алгебры Ли $sp(4, P)$, $P = \mathbb{R}$ и \mathbb{C} . Проведено полное описание изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой (над полями \mathbb{R} и \mathbb{C}). Предложенная методика может быть использована для произвольной размерности.

Литература

1. Mostow, G. D. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces / G. D. Mostow. – Ann. Of Math. 32. – 1950. – № 3.

2. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРОЕША

In job for the decision of nonlinear regional problems the method of plural bilateral shooting is offered. Practical realisation of a method is considered on an example of the decision of known regional problem Troesh. For the decision of problem Troesh computing schemes of a method of plural bilateral shooting are under construction. They comprise procedure of the decision of problems Cauchy in direct and return directions on shooting subintervals. On an example of problem Troesh it is shown, that the choice of number and lengths of subintervals of shooting provides necessary properties and qualities of problems Cauchy. During the decision of the given problem come to light and properties of matrixes Jakoby for closing systems of the equations are studied. These systems of the equations turn out enough a low order. Borders of a spectrum of matrix Jakoby are defined and their numbers of conditionality are calculated. The offered technique allows to solve wide classes of regional problems with an interface, and thus reduces computing difficulties of boundary problems.

Введение. Проблеме численного решения нелинейных двухточечных граничных задач с пограничными слоями уделяется в настоящее время все большее внимание. Эти задачи являются математическими моделями диффузионно-конвективных процессов или родственных физических явлений [1].

Решения такого рода задач обычно не могут быть представлены в виде рядов по возрастающим степеням коэффициента диффузии. Они называются сингулярно-возмущенными задачами. Поскольку в предельном случае при нулевом коэффициенте диффузии дифференциальные уравнения имеют более низкий порядок, некоторые из граничных условий станут лишними. Решение может быстро изменяться вблизи граничных точек, т. е. мы будем иметь здесь пограничный слой. Получение решения граничной задачи при наличии пограничного слоя осложняется и требует специальных методов.

При решении указанного выше типа задач стандартными численными методами возникают большие трудности. Причина этих трудностей чаще всего заключается в неустойчивости численного процесса. В качестве специальных методов будем рассматривать методы пристрелки.

Методы пристрелки для граничных задач в случае нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в смысле общности и универсальности сопоставимы только с методами сеток.

Имеют место самые сложные случаи, когда решение характеризуется внутренними переходными слоями, осцилляциями, резкими перепадами, в частности, наблюдаются и разрывы первого рода. В таких случаях нужно гибко использовать свойства решений, полученных в ходе эксперимента.

Для этих целей предлагается метод множественной двусторонней пристрелки, обладающий необходимой гибкостью.

Практическая реализация метода множественной двусторонней пристрелки и его качества зависят главным образом от того, какие

имеются возможности на следующих его основных этапах:

- 1) выбор точек пристрелки;
- 2) выбор точек сшива решений;
- 3) выбор параметров пристрелки и их локализация;
- 4) выбор длин положительных и отрицательных подынтервалов пристрелки;
- 5) регулировка свойств замыкающей системы уравнений и ее оптимизация по числу уравнений;
- 6) организация итерационных процессов и их оптимизация, сведение исходной граничной задачи к совокупности задач Коши. Для решения задач Коши существует много хорошо разработанных методик [2].

Постановка задачи. Проследить за имеющимися закономерностями и возможностями метода множественной двусторонней пристрелки можно на примере решения граничной задачи, которая лежит в основе физической модели, описывающей процесс ограничения столба плазмы [1].

Математическая модель этой задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= k \operatorname{sh} k y_1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad k > 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 1. \quad (2)$$

В математической литературе эта задача подробно изучалась. В вычислительном отношении ее оценивают как достаточно сложную и трудную. Впервые она была поставлена Вейблом и Троешем и первоначально была связана с исследованием обжатия плазменного шнура давлением излучения. Из-за жестких ограничений ее решение не представляло особого интереса. Однако в последние годы специалисты по численным методам к ней стали проявлять значительный интерес. Это объясняется тем, что данная задача является хорошим тестом для

проверки методов решения неустойчивых нелинейных граничных задач. Задача вида (1), (2) получила название задачи Троеша [1].

Решение задачи Троеша. Проведем анализ задачи Троеша.

Матрица Якоби для системы полученных уравнений будет иметь вид

$$\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k^2 ch ky_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

При фиксированном времени матрица Якоби характеризуется собственными значениями

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm k \sqrt{ch ky_1(t)}.$$

Из последнего выражения следует, что

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm k, \quad \lambda_{1,2}(1) = \pm \sqrt{ch k}.$$

Если значения k небольшие, то небольшими будут и значения $\lambda_{1,2}(1)$. Однако, чем больше значение k , тем более сложным является характер поведения решения $y_1(t)$ и его производной $y_2(t)$.

Предлагаемый метод множественной двусторонней пристрелки состоит в следующем.

1. Выбираем точки пристрелки:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{2m-1} < t_{2m} = b.$$

Множественную пристрелку организуем таким образом, чтобы вычислительный процесс развивался в обоих направлениях.

2. Строим пристрелочные задачи Коши в прямом и обратном направлениях:

$$\begin{cases} u' = f(t, u), & t \in J_{2j-1}^{(+)} = \{t_{2j-1} \leq t \leq t_{2j}\}, \\ u(t, y_{2j-1})|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1}, & y_{2j-1} \in R^n, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} v' = f(t, v), & t \in J_{2j-1}^{(-)} = \{t_{2j-1} \geq t \geq t_{2j-2}\}, \\ v(t, y_{2j-1})|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1}, & y_{2j-1} \in R^n, j = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (4)$$

где t_{2j-1} – точки пристрелки; t_{2j} – точки сшива решений; y_{2j-1} – параметры пристрелки.

3. Для полученных пристрелочных задач Коши составляем замыкающую систему уравнений вида

$$\begin{cases} u(t_{2j}, y_{2j-1}) - v(t_{2j}, y_{2j-1}) = 0, & j = \overline{1, m}, \\ g(v(t_0, y_1), u(t_{2m}, y_{2m-1})) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

4. Переписываем замыкающую систему вида (5) в операторной форме

$$H(z) = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} H: R^N &\rightarrow R^N, \quad N = mn, \\ z &= (y_1^T, y_2^T, \dots, y_{2m-1}^T)^T. \end{aligned} \quad (7)$$

Свойства замыкающих систем уравнений (5), (6) зависят от правой части f , исходного уравнения, формы граничных условий, области интегрирования $[a, b]$, точек пристрелки $u(t, y_{2j-1})$ и траекторий пристрелки $u(t, y_{2j-1}), v(t, y_{2j-1})$. Эти свойства наиболее полно характеризуются матрицами Якоби для соответствующих отображений H .

Пусть $y(t)$ – искомое решение исходной граничной задачи. Введем обозначения

$$y_{2j-1}^* = y(t_{2j-1}), \quad z^* = (y_1^{*T}, \dots, y_{2m-1}^{*T})^T. \quad (8)$$

Пусть известны приближения k -го номера к истинным значениям параметров пристрелки

$$y_1^{(k)} = \begin{bmatrix} y_{11}^{(k)} \\ y_{21}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad y_3^{(k)} = \begin{bmatrix} y_{13}^{(k)} \\ y_{23}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Тогда будет выполняться замыкающая система вида

$$\begin{aligned} u_1(t^{(0)}, y_1^{(k)}) &= 0, \\ v_1(t^{(2)}, y_1^{(k)}) - u_1(t^{(2)}, y_3^{(k)}) &= 0, \\ v_2(t^{(2)}, y_1^{(k)}) - u_2(t^{(2)}, y_3^{(k)}) &= 0, \\ u_1(t^{(4)}, y_3^{(k)}) - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Или в операторной форме она примет следующий вид:

$$H(z^{(k)}) = 0,$$

где

$$z^{(k)} = (y_{11}^{(k)}, y_{21}^{(k)}, y_{13}^{(k)}, y_{21}^{(k)})^T.$$

5. Теперь искомое решение $y(t)$ исходной граничной задачи представляем формулой

$$y(t) = \begin{cases} v(t, y_{2j-1}^*), & t \in J_{2j-1}^{(-)}, \\ u(t, y_{2j-1}^*), & t \in J_{2j-1}^{(+)}, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (9)$$

В случае прямого направления матрицы-блоки для пристрелочных задач Коши будут иметь вид

$$\begin{cases} U'_{2j-1}(t) = \Phi_{2j-1}(u) U_{2j-1}(t), \\ U_{2j-1}(t_{2j-1}) = I, & t \in J_{2j-1}^{(+)}, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \Phi_{2j-1}(u) = \frac{\partial f(t, u(t, y_{2j-1}))}{\partial u}, \\ U_{2j-1}(t) = \frac{\partial u(t, y_{2j-1})}{\partial u}. \end{cases} \quad (11)$$

Аналогичным образом получаем матрицы-блоки для пристрелочных задач Коши, решаемых в обратном направлении:

$$\begin{cases} V'_{2j-1}(t) = \Phi_{2j-1}(v) V_{2j-1}(t), \\ V_{2j-1}(t_{2j-1}) = I, & t \in J_{2j-1}^{(-)}, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_{2j-1}(v) &= \frac{\partial f(t, v(t, y_{2j-1}))}{\partial v}, \\ V_{2j-1}(t) &= \frac{\partial v(t, y_{2j-1})}{\partial y_{2j-1}}, \quad j = \overline{1, m},\end{aligned}\quad (13)$$

причем

$$\begin{cases} U_{2j-1}^{(2j)} = U_{2j-1}(t_{2j}), \\ V_{2j-1}^{(2j-2)} = V_{2j-1}(t_{2j-2}). \end{cases}\quad (14)$$

Будем считать, что для решения замыкающей системы уравнений используется модифицированный метод Ньютона, основанный на аппроксимации матрицы Якоби. Кратко изложим его алгоритм.

$$1. \quad \frac{\partial H(z^{(k)})}{\partial z} \Delta z^{(k)} = (-H(z^{(k)})). \quad (15)$$

2. Построим последовательные приближения

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \Delta z^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

3. Найдем поправки $\Delta z^{(k)}$ в методе Ньютона:

$$\Delta z^{(k)} = (\Delta z_1^{(k)T}, \Delta z_3^{(k)T}, \dots, \Delta z_{2m-1}^{(k)T})^T, \quad (17)$$

где

$$H = (h_1^{(k)}, h_3^{(k)}, \dots, h_m^{(k)})^T, \quad h_i^{(k)} = h_i(z^{(k)}).$$

Для замыкающей системы уравнений в задаче Троеша конкретизируем матрицу Якоби и запишем ее в следующем виде:

$$\frac{\partial H(z^{(k)})}{\partial z} = \begin{bmatrix} \Phi_2^{(k)} & -\Omega_2^{(k)} \\ G_1^{(k)} & G_3^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Введем обозначения $H_0 = (\partial H(z^{(0)})) / \partial z$ и образуем матрицу $B = H_0^T H_0$.

Вычислим числа обусловленности матрицы H_0 . Для этого определим с начала верхнюю и нижнюю грани матрицы B :

$$z^{(k+1)} = B \left(\frac{z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|} \right),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, z^{(k)} \in R^4.$$

Верхнюю границу $\beta(B)$ матрицы B найдем по правилу

$$\beta(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|z^{(k)}\|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}C &= \beta(B)E - B, \quad \omega^{(k)} \in R^4, \\ \beta(C) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|\omega^{(k)}\|.\end{aligned}\quad (18)$$

Определим нижнюю границу $\alpha(B)$ матрицы B

$$\alpha(B) = \beta(B) - \beta(C).$$

Итерации векторов $z^{(k)}$ и $w^{(k)}$ проводились до тех пор, пока не достигалась точность:

$$\|z^{(s+1)}\| - \|z^{(s)}\| \leq \frac{1}{2} 10^{-5},$$

$$\|\omega^{(p+1)}\| - \|\omega^{(p)}\| \leq \frac{1}{2} 10^{-5}.$$

Искомое значение чисел обусловленности вычислим по формуле

$$v(H_0) = \sqrt{\frac{\beta(B)}{\alpha(B)}}.$$

Методы решения задач Коши, предназначенные для определения блоков $U_{2j-1}^{(2j)}$ и $V_{2j-1}^{(2j)}$, можно видоизменять таким образом, чтобы свойства, характеризующие метод Ньютона, сохранялись.

Заключение. Предложенная методика позволяет решать широкие классы граничных задач с пограничным слоем и при этом уменьшает те вычислительные трудности, которые присущи традиционным методикам. Система уравнений вида (5) не будет изменяться также в случае неравномерности выбранной сетки. На систему не окажет особого влияния и перемена методов решения задач Коши. А для решения задач Коши в настоящее время существует достаточно большой арсенал хорошо разработанных методик [2].

Литература

1. Холл, Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Д. Холл, Д. Уатт; пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
2. Деккер, К. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер; пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 200 с.

УДК 531.19

Р. Н. Ласовский, ассистент; Г. С. Бокун, доцент; В. С. Вихренко, профессор

КИНЕТИКА ФАЗОВЫХ РАССЛОЕНИЙ В РЕШЕТОЧНЫХ ФЛЮИДАХ

The equations which describe phase layering kinetics in the 2D and 3D lattice fluids are obtained. The evolution of the system with step-like initial concentration distribution is investigated. It is shown that the second condense area appears in the 2D system during evolution. This area disappears with time. The inoculating area critical size is determined. Several complementary condense areas origin in 3D system is observed. Number of areas depends on initial conditions. However, as opposed to 2D system, phase layering in 3D system takes place with any nucleator size.

Введение. Описание неоднородных неравновесных состояний систем многих частиц и сопутствующих им процессов является одной из наиболее сложных и важных проблем статистической механики. Процесс зарождения новой фазы, структурные превращения в системе относятся к числу вышеотмеченных проблем, и их рассмотрению посвящено много работ [1–4], использующих, как правило, классическую теорию нуклеации или прямое компьютерное моделирование и относящихся, в основном, к жидкостям и газам.

Возможность проявления фазовых переходов в электрохимических процессах существенно усложняет их анализ ввиду наличия в этом случае больших градиентов плотности. Это затрудняет определение различных кинетических параметров (например, коэффициентов диффузии), необходимых для понимания закономерностей этих процессов и возможности их практического применения [5–7].

Разработка кинетических методов, позволяющих в равной мере рассматривать как области, включающие большие градиенты концентрации, так и диффузионные зоны, в которых могут использоваться уравнения диффузионного типа, является важной задачей электрохимических исследований. Ее полное решение связано с преодолением ряда специфических трудностей, что приводит к необходимости рассмотрения упрощенных моделей, одной из которых является модель решеточного флюида.

Эта модель используется в тех случаях, когда рассматриваемая система может быть представлена двумя подсистемами: относительно жесткой несущей подсистемой, создающей некоторый потенциальный рельеф, и подсистемой лабильных частиц. Примерами таких систем являются водород в металлах [8], литий в оксидах металлов [9] или в углеродных матрицах [10].

1. Дифференциально-разностное уравнение кинетики межфазной границы. Как показано в работе [11], эволюцию плотности частиц

интеркалянта можно описать уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho_{1i}}{\partial t} = \sum_{j \neq i}^z \langle I_{ij} \rangle, \quad (1)$$

где суммирование ведется по всем первым соседям узла i .

Средний поток через границу между узлами i и j в уравнении (1) определяется следующим выражением:

$$\langle I_{ij} \rangle = w_0 F(0_i, 0_j) (e^{\beta \mu_j} - e^{\beta \mu_i}), \quad (2)$$

где w_0 – частота перескоков частицы в пределе низких концентраций; $F(0_i, 0_j)$ – неравновесная функция распределения, определяющая вероятность того, что ближайшие соседние узлы i и j вакантны; $\beta = (k_B T)^{-1}$ – обратная температура; k_B – постоянная Больцмана; μ_i – локальное значение химического потенциала, отнесенное к узлу i .

Бинарная функция распределения имеет вид

$$F(0_i, 0_j) = \frac{\rho_{0i} \rho_{0j}}{\chi_j(0_i) \chi_j(0_j)}, \quad (3)$$

где ρ_{0i} – концентрация вакансий в i -м узле.

Химический потенциал определим выражением

$$e^{\beta \mu_i} = \frac{\rho_{1i}}{\rho_{0i}} \prod_{j \neq i}^z \eta_{ji}, \quad (4)$$

где ρ_{1i} и ρ_{0i} – концентрация частиц или вакансий в i -м узле соответственно; η_{ji} – величина, рассчитываемая как положительный корень уравнения

$$\eta_{ji}^2 + \eta_{ji} \frac{\rho_{1i} - \rho_{0j} - W(\rho_{1j} - \rho_{1i})}{\rho_{0i}} - \frac{W \rho_{1i}}{\rho_{0i}} = 0, \quad (5)$$

в котором $W = \exp(-\beta J)$, J – энергия взаимодействия ближайших соседей.

Таким образом, для заданного начального распределения плотности частиц ρ_{1i} по уравнению (3) находится неравновесная бинарная функция распределения, а затем с помощью выражения (4) вычисляется химический потенциал. Далее рассчитывается поток (2) между узлами и с помощью уравнения неразрывности (1) – производная плотности числа частиц по времени. Последующее использование алгоритма Эйлера позволяет проинтегрировать по времени уравнение (1) и исследовать кинетику плотности частиц интеркалянта при различных условиях.

2. Результаты вычислений и их обсуждение. На рис. 1 показана эволюция системы, в которой начальное распределение концентрации является ступенчатым (на краях решетки задана концентрация, которая выше равновесной концентрации разреженной фазы, а в центре решетки – концентрация ниже конденсированной фазы) и служит «затравкой» для зарождения жидкой фазы. Начальная плотность соответствует неустойчивому состоянию при температуре ниже критической.

При решении системы кинетических уравнений приняты периодические граничные условия.

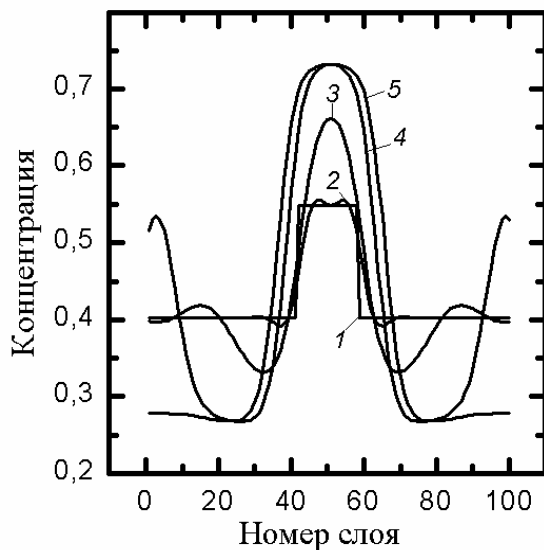


Рис. 1. Зарождение конденсированной фазы в двухмерной системе. Время указано в шагах алгоритма Эйлера:
 1 – 0; 2 – $5 \cdot 10^3$; 3 – $5 \cdot 10^5$;
 4 – $2,5 \cdot 10^6$; 5 – $5 \cdot 10^6$

Через некоторое время концентрация в области ступеньки начинает расти, постепенно достигая концентрации жидкой фазы, а сама ступенька уширяется, чтобы обеспечить условие сохранения числа частиц при расслоении на конденсированную и разреженную фазы.

Кроме того, на временах, соответствующих $\approx 10^4$ шагам алгоритма Эйлера, зарождается

вторая область на границе ячейки, в которой до $\approx 2,5 \cdot 10^5$ шагов концентрация постепенно увеличивается. Это явление обусловлено конкуренцией межчастичного притяжения, термоактивационного механизма перемещения частиц и наличия вакансий. Однако центральная часть с течением времени продолжает доминировать, и система расслаивается на две четко выраженные фазы, разделенные переходными слоями, концентрации в которых соответствуют равновесным.

Следует также отметить, что существует критический размер «затравочной» области. Если ее ширина меньше двух ширин переходного слоя ($\approx 16-20$ слоев решетки), то она со временем «рассасывается» и концентрация становится одинаковой во всей системе, т. е. система приходит к метастабильному состоянию (переохлажденный пар). Кроме того, при концентрации «затравочной» области, не сильно отличающейся от концентрации остальной части, вторая область с высокой концентрацией, описанная выше, не исчезает спустя некоторое время. Также при температурах выше критической, как и следовало ожидать, фазовое расслоение не наблюдается.

На рис. 2 показана кинетика распределения концентрационного поля в трехмерной системе, в которой начальное распределение также имеет ступенчатую «затравку» в центре. Неоднородность концентрации задавалась в двух измерениях и в вертикальном направлении удерживалась постоянной. В горизонтальной плоскости использовались периодические граничные условия.

Через $\approx 6 \cdot 10^4$ шагов в системе начинают появляться восемь конденсированных областей на гранях системы и одна диагональная. Концентрация в этих областях растет до $\approx 9 \cdot 10^4$ шагов, потом к $\approx 2 \cdot 10^5$ шагам области на гранях, притягиваясь попарно друг к другу, сливаются и образуют четыре пика, которые исчезают к $\approx 2,5 \cdot 10^5$ шагам. Механизм этого процесса схож с вышеописанным механизмом, происходящим в двухмерной системе. Таким образом, в системе остаются две конденсированные фазы: центральная и диагональная.

Отметим, что появление диагональной конденсированной области и областей на гранях, равно как и их количество, также как и в двухмерной системе, зависит от начальных условий (размера и величины «затравки», температуры). Однако в отличие от двухмерной системы фазовое расслоение происходит при любом размере «затравочной» области.

Заключение. Таким образом, с помощью уравнения непрерывности получены выражения для описания кинетики фазовых расслоений в двух- и трехмерных решеточных флюидах.

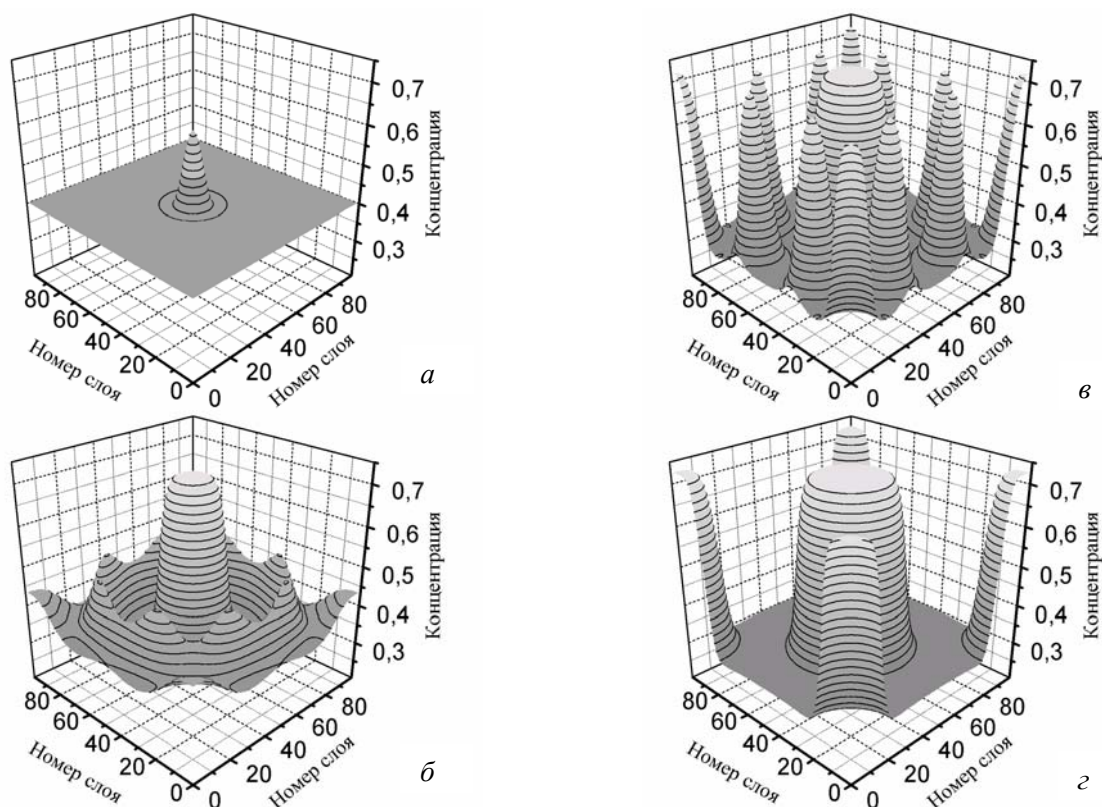


Рис. 2. Зарождение конденсированной фазы в трехмерной системе.

Время указано в шагах алгоритма Эйлера:

$a - 10^3$; $б - 6 \cdot 10^4$; $в - 9 \cdot 10^4$; $з - 2,5 \cdot 10^5$

Показано появление дополнительных конденсированных областей в обоих случаях. Отмечено, что в трехмерной системе, в отличие от двухмерной, фазовое расслоение происходит при любом размере «затравки».

Литература

1. Hohenberg, P. C. Theory of dynamic critical phenomena / P. C. Hohenberg, B. J. Halperin // *Rev. Mod. Phys.* – 1977. – Vol. 49, № 3. – P. 435–479.
2. Bray, A. J. Theory of phase-ordering kinetics / A. J. Bray // *Adv. Phys.* – 1994. – Vol. 43, № 3. – P. 357–459.
3. Gunton, J. D. Homogeneous Nucleation / J. D. Gunton // *J. Stat. Phys.* – 1999. – Vol. 95, № 5/6. – P. 903–923.
4. Toxvaerd, S. Molecular-dynamics simulation of homogeneous nucleation in the vapor phase / S. Toxvaerd // *J. Chem. Phys.* – 2001. – Vol. 115, № 19. – P. 8913–8920.
5. Vorotyntsev, M. A. Short-range electronion interaction effects in charging the electroactive polymer films / M. A. Vorotyntsev, J. P. Badiali // *Electrochim. Acta.* – 1994. – Vol. 39, № 2. – P. 289–292.
6. Levi, M. D. Frumkin intercalation isotherm – a tool for the description of lithium inser-

tion into host materials: a review / M. D. Levi, D. Aurbach // *Electrochim. Acta.* – 1999. – Vol. 45, № 1/2. – P. 167–185.

7. Nauman, E. B. Nonlinear diffusion and phase separation / E. B. Nauman, D. Q. He // *Chem. Eng. Sci.* – 2001. – Vol. 56, № 6. – P. 1999–2018.

8. Modelling of phase equilibria in metal – hydrogen systems / M. V. Lototsky [et al.] // *J. Alloys and Comp.* – 2003. – Vol. 356/357. – P. 27–31.

9. Strömme, M. Li insertion into WO_3 : introduction of a new electrochemical analysis method and comparison with impedance spectroscopy and the galvanostatic intermittent titration technique / M. Strömme // *Solid State Ionics.* – 2000. – Vol. 131, № 3/4. – P. 261–273.

10. Analysis of layered structures of lithium – graphite intercalation compounds by one-dimensional Rietveld method / T. Yao [et al.] // *Solid State Ionics.* – 2004. – Vol. 175, № 1/4. – P. 199–202.

11. Ласовский, Р. Н. Эволюция межфазной границы решеточной системы в приближении среднего поля и квазихимическом приближении / Р. Н. Ласовский, Г. С. Бокун // *Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ.* – 2008. – Вып. XVI. – С. 39–41.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

The nonlinear integral equation for a simple liquid received earlier is applied in the modified form to the system of charged particles. The equivalent transformation of the equation is performed. As a result the long-distance Coulomb interaction has equivalently replaced by the short range potential of the Debye – Huckel type thus removing the potential divergence of integrals.

Введение. Трудности описания равновесных систем заряженных частиц связаны в первую очередь, как известно, с дальнедействующим характером межчастичного взаимодействия. В случае разреженных сред удается устранить обусловленные кулоновским потенциалом расходимости с помощью специфических разложений функций распределения по плазменному параметру [1], либо суммированием определенного класса диаграмм [2]. Экранирование кулоновского взаимодействия проявляется также при использовании для вычисления конфигурационного интеграла коллективных переменных [3], однако вычисление появляющегося при этом якобиана преобразования опять связано со своеобразными групповыми разложениями [4].

В данной работе предлагается подход к описанию упомянутых систем без предположения о наличии малого параметра.

Устранение расходимости. Рассмотрим простейший вариант однокомпонентной плазмы на однородном компенсирующем фоне, что необходимо для обеспечения электронейтральности такой системы. Ранее в [5] были предложены замкнутые уравнения для описания простой жидкости. В самом младшем приближении, когда полагаются равными нулю неприводимые части всех потенциалов средних сил выше второго, уравнение имеет вид

$$\omega(r) = -\rho \int d^3s h(s) h(|\mathbf{r} - \mathbf{s}|). \quad (1)$$

Здесь ω – безразмерная неприводимая часть двухчастичного потенциала средних сил: безразмерность всех потенциалов достигается умножением на $\beta = 1/k_B T$, где k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура; $\rho = N/V$ – плотность; N – число частиц, V – объем системы;

$$h(s) = \exp[-\Phi(s) - \omega(s)] - 1, \quad (2)$$

$$\Phi(s) = \frac{\beta e^2}{s} - \quad (3)$$

потенциал кулоновского взаимодействия; e – заряд частиц; s – расстояние между их центрами масс.

Интегрирование в (1) ведется по всему пространству. Функция (2) позволяет вычислить одночастичный потенциал средних сил [5]:

$$\phi = -\frac{\rho}{2} \int d^3s h(s), \quad (4)$$

который определяет конфигурационный интеграл системы

$$Q_N = (V \exp(-\phi))^N; \quad (5)$$

от пространственных переменных ϕ не зависит.

Корреляционная функция, определяемая выражением (2), содержит дальнедействующий кулоновский потенциал (3). Поэтому обеспечение правильного поведения на бесконечности бинарной функции и, следовательно, само существование интеграла в правой части (1) и термодинамических величин, которые через нее выражаются, возможно лишь в том случае, когда сумма кулоновской части и потенциала средних сил будет короткодействующей. Введем для нее обозначение $\Omega = \Phi + \omega$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\Omega(r) = \Phi(r) - \rho \int d^3s h(s) h(|\mathbf{r} - \mathbf{s}|). \quad (6)$$

Прибавим к обеим частям этого уравнения одинаковые выражения:

$$\begin{aligned} \Omega(r) + \rho \int d^3s \Phi(s) \Omega(|\mathbf{r} - \mathbf{s}|) &= \Phi(r) + \\ + \rho \int d^3s \Phi(s) \Omega(|\mathbf{r} - \mathbf{s}|) - \rho \int d^3s h(s) (|\mathbf{r} - \mathbf{s}|). \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь можно воспользоваться тем обстоятельством, что все интегралы в (7) являются свертками двух функций по пространственным переменным. Это дает возможность осуществить преобразование Фурье обеих частей (7). Определив преобразование Фурье соотношением

$$\tilde{\Omega}(k) = \int d^3r \Omega(r) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (8)$$

получим:

$$\tilde{\Omega} + \rho \tilde{\Phi} \tilde{\Omega} = \tilde{\Phi} + \rho \tilde{\Phi} \tilde{\Omega} - \rho \tilde{h}^2. \quad (9)$$

Для сокращения записи здесь не указана зависимость Фурье-образов от модуля волнового вектора k .

Из (9) следует:

$$\tilde{\Omega} = \frac{\tilde{\Phi}}{1 + \rho \tilde{\Phi}} + \rho \frac{\tilde{\Phi} \tilde{\Omega} - \tilde{h}^2}{1 + \rho \tilde{\Phi}}. \quad (10)$$

В развернутой форме при учете явного выражения Фурье-образа кулоновского потенциала

$$\tilde{\Phi}(k) = \frac{4\pi\beta e^2}{k^2} \quad (11)$$

уравнение (10) приобретает следующий вид:

$$\tilde{\Omega}(k) = \frac{\kappa^2}{\rho(k^2 + \kappa^2)} + \frac{\kappa^2 \tilde{\Omega}(k) - \rho k^2 \tilde{h}^2(k)}{k^2 + \kappa^2}, \quad (12)$$

где $\kappa^2 = 4\pi\beta\rho e^2$ – дебаевский параметр.

Далее необходимо выполнить обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} \Omega(r) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \tilde{\Omega}(k) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 i r} \int_{-\infty}^{\infty} dk k \tilde{\Omega}(k) \exp(ikr), \end{aligned} \quad (13)$$

для осуществимости которого необходимо выполнение условия $k\tilde{\Omega}(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Правая часть (12) выглядит как отношение полиномов различных степеней по k , причем коэффициенты числителя во второй дроби сами являются функциями этой переменной. В самом неблагоприятном случае они могут вести себя как Фурье-образ кулоновского взаимодействия, т. е. могут быть $O(k^{-2})$, и поэтому указанное выше требование выполняется.

Нули знаменателей в (12) $k = \pm i\kappa$ определяют значение интеграла (13), т. е. все особые точки подынтегральных функций, являющиеся простыми полюсами, расположены на мнимой оси. Замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости комплексной переменной k , получим следующее выражение для оригинала первого слагаемого в правой части (12):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2 i r} \int_{-\infty}^{\infty} dk k \frac{\kappa^2}{\rho(k^2 + \kappa^2)} e^{ikr} = \\ = \frac{2\beta e^2}{r} \lim_{k \rightarrow i\kappa} \frac{k(k - i\kappa)}{k^2 + \kappa^2} e^{ikr} = \beta e^2 \frac{e^{-\kappa r}}{r}. \end{aligned} \quad (14)$$

Оно соответствует дебай-хюккелевскому приближению для парной функции распределения во всех подходах в [1–4]. Оригиналы остальных слагаемых (12) представляют собой свертки Ω и h с этой функцией, поэтому в итоге получается интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \Omega(r) &= \beta e^2 \frac{e^{-\kappa r}}{r} + \beta e^2 \rho \int d^3s \frac{e^{-\kappa s}}{s} \Omega(|\mathbf{r} - \mathbf{s}|) - \\ &- \frac{\rho}{4\pi} \int d^3s_1 \int d^3s_2 \frac{e^{-\kappa s_1}}{s_1} H(s_2) H(|\mathbf{r} - \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2|), \end{aligned} \quad (15)$$

эквивалентное исходному уравнению (6), но содержащее лишь экранированное кулоновское взаимодействие. Здесь

$$H(s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k k \tilde{h}(k) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (16)$$

Этот результат не является специфической особенностью приближения (1). В любых приближениях более высокого порядка вместо (6) фигурирует уравнение

$$\begin{aligned} \Omega(r) &= \Phi(r) - \rho \int d^3s h(s) h(|\mathbf{r} - \mathbf{s}|) - \\ &- \rho \int d^3s g(s) g(|\mathbf{r} - \mathbf{s}|) \eta_3(r, s, |\mathbf{r} - \mathbf{s}|), \end{aligned} \quad (17)$$

где $g = h + 1$, $\eta_3 = \exp(-\omega_3) - 1$, ω_3 – неприводимая часть трехчастичного потенциала средних сил; уравнение для него содержит лишь функции g , η_3 и η_4 .

Структура этого уравнения свидетельствует о том, что и из него с помощью описанного выше преобразования можно исключить дальнедействующий кулоновский потенциал. Следует отметить, что соотношения (4), (5) сохраняют свой вид в любом приближении.

С другой стороны, в работе [6] без каких-либо приближений была получена замкнутая система интегральных уравнений, одним из которых как раз и является (17), а остальные не содержат потенциал взаимодействия в явном виде.

Таким образом, можно утверждать, что экранирование кулоновского взаимодействия является совершенно общим результатом.

Фактическое нахождение величин Ω связано с необходимостью решения нелинейного интегрального уравнения и может быть реализовано только численно. Проведенные расчеты показали, что Ω действительно убывает быстрее обратной третьей степени расстояния. Это отражено на рис. 1.

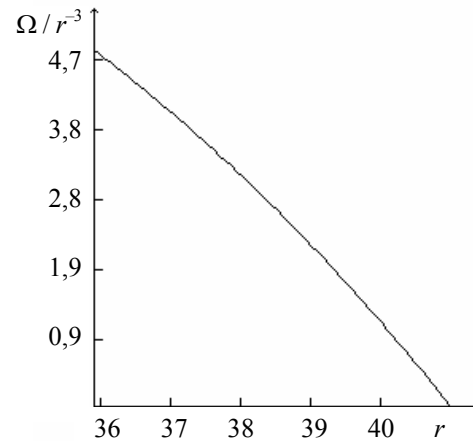


Рис. 1. Поведение Ω/r^3 на больших расстояниях

На рис. 2 и 3 представлено сопоставление полученных в данной работе данных (кривые 2) с приближением Дебая – Хюккеля (кривые 1), которому соответствует первое слагаемое в правой части (15), при различных плотностях. Видно, что с ростом плотности различия увеличиваются.

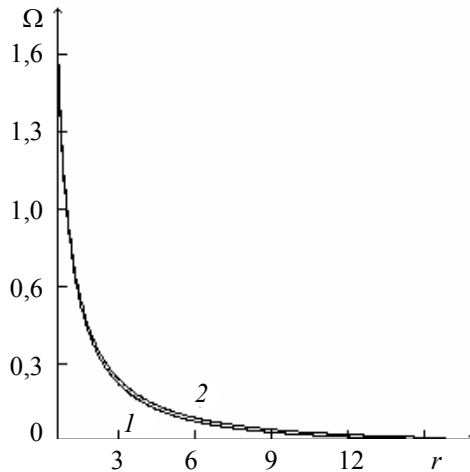


Рис. 2. Сопоставление рассчитанной величины Ω с приближением Дебая – Хюккеля при $\rho = 0,001$:
1 – приближение Дебая – Хюккеля;
2 – данная работа

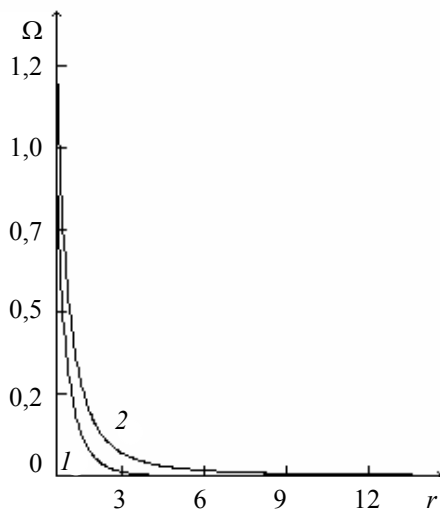


Рис. 3. Сопоставление рассчитанной величины Ω с приближением Дебая – Хюккеля при $\rho = 0,1$:
1 – приближение Дебая – Хюккеля;
2 – данная работа

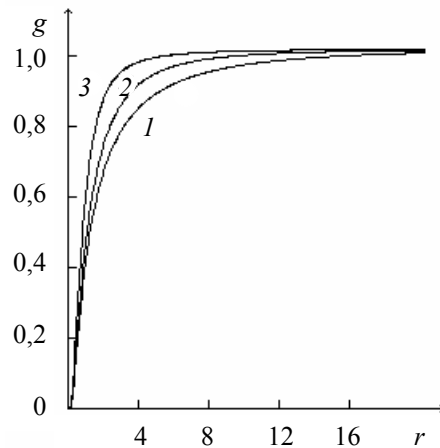


Рис. 4. Радиальная функция распределения при различных плотностях:
1 – $\rho = 0,001$; 2 – $\rho = 0,01$; 3 – $\rho = 0,1$

На рис. 4 представлены радиальные функции при различных плотностях.

Заклучение. В нелинейном интегральном уравнении для простой жидкости путем эквивалентного преобразования устранены потенциальные расходимости, характерные для систем заряженных частиц.

Литература

1. Боголюбов, Н. Н. Избранные труды: в 3 т. / Н. Н. Боголюбов. – Киев: Наукова думка, 1970. – Т. 2. – 520 с.
2. Майер, Дж. Статистическая механика / Дж. Майер, М. Гепперт-Майер. – М.: Мир, 1980. – 544 с.
3. Зубарев, Д. Н. Вычисление конфигурационных интегралов для систем частиц с кулоновским взаимодействием / Д. Н. Зубарев // Докл. акад. наук СССР. – 1954. – Т. ХСV, № 4. – С. 757–760.
4. Юхновский, И. Р. Статистическая теория классических равновесных систем / И. Р. Юхновский, М. Ф. Головка. – Киев: Наукова думка, 1980. – 372 с.
5. Белов, В. В. Новые интегральные уравнения для простых жидкостей / В. В. Белов // Докл. акад. наук БССР. – 1988. – Т. 32, № 2. – С. 116–119.
6. Белов, В. В. Замкнутые уравнения в статистической механике жидкости / В. В. Белов // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2008. – Вып. XVI. – С. 29–31.

В. В. Белов, доцент; В. Б. Немцов, профессор

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЭЛАСТОМЕРОВ

By calculation of configuration integral for system, which elements can be in two condition, at the description of interaction in approach of an average field the statistical description of an elastic stretching elastomer is given at the large deformations.

Введение. Построение моделей деформирования нематических эластомеров представляет собой актуальную и сложную задачу в связи с существенно нелинейными особенностями их поведения при растяжении. При решении этой задачи весьма эффективным оказался статистический подход, в рамках которого эластомер представляется в виде цепочки, образованной N одномерными элементами, каждый из которых может находиться в одном из двух состояний.

В первом случае он имеет длину b_1 , а во втором – b_2 . К обоим концам молекулы приложены одинаковые по величине и противоположно направленные силы \mathbf{F} . Пусть N_1 элементов находятся в первом состоянии и N_2 элементов – во втором, так что их полное число равно $N = N_1 + N_2$, а длина цепочки – $L = N_1 b_1 + N_2 b_2$.

Эластомер как двухкомпонентная система. Вероятность обнаружения системы, находящейся во внешнем однородном поле силы \mathbf{F} , в одном из состояний, характеризуемых числами N_1 и N_2 , имеет вид

$$W = (N_1, N_2, q) = Q_N^{-1} \exp\{-\beta[U(q) - N_1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}_1 - N_2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}_2]\}. \quad (1)$$

Здесь $\beta = 1/k_B T$; k_B – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура; U – потенциальная энергия системы; q – совокупность обобщенных координат, определяющих конфигурацию элементов.

Число состояний, имеющих одни и те же значения N_1 и N_2 , равно числу способов, которыми оба состояния могут быть распределены среди N элементов, т. е. равно $N! / N_1! N_2!$. В соответствии с этим нормировочный множитель определяется формулой

$$Q_N = \sum_{N_1=0}^N \frac{N!}{N_1! N_2!} \int dq \exp\{-\beta[U(q) - N_1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}_1 - N_2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}_2]\}. \quad (2)$$

Среднее значение длины цепочки равно

$$\langle L \rangle = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln Q_N}{\partial F} \right)_{T, N}. \quad (3)$$

Для вычисления интеграла в (2) воспользуемся предложенной в работе [1] схемой описа-

ния многокомпонентных систем: рассматриваемая модель представляет собой двухсортную систему. Конфигурационный интеграл рассчитывается обычным образом:

$$Q(N_1, N_2) = \int_V d_1 \dots \int_V dN \exp(-\beta U). \quad (4)$$

Цифрами обозначены обобщенные координаты элементов, а через V – соответствующий объем. Пронумеруем элементы системы так, чтобы номера от 1 до N_1 соответствовали частицам 1-го сорта, а от $N_1 + 1$ до $N_1 + N_2$ – 2-го. Тогда конфигурационный интеграл (4) можно представить в виде (греческие символы обозначают сорта частиц)

$$Q(N_1, N_2) = \prod_{\lambda} \prod_{i_{\lambda}} \int d i_{\lambda} \exp(-\beta U). \quad (5)$$

Если ввести частичные функции распределения для такой системы

$$f_{\mu}(i) = \prod_{i_{\mu} \neq i} \int d i_{\mu} \prod_{\lambda \neq \mu} \prod_{i_{\lambda}} \int d i_{\lambda} \exp(-\beta U), \quad (6)$$

то окажется, что конфигурационный интеграл (5) можно выразить через них

$$Q(N_1, N_2) = \int_V d i f_{\mu}(i) \quad (7)$$

независимо от сортов частиц, по координатам которых выполняется интегрирование.

Выбрав соответствующие обезразмеривающие множители, представим введенные функции распределения в экспоненциальной форме. Из выражения (6) следует, что функция $f_{\mu}(i)$ имеет размерность объема в степени $N - 1$. Поскольку $(N - 1)$ – кратное интегрирование в (6) состоит из $N_{\mu} - 1$ интегрирований по частицам сорта μ и N_{λ} интегрирований по всем остальным, выберем указанный множитель в виде

$$\left(Q_{\mu}^{N_{\mu}-1} \prod_{\lambda \neq \mu} Q_{\lambda}^{N_{\lambda}} \right)^{-1},$$

где величины Q_{λ} имеют размерность объема. Тогда можно написать

$$f_{\mu}(i) = Q_{\mu}^{-1} \prod_{\lambda} Q_{\lambda}^{N_{\lambda}} \exp[-\beta \varphi_{\mu}(i)], \quad (8)$$

где

$$\exp[-\beta\varphi_\mu(i)] = \left(Q_\mu^{-1} \prod_\sigma Q_\sigma^{N_\sigma} \right)^{-1} \times \prod_{i_\mu \neq i} \int di_\mu \prod_{\lambda \neq \mu} \prod_{i_\lambda} \int di_\lambda \exp(-\beta U). \quad (9)$$

Величина $\varphi_\mu(i)$ имеет смысл потенциала средней силы, действующей на данную частицу со стороны всех остальных.

Подставив (8) в (7), получим

$$Q(N_1, N_2) = Q_\mu^{-1} \prod_\lambda Q_\lambda^{N_\lambda} \int_V di \exp[-\beta\varphi_\mu(i)]. \quad (10)$$

Поскольку последнее выражение должно быть справедливым для любого значения μ , в качестве Q_μ необходимо выбрать фигурирующий в (10) интеграл. Тогда

$$Q(N_1, N_2) = \prod_\lambda \left\{ \int_V di \exp[-\beta\varphi_\lambda(i)] \right\}^{N_\lambda}. \quad (11)$$

Применительно к рассматриваемой двух-сортной системе во внешнем поле последнее равенство приобретает вид

$$Q(N_1, N_2) = Q_1^{N_1} Q_2^{N_2}. \quad (12)$$

При этом

$$Q_1 = \int_V dq \exp\{-\beta[\varphi_1(q) - \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}_1]\}, \quad (13)$$

$$Q_2 = \int_V dq \exp\{-\beta[\varphi_2(q) - \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}_2]\}. \quad (14)$$

Формула (12) и определяет интеграл в (2), т. е.

$$Q_N = \sum_{N_1=0}^N \frac{N!}{N_1! N_2!} Q_1^{N_1} Q_2^{N_2} = (Q_1 + Q_2)^N. \quad (15)$$

Полученное выражение является точным, но проблема состоит в том, что введенные потенциалы средних сил неизвестны. Их определение связано с решением цепочки интегральных уравнений, объединяющей функции различных порядков, и, стало быть, с необходимостью использования того или иного способа замыкания этой цепочки.

В данной работе мы примем некоторые упрощающие предположения и физически оправданные соображения для отыскания этих величин. В качестве первого сделаем предположение, что все элементы эластомера находятся в самосогласованном среднем поле всех остальных. Далее будем считать, что первое состояние связано с ориентацией звеньев цепи и энергия его определяется формулой

$$U_1 = -\frac{3}{2} ap \cos^2 \vartheta, \quad (16)$$

где ϑ – угол между осью элемента и силой \mathbf{F} ; p – параметр порядка, определяемый как среднее значение второго полинома Лежандра:

$$p = \langle P_2(\vartheta) \rangle = \langle \frac{1}{2}(3 \cos^2 \vartheta - 1) \rangle; \quad (17)$$

a – энергетический параметр.

Отождествим эту энергию с потенциалом средних сил в состоянии типа 1, т. е.

$$\beta\varphi_1 = \beta U_1 = -\frac{3}{2} \beta ap \cos^2 \vartheta. \quad (18)$$

Тогда функция распределения по ориентациям примет вид

$$f_1(\vartheta) = Q_1^{-1} \exp[\beta(\mathbf{F} \cdot \mathbf{b}_1 - \varphi_1)] = Q \exp\left[\beta\left(Fb + \frac{3}{2} ap \cos \vartheta\right) \cos \vartheta\right], \quad (19)$$

где $b_0 = |\mathbf{b}_1|$ – длина элемента в недеформированном состоянии, а константа Q_1 равна

$$Q_1 = 2\pi b_0 \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \times \exp\left[\beta\left(Fb_0 + \frac{3}{2} ap \cos \vartheta\right) \cos \vartheta\right]. \quad (20)$$

Используя (17) и (19), получим уравнение для нахождения параметра порядка:

$$p = \pi b_0 \int_0^\pi (3 \cos^2 \vartheta - 1) f_1(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{\pi b_0}{Q_1} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta (3 \cos^2 \vartheta - 1) \times \exp\left[\beta\left(Fb_0 + \frac{3}{2} ap \cos \vartheta\right) \cos \vartheta\right]. \quad (21)$$

Далее будем считать, что второе состояние определяется деформацией (растяжением-сжатием) звеньев эластомера, энергия которой в линейном приближении задается следующим соотношением:

$$U_2 = \frac{1}{2} c(b - b_0)^2, \quad (22)$$

где b – длина мономера в деформированном состоянии.

Положим, что потенциал средней силы этого состояния равен энергии (22). Тогда функция распределения в этом состоянии будет иметь вид

$$f_2(b) = Q_2^{-1} \exp\left[\beta Fb - \frac{\beta c(b - b_0)^2}{2}\right], \quad (23)$$

где нормировочный множитель определяется следующим соотношением:

$$Q_2 = 4\pi \int db \exp \left[\beta F b - \frac{\beta c (b - b_0)^2}{2} \right]. \quad (24)$$

Из-за наличия в подынтегральной функции экспоненциально убывающего множителя пределы интегрирования в (24) можно считать бесконечными. Если ввести обозначения $\gamma = \beta F b_0$,

$$\alpha = \frac{\beta c b_0^2}{2}, \quad \varepsilon = \frac{b - b_0}{b_0}, \quad \text{то выражение (24) примет вид}$$

мет вид

$$Q_2 = 4\pi b_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp \left[\gamma \left(1 + \frac{\gamma}{4\alpha} \right) \right]. \quad (25)$$

Параметр α определим из условия $b_0 = \sqrt{\langle L^2 \rangle}$ при нулевой растягивающей силе, в результате чего $\alpha = \beta b_0^2 / 2$.

Подставив (15) в (3) с использованием (20) и (25), получим

$$\langle L \rangle = \frac{N (Q'_1 + Q'_2)}{\beta (Q_1 + Q_2)}, \quad (26)$$

$$Q'_1 = 2\pi\beta b_0^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta \times \exp \left[\left(\gamma + \frac{3}{2} a p \cos \vartheta \right) \cos \vartheta \right], \quad (27)$$

$$Q'_2 = 4\pi \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \beta b_0^2 \left(1 + \frac{\gamma}{2\alpha} \right) \exp \left[\gamma \left(1 + \frac{\gamma}{4\alpha} \right) \right]. \quad (28)$$

Штрихом здесь обозначена производная по F – величине растягивающей силы.

Подставив (20), (25), (27) и (28) в (26), можно рассчитать зависимость относительной средней длины, приходящейся на один элемент $l = \langle L \rangle / N b_0$, от растягивающего усилия F .

Расчеты проводились при значении параметров $a = 13,62$ Дж, $T = 300$ К, а результаты представлены на рисунке.

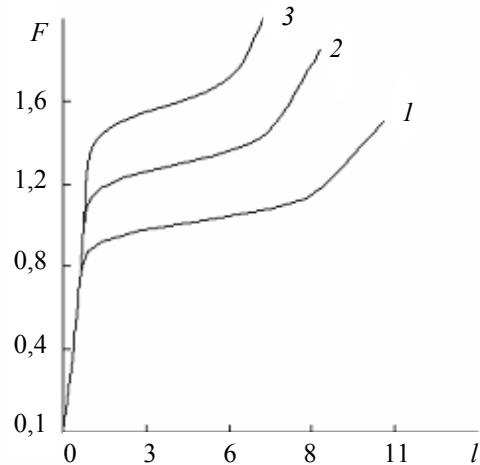


Рисунок. Кривые растяжения эластомера:
 $1 - b_0 = 4 \cdot 10^{-10}$ м; $2 - b_0 = 5 \cdot 10^{-10}$ м;
 $3 - b_0 = 6 \cdot 10^{-10}$ м

Заключение. На кривой растяжения имеется характерное плато, ширина которого существенно зависит от длины элемента в недеформированном состоянии b_0 : с уменьшением последнего плато расширяется при меньших значениях растягивающего усилия.

Полученные результаты находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными [2].

Литература

1. Белов, В. В. Новые интегральные уравнения для жидких смесей / В. В. Белов // Докл. акад. наук БССР. – 1988. – Т. 32, № 6. – С. 500–503.
2. Treloar, L. R. The mechanics of rubber elasticity / L. R. Treloar // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1976. – Vol. 351. – P. 3001–3030.

ТЕРМОДИФФУЗИЯ В ДВУХКОМПОНЕНТНОМ РЕШЕТОЧНОМ ФЛЮИДЕ

Statistical mechanical description of thermal diffusion in two-component lattice fluids is performed. Analytical expressions for thermal diffusion coefficients on square and simple cubic lattices are derived. The expressions reproduce the Monte Carlo simulation results with satisfactory accuracy that testify the theoretical principles and approximations used for their derivation.

Введение. Термодиффузия принадлежит к важному классу неравновесных процессов, который используется для разделения веществ, перераспределения компонентов смеси в пространстве, создания термоэлектродвижущей силы и т. п. Первые модельные вычисления коэффициентов термодиффузии были выполнены в середине прошлого столетия [1–4]. Обзор ранних работ по термодиффузии в твердых телах проведен в работе [5]. Термодинамические аспекты термодиффузии, ее связи с термоэлектрическими явлениями и тщательный анализ влияния электронной подсистемы твердых тел рассмотрены в работе [6]. Большое количество работ посвящено исследованию однокомпонентных систем [7–10]. Вместе с тем уже двухкомпонентные системы проявляют качественные отличия в равновесных свойствах и кинетическом поведении, присущие и произвольным многокомпонентным системам [11–13].

Целью работы является получение аналитических выражений для определения коэффициентов термодиффузии в двухкомпонентном решеточном флюиде и их сопоставление с результатами компьютерного моделирования по методу Монте-Карло [14, 15].

1. Статистико-механическое выражение для коэффициентов термодиффузии компонентов. Для статистико-механического рассмотрения термодиффузии в многокомпонентных решеточных флюидах запишем, согласно методу неравновесных ансамблей Зубарева [16], уравнения эволюции малых отклонений от состояния равновесия средних значений чисел заполнения компонентов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \delta n_i^\alpha \rangle}{\partial t} - \sum_{j=1}^N \sum_{\gamma} c_\alpha \Omega_{ij}^{\alpha\gamma} \delta(\beta_j \mu_j^\gamma) + \sum_{j=1}^N c_\alpha \Omega_{ij}^{\alpha T} \delta \beta_j + \\ + \sum_j \sum_\gamma \int_0^\infty \Theta_{ij}^{\alpha\gamma}(\tau) \delta[\beta_j \mu_j^\gamma(t-\tau)] d\tau - \\ - \sum_j \int_0^\infty \Theta_{ij}^{\alpha T}(\tau) \delta \beta_j(t-\tau) d\tau = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Omega_{ij}^{\alpha\gamma}$ и $\Theta_{ij}^{\alpha\gamma}(\tau)$ – матрицы статических корреляций и памяти соответственно, определяемые соотношениями

$$\Omega_{ij}^{\alpha\gamma} = c_\gamma^{-1} \langle \delta n_i^\alpha \delta n_j^\gamma \rangle = c_\gamma^{-1} \langle \dot{n}_i^\alpha n_j^\gamma \rangle, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{ij}^{\alpha\gamma}(\tau) &= (c_\alpha c_\gamma)^{-1/2} \langle Q \delta \dot{n}_i^\alpha \exp(\tau Q W Q) Q \delta \dot{n}_j^\gamma \rangle = \\ &= (c_\alpha c_\gamma)^{-1/2} \langle Q \delta \dot{n}_i^\alpha(0) Q \delta \dot{n}_j^\gamma(\tau) \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

включающими оператор эволюции W [14] и оператор $Q = 1 - P$, выражаемый через оператор проектирования P на пространство базовых переменных

$$P b_i^\alpha = \langle b_i^\alpha \rangle + \sum_{\gamma, \delta} \sum_{j,l} S_{ij}^{\alpha\gamma} \langle b_j^\gamma \delta n_l^\delta \rangle \delta n_l^\delta; \quad (4)$$

$\Theta_{ij}^{\alpha T}(\tau)$ – матрица памяти термодиффузионного процесса, характеризуемая соотношением, аналогичным уравнению (3) с заменой в последнем $\delta \dot{n}_j^\gamma$ на $\delta \dot{e}_j^\gamma$.

Основное кинетическое уравнение многокомпонентного решеточного флюида записывается в виде

$$\dot{n}_i^\alpha = \sum_{j \neq i} (w_{ij}^\alpha n_j^\alpha n_i^\gamma - w_{ji}^\alpha n_i^\alpha n_j^\gamma), \quad (5)$$

где числа заполнения $n_i^\alpha = 1$, если узел i занят частицей сорта α , и $n_i^\alpha = 0$ в противоположном случае; точка над символом означает производную по времени; n_i^γ – оператор вакансии в узле i , равный 1, если узел i не занят частицей, и 0 в противоположном случае:

$$n_i^\gamma = 1 - \sum_{\gamma} n_i^\gamma. \quad (6)$$

Вероятность перехода в единицу времени частицы сорта α из узла j в узел i определяется как

$$w_{ij}^\alpha = v_0^\alpha e^{\beta u_j^\alpha}, \quad (7)$$

где v_0^α – характеристическая частота колебаний частицы сорта α вблизи узла.

Матрица статических корреляций $\Omega_{ij}^{\alpha T}$, относящаяся к процессам термодиффузии, определяется средним значением произведения скорости изменения заселенности узла i и энергии e_j частиц на узле j :

$$\Omega_{ij}^{\alpha T} = c_\alpha^{-1} \langle \dot{n}_i^\alpha e_j \rangle, \quad (8)$$

$$e_j = \sum_{\gamma} u^\gamma n_j^\gamma + \frac{1}{2} \sum_{\gamma, \zeta} \sum_{k=1}^z J^{\gamma\zeta} n_j^\gamma n_k^\zeta, \quad (9)$$

где u^γ – энергия взаимодействия частиц γ -компонента с базовой системой; $J^{\gamma\zeta}$ – энергия

взаимодействия частиц компонентов γ и ζ , расположенных на ближайших узлах решетки.

Суммирование по k выполняется по ближайшим соседям узла j . Обобщение записанных соотношений на более сложные решетки с зависящими от положения узла энергиями u_j^γ и на системы с более далекими межчастичными взаимодействиями осуществляется добавлением соответствующих индексов и расширением области суммирования.

Для вычисления элементов матрицы $\Omega_{ij}^{\alpha T}$ после подстановки соотношения (5) и (9) в выражение (8) следует рассмотреть, как и в [14], две группы слагаемых.

Первая группа слагаемых определяется первым слагаемым правой части соотношения (9)

$$\sum_{\gamma} u^{\gamma} \langle \dot{n}_i^{\alpha} \dot{n}_j^{\gamma} \rangle = \sum_{\gamma} \sum_k u^{\gamma} \langle (w_{ik}^{\alpha} n_k^{\alpha} n_i^{\gamma} - w_{ki} n_i^{\alpha} n_k^{\gamma}) n_j^{\gamma} \rangle. \quad (10)$$

После учета алгебры чисел заполнения ($n_j^{\gamma} n_j^{\alpha} = n_j^{\alpha} \delta_{\alpha\gamma}$, $n_j^{\gamma} n_j^{\gamma} = 0$), а также выполнения операций, аналогичным проведенным при получении соотношения для однокомпонентных систем [14], находим

$$\sum_{\gamma} u^{\gamma} \langle \dot{n}_i^{\alpha} \dot{n}_j^{\gamma} \rangle = \frac{c_{\alpha} u^{\alpha} D_j^{\alpha\alpha}}{a^2}, \quad (11)$$

и соответствующее слагаемое в уравнении (1) примет вид

$$c_{\alpha} u^{\alpha} D_j^{\alpha} \Delta \beta. \quad (12)$$

Вторая группа слагаемых в уравнении (8) определяется вторым членом выражения (9), учитывающим межчастичные взаимодействия. Для вычисления соответствующих элементов матрицы $\Omega_{ij}^{\alpha T}$ необходимо рассмотреть те же диаграммы, которые были проанализированы в работе [14] с тем отличием, что в слагаемых, приводящих к функциям $F_1(0,0,1)$ и $F_2(0,0,1)$, должны быть учтены сорта частиц. В результате для коэффициента термодиффузии частиц сорта α на квадратной решетке получим выражение

$$D_{nT}^{\alpha} = -\frac{c_{\alpha} D_j^{\alpha}}{k_B T} \left\{ u_{\alpha} + \frac{2}{F(0,0)} \times \sum_{\gamma} J^{\alpha\gamma} [F_1(0,0,1_{\gamma}) + F_2(0,0,1_{\gamma})] \right\}, \quad (13)$$

тогда как для трехмерной системы на простой кубической решетке коэффициент перед F_2 будет равным 2. Функции $F_1(0,0,1_{\gamma})$ или $F_2(0,0,1_{\gamma})$ определяют вероятность того, что из трех соседних узлов линейной или угловой конфигурации два являются вакантными, а третий занят частицей γ -компонента.

Используя суперпозиционное приближение

$$F(0,0,1_{\gamma}) = c_{\gamma}^2 c_{\gamma} g(0,0) g(0,1_{\gamma}), \quad (14)$$

$$F(0,0) = c_{\gamma}^2 g(0,0), \quad (15)$$

$$F(0,1_{\gamma}) = c_{\gamma} c_{\gamma} g(0,1_{\gamma}), \quad (16)$$

для квадратной решетки получим

$$D_{nT}^{\alpha} \approx -\frac{c_{\alpha} D_j^{\alpha}}{k_B T} \left[u_{\alpha} + 4 \sum_{\gamma} c_{\gamma} J^{\alpha\gamma} g(0,1_{\gamma}) \right]. \quad (17)$$

Для простой кубической решетки коэффициент перед суммой в квадратных скобках уравнения (17) равен 6.

Таким образом, выражение в фигурных скобках соотношения (13) или в квадратных скобках формулы (17) определяет эффективную энергию переноса термодиффузии в решеточном флюиде.

2. Сопоставление аналитических выражений с результатами компьютерного моделирования по методу Монте-Карло. В работах [14, 15] была предложена методика определения коэффициентов термодиффузии в двухкомпонентном решеточном флюиде с межчастичным притяжением на основе компьютерного моделирования по методу Монте-Карло. Для возможности сопоставления представленных там результатов моделирования со значениями, даваемыми выражением (17), необходимы значения кинетических коэффициентов диффузии и коррелятивных функций при соответствующих значениях концентраций компонентов обоих сортов.

Значения концентрации компонентов c_A и c_B брались из результатов моделирования равновесных свойств системы в большом каноническом ансамбле при заданных значениях химических потенциалов [17].

Кинетические коэффициенты диффузии D_j^{α} вычислены аналитически по методике, описанной в [18]. Значения коррелятивных функций $g(0,1_{\gamma})$ определены по (16), где вероятности $F(0,1_{\gamma})$ брались из результатов моделирования [15].

На рисунке представлены значения коэффициентов термодиффузии, найденные по аналитическим выражениям (D_{1nT}^* , D_{2nT}^*) и по результатам моделирования при постоянном химическом потенциале одного компонента ($\beta\mu_A = -3,63$) и переменном другого, значение температуры $T = 1,5T_c$.

Анализируя представленные данные, можно отметить удовлетворительное соответствие теоретических значений, полученных по (17), с результатами метода Монте-Карло. Отклонения же значений, полученных разными методами, объясняются использованными приближениями как при получении аналитического выражения в данной работе, так и при анализе результатов моделирования [14].

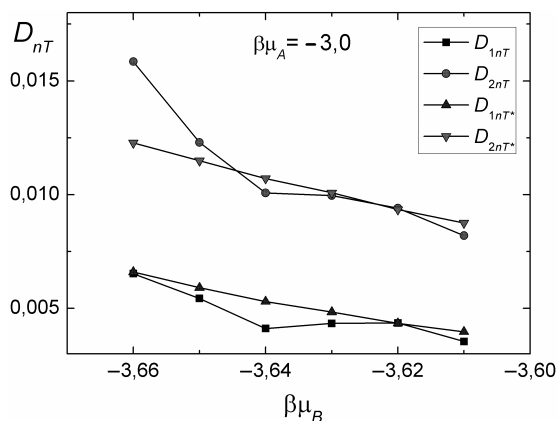


Рисунок. Зависимость коэффициентов термодиффузии от химического потенциала второго компонента

Заключение. В работе дано статистико-механическое рассмотрение термодиффузии в многокомпонентных решеточных флюидах. Получены аналитические выражения для коэффициентов термодиффузии для квадратной и кубической решеток. Аналитические выражения удовлетворительно воспроизводят данные моделирования по методу Монте-Карло, что свидетельствует об адекватности теоретических положений, лежащих в основе их вывода, и приемлемости использованных приближений. Выражение (17) позволяет определять коэффициенты термодиффузии при значительно меньших затратах компьютерных ресурсов по сравнению с моделированием по методу Монте-Карло.

Литература

1. Wirtz, K. On the kinetic theory of thermomdiffusion in crystal lattices / K. Wirtz // *Phys. Z.* – 1943. – Vol. 44. – P. 221–231.
2. Brinkman, J. A. The effect of temperature gradients on diffusion in crystals / J. A. Brinkman // *Phys. Rev.* – 1954. – Vol. 93, № 2. – P. 345.
3. LeClaire, A. D. Some predicted effects of temperature gradients on diffusion in crystals / A. D. LeClaire // *Phys. Rev.* – 1954. – Vol. 93, № 2. – P. 344.
4. Schottky, G. A theory of thermal diffusion based on the lattice dynamics of a linear chain / G. Schottky // *Phys. Stat. Solidi.* – 1965. – Vol. 8, № 1. – P. 357–368.
5. Allnatt, A. R. Thermal Diffusion in Crystalline Solids / A. R. Allnatt, A. V. Chadwick // *Chem. Rev.* – 1967. – Vol. 67, № 6. – P. 681–705.
6. Wagner, C. The thermoelectric power of cells with ionic compounds involving ionic and electronic conduction / C. Wagner // *Prog. Solid State Chem.* – 1972. – Vol. 7. – P. 1–37.

7. Surface diffusion: atomistic and collective processes / eds.: M. C. Tringides // *NATO-ASI Series.* – New York: Plenum Press, 1997. – 736 p.

8. Collective diffusion on surfaces: correlation effects and adatom interaction / eds.: M. C. Tringides, Z. Choj // *NATO Science Series.* – Amsterdam: Kluwer, 2001. – Vol. 29. – 350 p.

9. Lattice-gas theory of collective diffusion in adsorbed layers / A. Danani [et al.] // *Int. J. Mod. Phys. B.* – 1997. – Vol. 11, № 19. – P. 2217–2279.

10. Statistical-mechanical description of diffusion in interacting lattice gases / G. S. Bokun [et al.] // *Physica A.* – 2001. – Vol. 296. – P. 83–105.

11. Бокун, Г. С. Статистико-механическое описание и компьютерное моделирование диффузии в двухкомпонентных решеточных системах / Г. С. Бокун, В. С. Вихренко, Д. В. Гапанюк // *Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ.* – 2003. – Вып. XI. – С. 63–68.

12. Гапанюк, Д. В. Моделирование диффузии в двухкомпонентных решеточных системах при различающихся энергиях связи с подложкой / Д. В. Гапанюк // *Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ.* – 2004. – Вып. XII. – С. 32–36.

13. Гапанюк, Д. В. Коэффициенты диффузии двухкомпонентного решеточного газа с межчастичным отталкиванием и отличающимися энергиями взаимодействия компонентов с подложкой / Д. В. Гапанюк // *Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ.* – 2005. – Вып. XIII. – С. 36–38.

14. Вихренко, В. С. Равновесные и диффузионные характеристики интеркаляционных систем на основе решеточных моделей / В. С. Вихренко, Я. Г. Грода, Г. С. Бокун. – Минск: БГТУ, 2008. – 326 с.

15. Гапанюк, Д. В. Термодиффузия в двухкомпонентной решеточной модели / Д. В. Гапанюк, В. С. Вихренко // *Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ.* – 2007. – Вып. XV. – С. 48–52.

16. Зубарев, Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика / Д. Н. Зубарев. – М.: Наука, 1971. – 416 с.

17. Грода, Я. Г. Моделирование по методу Монте-Карло двухкомпонентных решеточных систем / Я. Г. Грода, Д. В. Гапанюк // *Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ.* – 2003. – Вып. XI. – С. 73–78.

18. Гапанюк, Д. В. Анализ результатов моделирования диффузии в двухкомпонентных системах на основе аналитических соотношений / Д. В. Гапанюк // *Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ.* – 2008. – Вып. XVI. – С. 42–45.

ДИФФУЗИЯ ЛЕНГМИОРОВСКОГО РЕШЕТОЧНОГО ГАЗА НА СТАТИЧЕСКИ НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ РЕШЕТКЕ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЫСОТ БАРЬЕРОВ *

A system of particles on periodic plate triangular and simple cubic lattices with uniform site energies is considered. Particle jumps to nearest neighbor vacant sites are thermally activated with randomly distributed intersite barriers. The lattice systems with exponential probability distribution functions of the barriers are investigated. In the case systems with static disordered the analytical expressions for jump diffusion coefficients in area low and high temperatures was proposed and investigated early. The interpolation expression for the case intermediate temperature is considered. Diffusion properties of Langmuir lattice gases on the static disordered lattice with exponential distribution of barriers are investigated by means of Monte Carlo simulation method. The temperature dependence of jump activation energy is study. The analytical expressions for calculating the temperature dependence of jump activation energy are proposed.

Введение. Проведенный в работах [1, 2] анализ диффузионных свойств решеточного флюида на статически неупорядоченных решетках показал, что и при равномерном, и при экспоненциальном распределении высот межузельных барьеров кинетический коэффициент диффузии может быть определен с помощью соотношения

$$D_J = D_0 \frac{\exp(\beta\mu)}{c} \frac{P(0; 0)}{\exp(\beta U_J)}, \quad D_0 = \frac{za^2}{2d} v, \quad (1)$$

где z – число ближайших соседей; a – расстояние между узлами решетки (длина прыжка частицы); d – размерность пространства; v – характеристическая частота.

Энергия активации находится на основе интерполяционного выражения [1, 2]

$$U_J = \eta(T)\varepsilon_p + (1 - \eta(T))\varepsilon_0, \quad 0 \leq \eta(T) \leq 1, \quad (2)$$

где ε_0 – среднее значение величины межузельного барьера, а перколяционная энергия ε_p определяется из следующего уравнения [3, 4]:

$$\int_0^{\varepsilon_p} v(\varepsilon) d\varepsilon = p_c, \quad (3)$$

где $v(\varepsilon)$ – функция распределения высот межузельных барьеров, принимаемая равной

$$v(\varepsilon) = \varepsilon_0^{-1} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right); \quad (4)$$

p_c – порог перколяции для рассматриваемого типа решетки в задаче связей [5].

На входящую в соотношение (2) функцию $\eta(T)$ наложены следующие граничные условия:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \eta(T) = 1, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \eta(T) = 0. \quad (5)$$

При этом предлагаемая зависимость энергии активации от температуры имеет весьма наглядную физическую интерпретацию. В низкотем-

пература прыжка таким образом, чтобы преодолеть минимально возможный межузельный барьер. Если рассортировать межузельные барьеры по возрастанию их высоты, то барьеры с высотой, меньшей либо равной ε_p , образуют так называемый перколяционный кластер, внутри которого возможно движение частицы по всей решетке. Можно также отметить, что перколяционный кластер представляет собой фрактал с фрактальной размерностью 1,9 и 2,5 для двух- и трехмерных решеток соответственно.

Что же касается высокотемпературного предела, то в данном случае из-за достаточно большой энергии мигрирующих частиц они в состоянии преодолеть практически любой межузельный барьер, что позволяет рассматривать решетку как упорядоченную с высотой межузельных барьера, равной средней высоте ε_0 .

В настоящей работе более детально изучается зависимость энергии активации кинетической диффузии от температуры при экспоненциальном распределении высот межузельных барьеров. Для этих целей используется компьютерное моделирование неупорядоченной решеточной системы по методу Монте-Карло. Алгоритм такого моделирования детально описан в работах [1, 2] и представляет собой фактически незначительно модифицированный алгоритм Метрополиса [6] в сочетании с периодическими граничными условиями для минимизации влияния размера моделируемой системы на результаты моделирования.

1. Энергия активации кинетической диффузии. Рассмотрим в качестве примера решеточной системы решеточный газ Ленгмюра на простой кубической статически неупорядоченной решетке с экспоненциальным распределением высот межузельных барьеров. Моделирование диффузионного процесса в данной системе позволяет определить, в частности, кине-

* Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № 08М–29).

симось логарифма кинетического коэффициента диффузии от обратной температуры представлена на рис. 1.

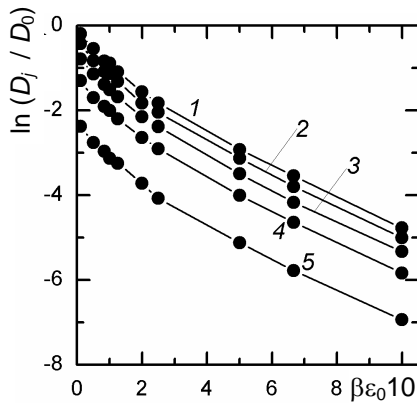


Рис. 1. Зависимость от обратной температуры кинетического коэффициента диффузии ленгмюровского решеточного газа на простой кубической решетке с экспоненциальным распределением высот ежузельных барьеров: 1 - $c = 0,1$; 2 - $c = 0,3$; 3 - $c = 0,50$; 4 - $c = 0,70$; 5 - $c = 0,90$

Из представленной зависимости видно, что она заметно отличается от линейной. Более того, уже из самого вида графика можно утверждать, что энергия активации растет с увеличением температуры.

Рассмотрим более детально различные участки зависимости логарифма кинетического коэффициента диффузии от обратной температуры, вычисляя среднюю энергию активации для каждой такой области. Полученная таким образом зависимость энергии активации от температуры представлена на рис. 2.

Данная зависимость находится в полном соответствии с предположениями, высказанными выше. А именно, как и ожидалось, энергия активации растет нелинейным образом от значений, достаточно близких к перколяционной энергии ϵ_p , стремясь с увеличением температуры к величине ϵ_0 , отвечающей средней высоте барьера.

Характер приведенной зависимости позволяет предположить возможность ее аналитической аппроксимации функцией вида

$$\frac{U_j}{\epsilon_0} = \alpha - \gamma \exp\left(-\frac{k_B T}{\epsilon_j}\right), \quad (6)$$

где параметры α , γ и ϵ_j могут быть определены по методу наименьших квадратов и оказываются равными $\alpha = 0,93527$, $\gamma = 0,64185$ и $\epsilon_j = 1,13716\epsilon_0$.

Предложенная аналитическая зависимость представлена на рис. 2 кривой 2. Рассмотрение высоко- и низкотемпературных пределов данной зависимости приводит к следующим результатам:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{U_j}{\epsilon_0} = \alpha, \quad \lim_{T \rightarrow 0} \frac{U_j}{\epsilon_0} = \alpha - \gamma. \quad (7)$$

При этом можно отметить, что полученное численное значение высокотемпературного предела отклоняется от теоретически предсказанного на 6,5%, а расхождение в низкотемпературном пределе равно 2,5%. В свете того, что численные значения параметров α и γ найдены в результате достаточно грубого анализа изначально приближенных данных компьютерного моделирования, указанные расхождения могут считаться малыми, а значит, число варьируемых параметров в аппроксимирующей функции может быть сокращено

$$\frac{U_j}{\epsilon_0} = 1 - \left(1 - \frac{\epsilon_p}{\epsilon_0}\right) \exp\left(-\frac{k_B T}{\epsilon_j}\right). \quad (8)$$

Определенный по методу наименьших квадратов параметр ϵ_j оказывается равным $1,30595\epsilon_0$. Зависимость (8) отражена на рис. 2 в виде кривой 3.

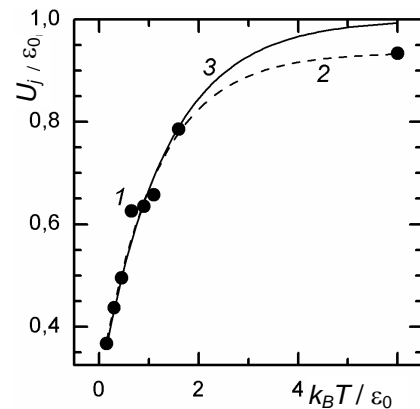


Рис. 2. Зависимость от температуры энергии активации кинетической диффузии, полученная в ходе компьютерного моделирования (точки 1) и аналитических аппроксимаций данной зависимости функциями вида (6) (кривая 2) и (8) (кривая 3)

Сравнение результатов применения аппроксимирующих функций (6) и (8) показывает, что обе предложенные зависимости очень хорошо воспроизводят результаты моделирования при низких температурах. В то же время при высокой температуре расхождение между соотношением вида (8) и данными моделирования становится весьма заметным.

В этой связи можно отметить, что энергии активации, определенные по результатам моделирования и представленные на рис. 2 в виде точек, являются результатом усреднения энергий, вычисленных при различных концентрациях. Причем с увеличением температуры величины случайных отклонений энергии активации от своего среднего значения растут. Этот факт наглядно проиллюстрирован на рис. 3, где представлены зависимости энергий активации от концентрации при температурах $k_B T / \epsilon_0 = 0,15$ и $k_B T / \epsilon_0 = 6$ и показаны соответствующие средние значения.

Это позволяет утверждать, что разница между энергиями активации, определенными согласно соотношению (8) и в результате анализа данных моделирования, может считаться относительно малой.

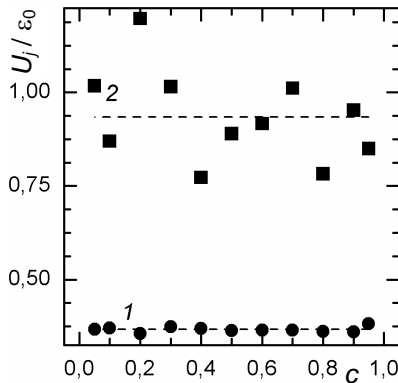


Рис. 3. Зависимость энергии активации кинетической диффузии от концентрации при температурах $k_B T / \varepsilon_0 = 0,15$ (точки 1) и $k_B T / \varepsilon_0 = 6$ (точки 2).

Пунктирной линией представлены соответствующие средние значения энергии активации

Сопоставление соотношений (2) и (8) позволяет сделать вывод, что

$$\eta(T) = \exp\left(-\frac{k_B T}{\varepsilon_J}\right). \quad (9)$$

Аналогичные исследования могут быть проведены для решеток произвольной размерности и геометрии, при этом они дают идентичные результаты. В качестве примера на рис. 4 приведены результаты для случая плоской треугольной решетки.

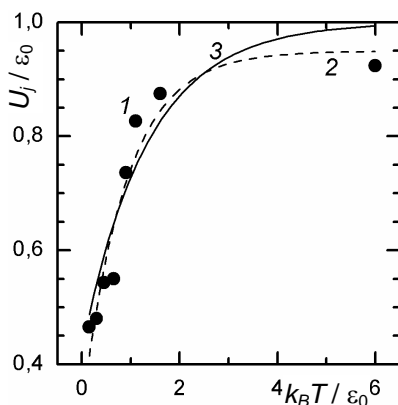


Рис. 4. Зависимость от температуры энергии активации кинетической диффузии лэнгмюровского решеточного газа на экспоненциально неупорядоченной плоской треугольной решетке, полученная в ходе компьютерного моделирования (точки 1) и аналитически аппроксимаций данной зависимости функциями вида (6) (кривая 2) и (8) (кривая 3)

В то же время использование предложенной методики к анализу энергии активации меченых атомов оказывается затруднительным из-за ее сильной зависимости от концентрации диффундирующих частиц. Последний факт объясняется тем, что данный коэффициент диффузии является одночастичным, т. е. характеризует подвижность отдельной частицы. С ростом числа частиц число доступных узлов, очевидно, уменьшается, а значит, падает и подвижность частиц, что и проявляется в снижении соответствующего коэффициента диффузии.

Заключение. Подводя итог, можно сделать вывод, что в отличие от динамически неупорядоченных систем, для вычисления коэффициента кинетической диффузии которых оказывается применимым следующее соотношение [1]

$$D_J = D_0 \frac{\exp(\beta\mu)}{c} P(0; 0) \frac{1}{1 + \beta\varepsilon_0} \quad (10)$$

в сочетании с диаграммным приближением, коэффициент диффузии статически неупорядоченных систем может быть оценен с помощью соотношения (1). При этом энергия активации U_J оказывается зависящей от температуры, согласно формуле (8).

Входящий в соотношение (8) параметр ε_J нуждается в дальнейшей теоретической оценке и уточнении.

Литература

1. Diffusion characteristics of particles on energetically disordered lattices / P. Argyrakis [et al.] // *Solid State Ionics*. – 2008. – Vol. 179. – P. 143–147.
2. Аргиракис, П. Диффузия лэнгмюровского решеточного газа на неупорядоченной решетке при экспоненциальном распределении высот барьеров / П. Аргиракис, Я. Г. Грода // *Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ.* – 2008. – Вып. XVI. – С. 25–29.
3. Hörner, A. Role percolation in diffusion on random lattice / A. Hörner, A. Milchev, P. Argyrakis // *Phys. Rev. E*. – 1995. – Vol. 52, № 4. – P. 3570–3576.
4. Dyre, J. C. Studies of ac hopping conduction at low temperature / J. C. Dyre // *Phys. Rev. E*. – 1994. – Vol. 49, № 17. – P. 11709–11720.
5. Тарасевич, Ю. Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы / Ю. Ю. Тарасевич. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 112 с.
6. Uebing, C. Monte Carlo study of surface diffusion coefficients in the presence of adsorbate-adsorbate interactions / C. Uebing, R. Gomer // *J. Chem. Phys.* – 1991. – Vol. 95, № 10. – P. 7626–7652.

А. Н. Камлюк, доцент; В. Б. Немцов, профессор; А. В. Ширко, канд. физ.-мат. наук

МОДЕЛЬ ЛОКАЛЬНОГО РАСПЛЕТЕНИЯ ДНК

The frequency dependence of amplitude of nonlinear transverse waves in DNA molecule is obtained by means of Galerkin method on the bases of the nonlinear Peyrard – Bishop model that describes the transversal oscillations of nucleotides. In this article the frequency dependence of the amplitude of nonlinear transverse waves in DNA molecule is considered with account of the wave number frequency dependence as well.

Введение. Денатурация ДНК заключается в разрыве Н-связей и стэкинг-взаимодействий, что вызывает расплетание и разделение цепей (без разрыва ковалентных связей) под действием температуры или рН (рис. 1). К локальному раскрытию пар оснований может привести также механическое воздействие на молекулу ДНК со стороны других молекул (РНК, белки и др.).

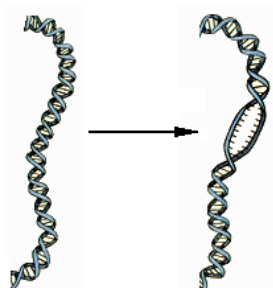


Рис. 1. Схема локального раскрытия пар ДНК

В связи с этим математическое моделирование внутренней подвижности молекулы ДНК и использование построенных моделей для изучения механизмов функционирования биомолекулы – одно из наиболее интересных и перспективных направлений современной теоретической биофизики. Особый интерес представляет моделирование нелинейной динамики ДНК, имитирующее внутренние движения большой амплитуды. Это направление исследований началось с работы [1]. В последующем был создан ряд простых базовых моделей ДНК [2]. Такие простые модели были использованы для интерпретации имеющихся экспериментальных данных, а также для объяснения некоторых элементов в сложном механизме функционирования ДНК [2]. В настоящее время исследования основываются на новых и более надежных экспериментальных данных.

Модель. В данной работе предлагается рассмотреть нелинейную модель функционирования молекулы ДНК на основе модели Пейрарда – Бишопа (РВ) [3]. Модель РВ учитывает, что молекула ДНК состоит из двух полинуклеотидных цепочек, и ее можно представить в виде двух эластичных стержней, слабо взаимодействующих между собой и свернутых в двойную спираль. Дискретный механический аналог такой модели (см. рис. 2) представляет собой две

цепочки дисков, связанных друг с другом продольными и поперечными пружинами.

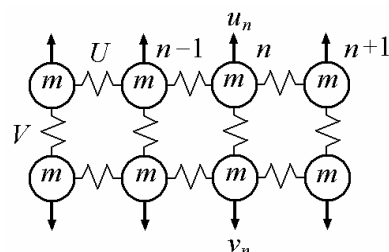


Рис. 2. Модель Пейрарда – Бишопа

Обозначим через U энергию взаимодействия узлов одной цепочки, V – энергию взаимодействия узлов разных цепочек, n – номера атомов в цепочке, u_n и v_n – смещение узлов верхней и нижней цепочки соответственно (стрелками на рис. 2 показаны направления смещений узлов).

В качестве U для простоты возьмем гармонический потенциал:

$$U = \frac{c}{2} \left[(u_n - u_{n-1})^2 + (v_n - v_{n-1})^2 \right], \quad (1)$$

где c – упругая константа.

Взаимодействие узлов разных цепочек, т. е. взаимодействие между парами нуклеотидов АТ или СГ, описывает потенциал Морзе:

$$V = D \left[e^{(-a(u_n - v_n))} - 1 \right]^2, \quad (2)$$

где D и a – параметры потенциала Морзе.

Гамильтониан модели имеет следующий вид:

$$H = \sum \frac{m}{2} (\dot{u}_n^2 + \dot{v}_n^2) + \frac{c}{2} \left[(u_n - u_{n-1})^2 + (v_n - v_{n-1})^2 + D (e^{-a(u_n - v_n)} - 1)^2 \right], \quad (3)$$

где m – масса пары оснований.

Уравнения движения. Уравнения движения записываются в форме

$$m \ddot{u}_n = - \frac{d(U+V)}{du_n}, \quad m \ddot{v}_n = - \frac{d(U+V)}{dv_n}. \quad (4)$$

После замены переменных

$$x_n = \frac{u_n + v_n}{\sqrt{2}}, \quad y_n = \frac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

уравнения движения (4) примут вид

$$m\ddot{x}_n = c(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n), \quad (6)$$

$$m\ddot{y}_n = c(y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n) + 2\sqrt{2}aD(e^{-a\sqrt{2}y_n} - 1)(e^{-a\sqrt{2}y_n}). \quad (7)$$

В континуальном приближении дискретные переменные x_n, y_n являются функциями непрерывной координаты z , направленной вдоль оси молекулы ДНК, и времени t .

Первое уравнение описывает линейные волны – фотоны, а второе уравнение – нелинейные волны, называемые бризерами (осциллирующий солитон).

Нас интересует второе уравнение последней системы. Разделим все члены этого уравнения на h^2 (h – расстояние между соседними парами оснований вдоль оси молекулы):

$$\frac{m}{h^2} \ddot{y}_n = \frac{c}{h^2} (y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n) + \frac{2\sqrt{2}aD}{h^2} (e^{-a\sqrt{2}y_n} - 1)(e^{-a\sqrt{2}y_n}). \quad (8)$$

В континуальном приближении уравнение (8) примет вид

$$\ddot{y}_n - \left(h^2 \frac{c}{m} \right) y_n'' - \frac{2\sqrt{2}aD}{m} \times (e^{-a\sqrt{2}y_n} - 1)(e^{-a\sqrt{2}y_n}) = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) можно переписать в следующей форме:

$$\ddot{y}_n - \left(h^2 \frac{c}{m} \right) y_n'' + \frac{2D}{m} \frac{\partial}{\partial y_n} [1 - e^{-a\sqrt{2}y_n}]^2 = 0. \quad (10)$$

Подставляя $y_n = e^{-i(\omega t - kz)}$ (ω – частота, k – волновой вектор) в линеаризованное уравнение

$$\ddot{y}_n - \left(h^2 \frac{c}{m} \right) y_n'' + \frac{8a^2 D}{m} y_n = 0, \quad (11)$$

получим зависимость частоты от волнового вектора:

$$\omega^2 = \frac{h^2 c}{m} k^2 + \frac{8a^2 D}{m} \quad (12)$$

или с учетом того, что $\omega_0 = \sqrt{c/m}$,

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{h^2 k^2 + \frac{8a^2 D}{c}}. \quad (13)$$

Метод решения нелинейного уравнения и анализ результатов расчетов. Для решения нелинейного уравнения (9) будем использовать подход, связанный с рядом ограничений и основанный на идеи перенесения на нелинейную теорию методов геометрической оптики.

Будем полагать, что параметры, характеризующие волну (амплитуда, частота, волновое число и т. д.), изменяются достаточно медленно на расстояниях порядка длины волны и за время порядка периода колебаний. В этом случае стационарные периодические волны мало отличаются от синусоидальных, т. е. пренебрегая кратными гармониками, их можно представить в виде [4]

$$y_n = A \cos(\omega t - knh) = A \cos x, \quad (14)$$

где ω – частота, зависящая от амплитуды A .

После подстановки (14) в уравнение (9) получим

$$\omega^2 A \cos x - \frac{2c}{m} A(1 - \cos kh) \cos x + \frac{2\sqrt{2}aD}{m} [e^{-2a\sqrt{2}A \cos x} - e^{-a\sqrt{2}A \cos x}] = 0. \quad (15)$$

Следуя методу Галеркина, мы умножаем (9) на $\cos x$, а затем интегрируем по x от $-\pi$ до π .

В результате получается уравнение частот $\omega = f(A, k)$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \left(2(1 - \cos kh) + \frac{4\sqrt{2}aD}{cA} \times \left(I_1(2\sqrt{2}aA) - I_1(\sqrt{2}aA) \right) \right)^{1/2}, \quad (16)$$

где $I_1(x)$ – функция Бесселя для мнимого аргумента.

Зависимость (16) часто называют нелинейным дисперсионным уравнением. Отклонение решения линеаризованного уравнения (13) от нелинейного (16) наглядно видно в диапазоне $-\pi/h < k < \pi/h$ (первая зона Бриллюэна) на рис. 3.

Уравнение (16) дает быстрое возрастание амплитуды при изменении частоты в ограниченном пределе. Для отношения (16) оптические моды нелинейно зависят от частоты и амплитуды (рис. 4).

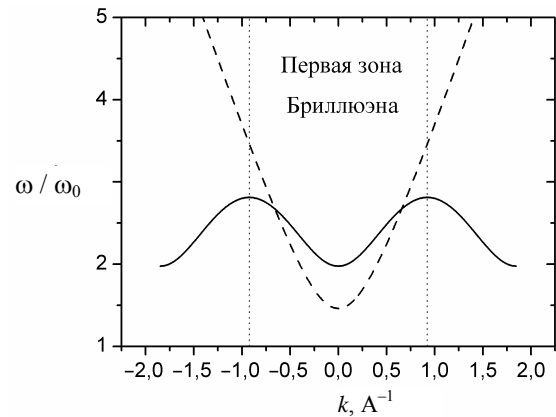


Рис. 3. Решение линеаризованного уравнения (13) (штриховая линия) и нелинейного уравнения (16) (сплошная линия)

При этом были использованы следующие численные значения параметров [5]: $c = 24 \text{ N/m}$, $a = 2 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$, $D = 0,6 \cdot 10^{-19} \text{ Nm}$.

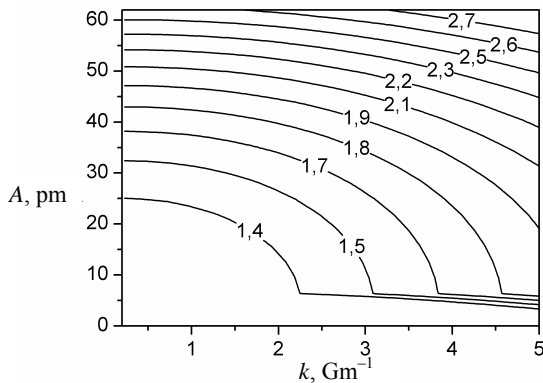


Рис. 4. Зависимость амплитуды нелинейных поперечных волн в молекуле ДНК от волнового вектора. На рисунке представлены графики для различных значений относительных частот вынужденных колебаний

Вынужденные колебания. Рассмотрим вынужденные колебания молекулы ДНК под действием внешней силы $S \cos(\omega t)$. В этом случае уравнение движения (7) получим в виде

$$m\ddot{y}_n = c(y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n) + 2\sqrt{2}aD \times \\ \times (e^{-a\sqrt{2}y_n} - 1)(e^{-a\sqrt{2}y_n}) + S \cos(\omega t - knh), \quad (17)$$

где S – амплитуда внешней силы.

Решение уравнения (17) ищем в форме (14). В итоге получим

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \left(2(1 - \cos kh) + 4\sqrt{2}aD(cA)^{-1} \times \right. \\ \left. \times (I_1(2\sqrt{2}aA) - I_1(\sqrt{2}aA)) + bA^{-1} \right)^{1/2}, \quad (18)$$

где $b = S/c$ – приведенная амплитуда вынуждающей внешней силы.

На рис. 5 представлены решения уравнения (18) при различных значениях параметра b .

В центре рис. 5 сплошной линией показана скелетная кривая при $b = 0$. Слева от скелетной кривой отражена зависимость при $b = -0,8A$, а справа – при $b = 0,8A$. Итак, имеется возможность получать зависимости амплитуд при различных характеристиках возмущающей силы.

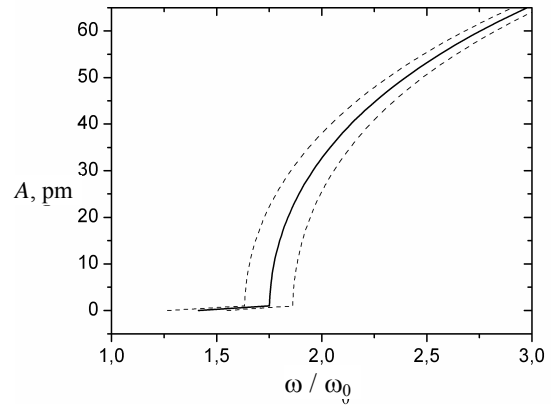


Рис. 5. Зависимости амплитуд от частоты вынуждающей силы

Заключение. Таким образом, на базе нелинейной модели Пейрарда – Бишопа рассчитаны амплитудно-частотные зависимости при вынужденных колебаниях нуклеотидов молекулы ДНК. Показано, что локальное раскрытие пар оснований в спиральных молекулах типа ДНК объясняется появлением больших амплитуд колебаний, которые могут быть инициированы взаимодействием ДНК с высоко- и низкомолекулярными соединениями природного и антропогенного происхождения, при определенных отношениях частоты собственных колебаний нуклеотидов ДНК с частотой вынуждающей силы.

Литература

1. Nature of the open state in long polynucleotide double helices: possibility of soliton excitations / S. W. Englander [et al.] // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1980. – Vol. 77, № 12. – P. 7222–7226.
2. Yakushevich, L. V. Nonlinear Physics of DNA / L. V. Yakushevich. – Chichester: John Wiley & Sons, 1998. – 204 p.
3. Peyrard, M. Statistical mechanics of a nonlinear model for DNA denaturation / M. Peyrard, A. R. Bishop // Phys. Rev. Lett. – 1989. – Vol. 62. – P. 2755–2757.
4. Карпман, В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах / В. И. Карпман. – М.: Наука, 1973. – 175 с.
5. Zdravkovic, S. Single-molecule unzipping experiments on DNA and Peyrard-Bishop-Dauxois model / S. Zdravkovic, M. Sataric // Phys. Rev. E. – 2006. – Vol. 73. – P. 021905-1–11.

УДК 539.12

Д. В. Кленецкий, ст. преподаватель; В. Н. Чайчиц, студент

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ ПРОЦЕССА РАСШИРЕНИЯ КВАРК-ГЛЮОННОЙ ПЛАЗМЫ

Studying of process of a quark-gluon plasma formation in heavy ion collisions at high energy causes the big interest in last years. The quark-gluon plasma is that state of substance in which there was our Universe at once after the Big Bang. The main goal of high energy nuclear collisions is to create in laboratory a quark-gluon plasma of macroscopic size, to find its signals and to investigate its properties. Using the hydrodynamical theory with scale-invariant initial conditions – model Bjorken, in the given article the evolution of a equilibrium quark-gluon plasma created in collision of heavy nuclei at high energy is considered. Much attention is given to the self-consistency phenomenological description of phase evolution of a hot and dense nuclear matter during its expansion (cooling) to final scattering secondary particles. Expression for volume a quark-gluon of plasma created in collision is received.

Введение. В начале XXI в. были введены в действие ускорители тяжелых ионов: RHIC (Брукхейвен, США) и LHC (ЦЕРН, Европа). Одним из основных предметов исследования на этих ускорителях является кварк-глюонная плазма – гипотетическое состояние, состоящее из квазисвободных кварков и глюонов [1]. Предполагается, что кварк-глюонная плазма может образоваться в результате центрального соударения тяжелых ионов. При расширении и остывании кварк-глюонной плазмы взаимодействие между кварками и глюонами (при увеличении расстояния между ними) возрастает, и кварковые пары и глюоны превращаются в наблюдаемые адроны. Этот процесс трактуется как фазовый переход кварк-глюонной плазмы в адроны.

Схематически пространственно-временная картина соударения тяжелых ядер представлена на рисунке. Этот процесс можно разделить на следующие этапы:

1) предравновесный период, в течение которого за время t_0 в результате взаимодействия составляющих ядер образуется термализованная система – кварк-глюонная плазма;

2) кварк-глюонная плазма расширяется и остывает, при достижении температуры T_c (через время t_c после столкновения) она начинает переходить в адроны;

3) если адронизация имеет характер фазового перехода первого рода, то при температуре T_c в течение времени t_h система будет находиться в смешанной фазе, а затем превратится в адронный газ;

4) адронный газ расширяется;

5) через время t_f при температуре T_f все взаимодействия между адронами прекращаются, происходит «замораживание» и наблюдается свободный разлет адронов.

Механизм этого процесса рассматривается в рамках термогидродинамических моделей. Согласно этому подходу, достигнув термодинамического равновесия (за некоторое очень небольшое начальное время), горячее вещество далее эволюционирует в соответствии с уравнениями релятивистской гидродинамики [2], отражающими локальные законы сохранения (при пренебрежении диссипативными эффектами):

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad T_{ik} = (\varepsilon + p)u_i u_k - p g_{ik}, \quad (1)$$

где T_{ik} – тензор энергии-импульса; x – 4-мерная координата; ε – плотность энергии; p – давление в собственной системе элемента объема; u_i – 4-скорость элемента; g_{ik} – метрический тензор ($g_{00} = 1, g_{ii} = -1$).

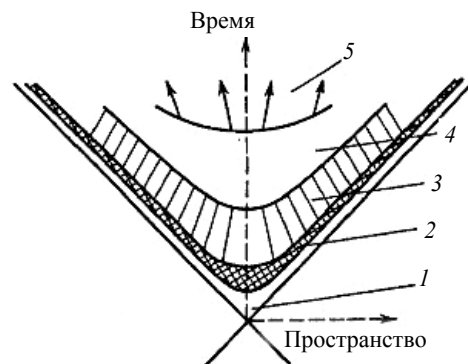


Рисунок. Эволюция соударения релятивистских ядер:

1 – предравновесный период; 2 – кварк-глюонная плазма; 3 – смешанная фаза; 4 – адронный газ; 5 – свободный разлет

Существенно, что на всех стадиях гидродинамического процесса предполагается термодинамическое равновесие, характеризую-

щееся температурой T и уравнением состояния, которое, как правило, принимается в форме $p = \varepsilon / 3$, характерной для идеального релятивистского газа.

Конечно, решение этих уравнений зависит от начальных условий, которые приходится формулировать, опираясь на те или иные физические соображения. Выбор начального состояния и его характеристики является наиболее слабым местом данной теории. Обычно считают, что в начальный момент сильновзаимодействующая жидкость равномерно распределена по первоначальному объему. Ее истечение в вакуум происходит за счет внутренних сил, в данном случае благодаря сильному взаимодействию ее элементов. Предполагается также, что решение задачи обладает цилиндрической симметрией относительно оси соударения сталкивающихся частиц, которая сохраняется в процессе расширения системы [3].

В работе [4] были получены ограничения на объем начального состояния, образующегося в столкновении релятивистских ядер для различных экспериментов. Эти ограничения зависят от объема адронной фазы во время свободного разлета, который может быть измерен непосредственно в ходе эксперимента. В этой работе на основании результатов [4] мы находим ограничение на объем кварк-глюонной плазмы, следующее из гидродинамического расширения плазмы.

Основная часть. Мы используем наиболее популярный в настоящее время сценарий гидродинамического расширения, предложенный Бьеркеном [5]. Поскольку начальные условия характеризуются цилиндрической симметрией, то основная часть гидродинамического расширения является одномерным расширением вдоль оси соударения ядер. Движение в поперечном направлении определяется, в основном, тепловым движением. Тогда двумерные уравнения гидродинамики (1) сводятся к соотношению

$$\frac{ds}{d\tau} + \frac{s}{\tau} = 0, \quad (2)$$

где s – удельная энтропия системы (плотность энтропии); $\tau = \sqrt{t^2 - x^2}$ – собственное время элемента объема жидкости (здесь применяется система единиц, в которой скорость света $c = 1$). Решение уравнения (2) имеет вид

$$s(\tau) = \frac{s_h \tau_h}{\tau}, \quad (3)$$

где s_h – начальное значение удельной энтропии в момент времени τ_h .

Таким образом, на первом этапе в картине Бьеркена предполагается, что система за время τ_0 приходит в равновесие при начальной температуре T_0 . Затем на втором этапе образовавшаяся кварк-глюонная плазма расширяется,

согласно гидродинамическому уравнению (3). Когда температура кварк-глюонной плазмы уменьшается до критической температуры T_c в момент времени τ_c , начинается фазовый переход кварк-глюонной плазмы в адроны. Из формулы (3) удельная энтропия кварк-глюонной плазмы в момент времени τ_c составляет

$$s(\tau_c) = \frac{s(\tau_0)\tau_0}{\tau_c}. \quad (4)$$

В момент времени τ_h фазовый переход заканчивается, вся система переходит в равновесный адронный газ. Удельная энтропия адронной фазы $s(\tau_h)$ определяется динамикой фазового перехода. Для фазового перехода первого рода [6]

$$s(\tau_h) = s(\tau_c) \left(\frac{\tau_c}{\tau_h} \right)^{4/3}. \quad (5)$$

На следующем этапе расширяется адронный газ. При этом его температура уменьшается от T_c до T_f в момент времени τ_f , когда все взаимодействия между адронами прекращаются, и наблюдается свободный разлет адронов. Согласно (3), удельная энтропия адронной фазы в момент времени τ_f равна

$$s(\tau_f) = \frac{s(\tau_h)\tau_h}{\tau_f}. \quad (6)$$

Из формул (5) и (6) следует связь между удельной энтропией $s(\tau_c)$ кварк-глюонной плазмы непосредственно перед фазовым переходом и удельной энтропией адронного газа $s(\tau_f)$ перед свободным разлетом:

$$s(\tau_f) = s(\tau_c) \left(\frac{\tau_c}{\tau_h} \right)^{4/3} \frac{\tau_h}{\tau_f}. \quad (7)$$

Используя выражение (6) и стандартное термодинамическое соотношение, удовлетворяющее уравнению состояния

$$s(\tau_f) = s(\tau_h) \left(\frac{T_f}{T_c} \right)^3, \quad (8)$$

найдем

$$\frac{\tau_h}{\tau_f} = \left(\frac{T_f}{T_c} \right)^3. \quad (9)$$

Подставляя это в (7), получим

$$s(\tau_f) = s(\tau_c) \left(\frac{\tau_c}{\tau_h} \right)^{4/3} \left(\frac{T_f}{T_c} \right)^3. \quad (10)$$

Время, через которое вся система будет находиться в адронной фазе [6], равно

$$\tau_h = 6,16\tau_c. \quad (11)$$

Учитывая, что температура фазового перехода $T_c \approx 190$ МэВ и температура, при которой

прекращаются взаимодействия между адронами, $T_f \approx 130$ МэВ, из выражения (10) найдем

$$s(\tau_f) = \frac{s(\tau_c)}{35}. \quad (12)$$

Поскольку на всех стадиях гидродинамического процесса имеет место термодинамическое равновесие, то в соответствии со вторым началом термодинамики полная энтропия такой системы должна оставаться постоянной, т. е. $s(\tau_c)V_{\text{кгп}} = s(\tau_f)V_a$, где $V_{\text{кгп}}$ и V_a – объемы кварк-глюонной плазмы и адронной фазы соответственно. Тогда из соотношения (12) следует, что

$$V_{\text{кгп}} = \frac{V_a}{35}. \quad (13)$$

Данное ограничение на объем кварк-глюонной плазмы зависит от соотношения температур T_c и T_f , а также от длительности смешанной фазы. Объем адронной фазы V_a может быть найден по данным адронной интерферометрии из экспериментальных данных по двухчастичным корреляциям [7]. Полученное значение объема кварк-глюонной плазмы совпадает с ограничениями на объем, следующими из второго начала термодинамики [4].

Заключение. Гидродинамическая теория множественных процессов хорошо описывает почти все современные экспериментальные данные об инклюзивных реакциях в столкновениях протонов. С появлением пучков релятивистских тяжелых ионов гидродинамический подход стал широко применяться для исследования соударений тяжелых ядер. При этом число вторичных частиц увеличивается во много раз, что расширяет границы применимости гидродинамического подхода и улучшает условия для диагностики кварк-глюонной плазмы. Вплоть до настоящего времени, вероятно, самым веским указанием на существование кварк-глюонной плазмы является хорошее согласие гидродинамической теории с экспериментальными результатами. Однако, к сожалению, до сих пор не проведено полного сопоставления данной модели со всей совокупностью современных экспериментальных данных [8].

Возможность регистрации кварк-глюонной плазмы в столкновении тяжелых ионов предпо-

лагает измерение геометрического размера области, в которой материя находится в данной фазе. Объем кварк-глюонной плазмы, образованной в столкновении, важен при изучении ее свойств как статистической системы, а также при интерпретации экспериментальных данных [9]. Заметим, что в формуле (13) определен объем кварк-глюонной плазмы после стадии расширения непосредственно перед фазовым переходом. Реально созданный в столкновении объем плазмы будет еще меньше.

Литература

1. Wong, C. Y. Introduction to high energy heavy-ion collisions / C. Y. Wong. – World Scientific, Singapore, 1994. – P. 198.
2. Ройзен, И. И. Деконфаймент цвета и субадронное вещество: фазовые состояния и роль конститuentных кварков / И. И. Ройзен, Е. Л. Фейнберг, О. Д. Чернавская // УФН. – 2004. – Т. 174, № 5. – С. 473–493.
3. Гольданский, В. И. Кинематические методы в физике высоких энергий / В. И. Гольданский, Ю. П. Никитин, И. Л. Розенталь. – М.: Наука, 1987. – 200 с.
4. Кленицкий, Д. В. Ограничения на геометрический размер кварк-глюонной плазмы в столкновениях тяжелых ионов высоких энергий / Д. В. Кленицкий, В. Н. Чайчиц // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2008. – Вып. XVI. – С. 46–48.
5. Ваяшин, А. В. Кварк-глюонная плазма / А. В. Ваяшин, В. М. Емельянов, Ю. П. Никитин. – М.: МИФИ, 1987. – 56 с.
6. Shucla, P. Inhomogeneous nucleation in quark-hadron phase transition / P. Shucla, A. K. Mohanty, S. K. Gupta // Phys. Rev. – 2000. – Vol. C62. – P. 143–153.
7. Wiedemann, U. Hanbury Brown-Twiss interferometry / U. Wiedemann, U. Heinz // Phys. Rep. – 1999. – Vol. 319. – P. 113–129.
8. Розенталь, И. Л. Гидродинамическая теория множественных процессов и физика кварк-глюонной плазмы / И. Л. Розенталь, Ю. А. Тарасов // УФН. – 2003. – Т. 163, № 7. – С. 29–44.
9. Ambar, J. How big is the source that produces quark-gluon plasma in heavy ion collisions? / J. Ambar, V. Ravishankar // Phys. Rev. – 2004. – Vol. C70. – P. 281–283.

А. В. Жаркевич, доцент; Е. В. Фарафонтова, мл. науч. сотрудник; И. И. Наркевич, профессор

УЧЕТ КОРРЕЛЯЦИОННОГО ВКЛАДА В РЕШЕТОЧНУЮ МОЛЕКУЛЯРНУЮ ТЕПЛОЕМКОСТЬ КРИСТАЛЛА С ВАКАНСИЯМИ

Early, the simple statistical model of a condensed media was formulated. Interaction between particles is described by Lennard – Johnes potential. Filling of cells was independent event. A variation task at a minimization of a free energy system was decided. In result it was obtained an expression for a potential part of a heat capacity of a molecular crystal with vacancies. In this article the model, discounting a correlation in filling microcells of particles is considered. An expression for filling numbers of microcells by molecules is used for a calculation of an inner energy and entropy. In result a new expression for a molecular heat capacity is obtained. A little correlation additions are appeared in a heat capacity expression for a last model.

Введение. Ранее [1, 2] была сформулирована простая статистическая модель конденсированной системы с парным взаимодействием частиц (молекул), которое описывается потенциалом Леннард – Джонса. В соответствии с методом условных распределений весь объем V среды делится на M равных микроячеек объемом ω ($\omega = V/M$) так, чтобы число ячеек было больше числа N частиц ($M > N$). При этом объем ω ячеек достаточно мал, поэтому вероятность попадания двух частиц в одну ячейку также невелика [1]. При вычислении потенциальной части внутренней энергии U системы N молекул, статистически распределенных по M ячейкам, предполагалось, что вероятность заполнения частицами пары ячеек ω_i и ω_j равна произведению вероятностей заполнения каждой ячейки, т. е. числа заполнения двух ячеек $n_{ij} \cong n_i n_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, M$). В результате использования известных из термодинамики и статистической физики формул для свободной энергии F , комбинаторной энтропии S_0 фермионного газа [3] и потенциальной части внутренней энергии U была получена простая математическая модель однородной ($n_i = n = N/M$) конденсированной среды:

$$F = U - TS, \quad (1)$$

$$S_0 = -kN \left[\ln n + \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \ln(1 - n) \right], \quad (2)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j \neq i}^M n_{ij} \phi_{ij} \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j \neq i}^M n^2 \phi_{ij}, \quad (3)$$

где ϕ_{ij} – средние значения потенциалов средних сил, которые описывают усредненное с помощью коррелятивных функций распределения взаимодействие частиц, находящихся в ячейках с номерами i и j ; $\nu = V/N$ – молекулярный объем, $n = N/M = \omega/\nu$ – концентрация частиц системы.

В области кристаллического состояния вещества функции распределения сильно локализованы в окрестности узлов кристаллической решетки, поэтому потенциальная энергия разложена на статическую энергию U_0 решетки с вакансиями и энергию U_k , связанную с колеба-

тельным движением частиц в области локализации вблизи узлов решетки:

$$U = U_0 + U_k. \quad (4)$$

С учетом взаимодействия каждой молекулы с молекулами, находящимися в 12 ближайших ячейках гранецентрированной решетки (приближение ближайших соседей), для потенциальной энергии U_0 использовано приближенное выражение

$$U_0 \approx 6n^2 M \phi_1 = \frac{6N}{n\nu^2} \left[\frac{1}{n^2 \nu^2} - 2 \right], \quad (5)$$

$$\text{где } \phi_1 = \Phi(R) = \frac{1}{n^2 \nu^2} \left(\frac{1}{n^2 \nu^2} - 2 \right).$$

Здесь $\Phi(R)$ – значение потенциала Леннард – Джонса для двух молекул, находящихся в двух соседних узлах (R – параметр решетки).

Сформулировав вариационную задачу по минимизации свободной энергии F системы по внутреннему параметру n модели [4], удалось получить аналитическое выражение для той части молекулярной теплоемкости при постоянном объеме, которая определяется статической энергией решетки с вакансиями:

$$C_{0\nu}^* = \frac{A^{*2}}{\theta^2 n^2 \left[\exp(-A^*/\theta) + B^*/\theta \right]}, \quad (6)$$

$$\text{где } A^* = \frac{6}{\nu^2} \left(2 - \frac{3}{n^2 \nu^2} \right), \quad B^* = \frac{36}{n^3 \nu^4}.$$

Основная часть. Целью данной публикации является уточнение сформулированной ранее статистической модели конденсированной среды для учета бинарных корреляций в заполнении пар ячеек частицами при расчете молекулярной теплоемкости $C_{1\nu}^*$ кристаллов с вакансиями:

$$C_{1\nu}^* = \left(\frac{\partial U_1^*}{\partial n} \right)_{\nu, \theta} \left(\frac{dn}{d\theta} \right)_{\nu}. \quad (7)$$

Здесь $U_1^* = U_1/N$ – статическая энергия коррелированной решетки, приходящаяся на одну молекулу, $\theta = kT$.

При вычислении энергии U_1 и энтропии S_1 модели использовано полученное ранее [2] выражение для чисел заполнения n_{ij} всевозможных пар ячеек объемом ω_i и ω_j ($i, j = 1, 2, \dots, M$):

$$n_{ij} \approx n + \frac{1 - \sqrt{1 + 4n(1-n)z}}{2z}, \quad (8)$$

где z – значение функции Майера для частиц, расположенных в двух соседних узлах:

$$z = \exp\left\{-\frac{\Phi_1(n, \nu)}{\theta}\right\} - 1. \quad (9)$$

Концентрация вакансий $c = 1 - n$ в области кристаллического состояния мала (вдали от линии плавления $c < 10^{-3}$). Поэтому, разложив (8) по малому параметру x ($x = 4ncz$) для чисел заполнения n_{ij} , получим следующее выражение:

$$n_{ij} \approx n^2 + n^2 c^2 z. \quad (10)$$

Тогда статическую потенциальную часть внутренней энергии коррелированной модели с учетом формулы (10) определим как:

$$U_1 = \frac{n_{ij} U_0}{n^2} = U_0 + U_0 c^2 z = U_0 (1 + \xi_1), \quad (11)$$

где

$$\xi_1 = c^2 z. \quad (12)$$

Учет корреляции в заполнении частицами пар соседних ячеек приводит к появлению добавки ΔS^* к комбинаторной части энтропии S_0 [2]:

$$S_1 = S_0 + M \Delta S^*, \quad (13)$$

где

$$\Delta S^* = -\frac{k}{2} \sum_{\mu, \nu = a, e} n_{\mu\nu} \ln \frac{n_{\mu\nu}}{n_\mu n_\nu} = -\frac{k}{2} \left(n_{aa} \ln \frac{n_{aa}}{n_a n_a} + 2n_{ae} \ln \frac{n_{ae}}{n_a n_e} + n_{ee} \ln \frac{n_{ee}}{n_e n_e} \right), \quad (14)$$

$$n_{aa} = n_{ij} \approx n^2 (1 + c^2 z), \quad n_{ae} = n - n_{ij} \approx nc(1 - ncz), \\ n_{ee} = c - n_{ae} \approx c^2 (1 + n^2 z).$$

Здесь ΔS^* – добавка к энтропии системы, приходящаяся на одну ячейку; n_{aa} , n_{ae} , n_{ee} – числа заполнения, которые определяют соответствующие вероятности одновременного заполнения пары соседних ячеек молекулами (частицами сорта a) и невзаимодействующими квазичастицами, концентрация которых равна концентрации вакансий (частицы сорта e , $n_e = c = 1 - n$).

Разложив логарифмы в формуле (13) по малому параметру, которым является концентрация вакансий c , получим следующее выражение для энтропии S_1 :

$$S_1 = -kN \left[\ln n + \frac{c}{n} \ln c + nc^2 z^2 \right] = S_0 + \xi_2, \quad (15)$$

где

$$\xi_2 = -kNnc^2 z^2. \quad (16)$$

Выражение для свободной энергии F_1 модели с учетом формул (11) и (15) преобразуем к следующему виду:

$$F_1 = U_1 - TS_1 = U_0 + U_0 \xi_1 - TS_0 - T\xi_2 = F_0 + \xi_3, \quad (17)$$

где

$$\xi_3 = Nc^2 z \left[\frac{6}{n\nu^2} \left(\frac{1}{n^2 \nu^2} - 2 \right) + \theta nz \right]. \quad (18)$$

Выполнив варьирование выражения (17) по внутреннему параметру n модели, получим нелинейное относительно n уравнение:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial n} \right)_{\nu, \theta} = \left(\frac{\partial F_0}{\partial n} \right)_{\nu, \theta} + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial n} \right)_{\nu, \theta} = 0, \quad (19)$$

где

$$\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial n} \right)_{\nu, \theta} = \frac{6N}{n\nu^2} \left[\frac{1}{n} \left(2 - \frac{3}{n^2 \nu^2} \right) c^2 z + \left(\frac{1}{n^2 \nu^2} - 2 \right) \left(-2cz + c^2 \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right)_{\nu, \theta} \right) \right] + \theta N \left[(1 - 4n + 3n^2) z^2 + 2nc^2 z \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right)_{\nu, \theta} \right], \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial n} \right)_{\nu, \theta} = -\frac{1}{\theta} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right)_{\nu} (z + 1), \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right)_{\nu} = \frac{4}{n^3 \nu^2} \left(1 - \frac{1}{n^2 \nu^2} \right). \quad (22)$$

Используя выражение для статической энергии U_1^* , приходящейся на одну молекулу,

$$U_1^* = \frac{U_1}{N} = U_0^* + U_0^* \xi_1, \quad (23)$$

найдем частную производную $(\partial U_1^* / \partial n)_{\nu, \theta}$, которая входит в выражение (7) для $C_{1\nu}^*$:

$$\left(\frac{\partial U_1^*}{\partial n} \right)_{\nu, \theta} = \left(\frac{\partial U_0^*}{\partial n} \right)_{\nu, \theta} + \xi_4, \quad (24)$$

где

$$\xi_4 = \left(\frac{\partial (U_0^* \xi_1)}{\partial n} \right)_{\nu, \theta} = \frac{6}{n\nu^2} \left[\frac{1}{n} \left(2 - \frac{3}{n^2 \nu^2} \right) c^2 z + c \left(\frac{1}{n^2 \nu^2} - 2 \right) \left(c \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right)_{\nu, \theta} - 2z \right) \right]. \quad (25)$$

В результате неявного дифференцирования уравнения (19) получим:

$$\left(\frac{dn}{d\theta}\right)_{\nu} = -\frac{\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial n \partial \theta}\right)_{\nu} + \xi_5}{\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial n^2}\right)_{\nu, \theta} + \xi_6}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_5 = & \left(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial n \partial \theta}\right)_{\nu} = \frac{6N}{n\nu^2} \left[\frac{1}{n} \left(2 - \frac{3}{n^2 \nu^2} \right) c^2 \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_{n, \nu} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{n^2 \nu^2} - 2 \right) \left(-2c \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_{n, \nu} + c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial n \partial \theta}\right)_{\nu} \right) \right] + \\ & + N \left[(1 - 4n + 3n^2) z^2 + 2nc^2 z \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)_{\nu, \theta} + \right. \\ & \left. + \theta \left(2 \cdot (1 - 4n + 3n^2) z \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_{n, \nu} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2nc^2 \left(\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_{n, \nu} \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)_{\nu, \theta} + z \left(\frac{\partial^2 z}{\partial n \partial \theta}\right)_{\nu} \right) \right) \right], \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_6 = & \left(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial n^2}\right)_{\nu, \theta} = \frac{6N}{\nu^2} \left[\frac{4}{n^3} \left(\frac{3}{n^2 \nu^2} - 1 \right) c^2 z + \right. \\ & \left. + \left(2 - \frac{3}{n^2 \nu^2} \right) \frac{c}{n^2} \left(2c \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)_{\nu, \theta} - 4z \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n^2 \nu^2} - 2 \right) \left(-4c \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)_{\nu, \theta} + c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial n^2}\right)_{\nu, \theta} + 2z \right) \right] + \\ & + \theta N \left[2 \cdot (3n - 2) z^2 + 2nc^2 \left(\left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)_{\nu, \theta}^2 + z \left(\frac{\partial^2 z}{\partial n^2}\right)_{\nu, \theta} \right) + \right. \\ & \left. + 4z \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)_{\nu, \theta} (1 - 4n + 3n^2) \right], \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial n^2}\right)_{\nu, \theta} = & -\frac{1}{\theta} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial n^2}\right)_{\nu} (z + 1) - \\ & - \frac{1}{\theta} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)_{\nu} \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)_{\nu, \theta}, \quad (29) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial n^2}\right)_{\nu} = \frac{4}{n^4 \nu^2} \left(\frac{5}{n^2 \nu^2} - 3 \right), \quad (30)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_{n, \nu} = \frac{1}{\theta^2} (z + 1) \varphi_1, \quad (31)$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial n \partial \theta}\right)_{\nu} = \frac{1}{\theta} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)_{\nu} \left[\frac{1}{\theta} (z + 1) - \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_{n, \nu} \right]. \quad (32)$$

Подставив выражения (24) и (26) в правую часть соотношения (7), получим выражение для теплоемкости $C_{1\nu}^*$ с учетом бинарных корреляций:

$$\begin{aligned} C_{1\nu}^* = & -\frac{\left(\left(\frac{\partial U_0^*}{\partial n}\right)_{\nu, \theta} + \xi_4 \right) \left(\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial n \partial \theta}\right)_{\nu} + \xi_5 \right)}{\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial n^2} \right)_{\nu, \theta} + \xi_6} = \\ & = C_{0\nu}^* + \Delta C_{1\nu}^*. \quad (33) \end{aligned}$$

Заключение. Из выражения (33) видно, что учет корреляции в заполнении частицами всевозможных пар ячеек приводит к появлению малых добавок к молекулярной теплоемкости $C_{0\nu}^*$ модели, не учитывающей эти корреляции. Выполненные аналитические исследования создают предпосылки для проведения численных расчетов на ЭВМ.

Литература

1. Ротт, Л. А. Статистическая теория молекулярных систем. Метод коррелятивных функций условных распределений / Л. А. Ротт. – М.: Наука, 1979. – 280 с.
2. Наркевич, И. И. Молекулярно-статистическая теория неоднородных конденсированных сред: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / И. И. Наркевич. – СПб., 1993. – 223 л.
3. Ландау, Л. Д. Статистическая физика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. – М.: Наука, 1976. – Т. 5, Ч. 1. – 584 с.
4. Наркевич, И. И. Развитие классической статистической модели конденсированной молекулярной среды с целью расчета решеточной теплоемкости кристаллов / И. И. Наркевич, А. В. Жаркевич, Е. В. Фарафонтон // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2006. – Вып XIV. – С. 65–67.

ПРИМЕНЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ПРЕДСКАЗАНИЯ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Earthquake is a process of deformation and destruction which come of the Earth crust. The mode of this processes are physical-mechanical properties the Earth crust such as the deform solid and its stress state. Capacity of forecast the earthquakes is showed in this article. It is based on the kinetic of creep theory. The models applications of kinetic theory for description of vertical changes of the Earth crust by Niigata earthquake and San-Fernando earthquake confirmed that it show of physical-mechanical properties of stressed bodes. This theory is the base for earthquake forecast.

Введение. Землетрясения являются внешним проявлением процессов деформирования и разрушения, происходящих в земной коре. Характер этих процессов определяется физико-механическими свойствами земной коры как деформируемого твердого тела, а также ее напряженным состоянием, которое приводит земную кору в движение.

Движение земной коры носит постоянный характер. Скорость движения различна, и там, где скорость резко увеличивается за счет импульсного высвобождения энергии, возникают быстрые колебания, воспринимаемые нами как землетрясение.

Основная часть. Главная трудность для изучения землетрясений с позиций механики деформируемого твердого тела заключается в выяснении закономерностей движения земной коры. О составе и физико-механических свойствах земной коры как твердого тела имеются довольно четкие научные знания. Выработаны достаточно убедительные научные представления о силах, действующих на земную кору. На основе данной информации разработана статическая модель напряженного состояния, по которой давление вещества мантии уравнивается массой плит земной коры. Однако надежная модель движения плит земной коры, которое не является равномерным и сопровождается разрушениями в очагах, вызывающими землетрясения, еще не разработана.

Традиционно объяснение механизма возникновения землетрясений основывается на представлениях о предельных состояниях напряженных твердых тел, когда разрушение рассматривается как следствие возникновения в теле предельных напряжений или деформаций. По таким понятиям «землетрясения – это явления, при которых земная кора и верхняя мантия постоянно подвергаются воздействию обширного поля сил. В ослабленных участках коры внезапно образуются трещины, при этом единым импульсом высвобождаются напряжения и деформации и возбуждаются сейсмические волны» [1]. Поле сил, действующих на земную кору, создается веществом мантии, поднимающимся из глубин Земли. За счет этих сил при достижении деформации предельных значений происходит скачкообразная подвижка плит (со-

гласно теории тектоники плит), что на поверхности земли ощущается как землетрясение.

Приведенное представление о механизме разрушения горных пород при землетрясении основывается на результатах кратковременных испытаний на сжатие, которые до настоящего времени остаются основой для построения теорий прочности. В рамках данных сведений выработаны такие понятия, как пределы прочности материалов и предельные деформации, при достижении которых материал разрушается. Применение таких подходов к разрушению эффективно для строительной практики, где ставится целью, чтобы проектируемое сооружение не достигло предельного состояния в процессе эксплуатации. И это в подавляющем большинстве случаев удается, так как имеются надежные методы статических расчетов, а также большой накопленный опыт экспериментальных исследований.

Совершенно иная ситуация с прогнозом землетрясений, где требуется точно знать момент наступления предельного состояния. Традиционные теории прочности не дали ответа на данный вопрос. Основным недостатком этих теорий является отсутствие обоснованного учета в них такого важного фактора, как время. Исследования второй половины прошлого столетия убедительно показали, что прочность материалов зависит от времени и скорости приложения нагрузки [2]. Материал может разрушаться при любых напряжениях, и вводится такое понятие долговечности, как время до разрушения тела при заданном напряжении.

С позиций кинетической концепции прочности эксперимент по моделированию землетрясения может выглядеть следующим образом. Образец горной породы подвергается сжатию по классической методике [1] напряжениями, меньшими предела прочности. Засекается время до сдвига, при этом измеряются деформации между случайно выбранными точками. Данный эксперимент соответствует испытаниям на ползучесть. Именно такой эксперимент ставит природа с земной корой, а наши исследования связаны с измерениями деформаций между точками на земной поверхности или на некоторой глубине, объединенными в ту или иную систему. Для успеш-

ного предсказания времени землетрясения необходима теория, позволяющая описать изменения данных деформаций до момента разрушения породы. Нами предлагается такая зависимость в следующем виде [3, 4]:

$$t = \tau_0 \ln \frac{\delta}{\varepsilon} \exp \frac{U_0 - \gamma \sigma_0 \delta / \varepsilon}{kT}, \quad (1)$$

где τ_0 – период колебаний атома (принимается 10^{-13} с); δ – деформация, соответствующая разрыву межатомной связи; ε – деформация; U_0 – энергия активации процесса ползучести, принимаемая равной энергии самодиффузии; γ – коэффициент с размерностью объема, приводящий напряжения к энергии активации процесса ползучести; σ_0 – напряжения от нагрузки; k – постоянная Больцмана; T – температура; t – время, необходимое на развитие соответствующей деформации.

На рис. 1 графически представлена такая зависимость, отражающая в соответствии с формулой (1) изменение деформаций во времени в координатах $\varepsilon' - t'$ от начала приложения нагрузки до разрушения. На рис. 1 показан еще один параметр δ , который рассматривается как предельная деформация межатомной связи, при которой она рвется.

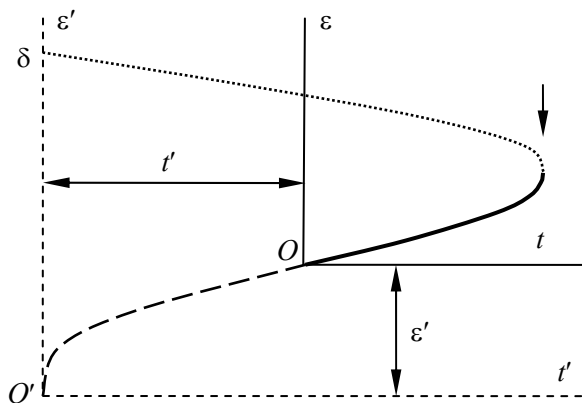


Рис. 1. Изменение деформаций во времени при ползучести

При описании деформаций, предшествующих землетрясению, с помощью формулы (1) мы должны иметь в виду, что нам не известно начало процесса, вызвавшего это землетрясение, т. е. точка, деформацию которой мы измеряем, уже получила до начала измерений какую-то деформацию ε' . На рис. 1 показана такая точка O с начальной деформацией ε' . Таким образом, для привязки формулы (1) к координатам реальных измерений $\varepsilon - t$ мы должны ввести в нее еще один параметр ε' , представляющий собой деформацию, полученную исследуемой точкой до начала измерений. С учетом данной деформации формула (1) преобразуется к следующему виду:

$$t = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma \sigma_0 \delta / \varepsilon'}{kT} \times \left(\ln \frac{\delta}{\varepsilon + \varepsilon'} \exp \frac{\gamma \sigma_0 \delta \varepsilon}{\varepsilon' (\varepsilon + \varepsilon') kT} - \ln \frac{\delta}{\varepsilon'} \right). \quad (2)$$

Для определения долговечности, согласно теории ползучести [3], необходимо рассчитать напряжения σ , соответствующие разрушению тела, из следующего уравнения:

$$\frac{\gamma \sigma}{kT} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = 1. \quad (3)$$

Затем определим соответствующую деформацию $\varepsilon = (\sigma_0 \delta / \sigma) - \varepsilon'$, при подстановке которой в формулу (2) получим время до землетрясения.

Применим рассматриваемую теорию к описанию реальных деформаций поверхности Земли перед землетрясением. В качестве таких данных используем результаты измерений вертикальных смещений нивелирных реперов вдоль побережья Японского моря до и после землетрясения Ниигата в 1964 г. при фиксированной станции Касивадзаки. На рис. 2 показана схема расположения нивелирного хода и данные по смещению некоторых реперов [3, 4].

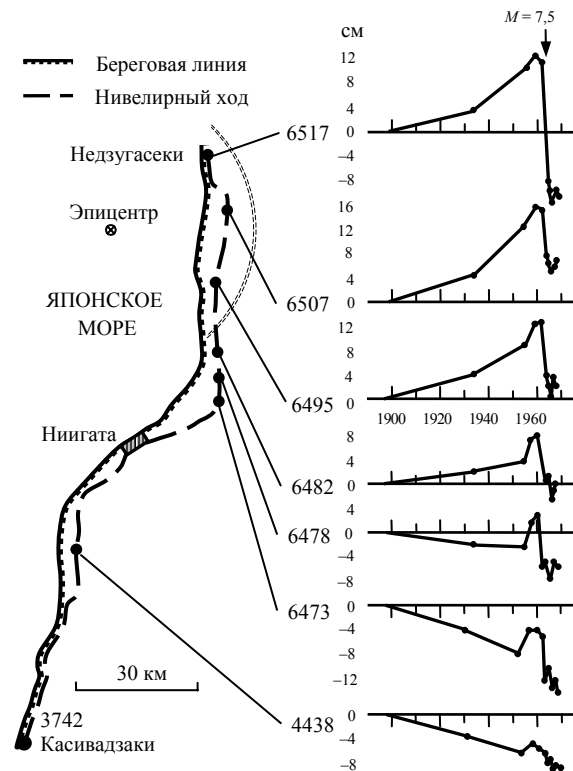


Рис. 2. Изменение вертикальных смещений нивелирных реперов до и после землетрясения Ниигата при фиксированной станции Касивадзаки [3, 4]

Как видно из рис. 2, смещения реперов не носят одинаковый характер. Для выбора данных,

которые будем описывать нашей теорией, основываемся на эмпирической зависимости Дамбары [4] между магнитудой землетрясения и средним радиусом области земной поверхности, охваченной процессом деформирования в предверии землетрясения. По данной зависимости для магнитуды 7,5 радиус проявления деформаций землетрясения составил 35 км (на рис. 2 соответствующая граница области деформаций отмечена двойной штриховой линией). Мы несколько расширили данный диапазон и для сравнительного анализа настоящей теории и формулы Дамбары включили в исследования результаты измерений по ближайшему к трем четвертому реперу. Значение температуры принималось с учетом глубины эпицентра землетрясения и правила повышения температуры на 20 К на каждый километр (в данном случае эта глубина принята около 30 км).

На рис. 3, *a* сплошной кривой отражена зависимость деформаций ползучести во времени, построенная по формуле (2) в соответствии с результатами измерений смещений указанных выше четырех реперов. Для построения такой кривой применялись следующие значения входящих в формулу (2) параметров: $U_0 = 380$ кДж/моль; $\gamma = 0,08$ кДж/(моль · МПа); $\sigma_0 = 90$ МПа; $\delta = 51$ см; $\varepsilon' = 15$ см; $RT = 7$ кДж/моль.

Используем еще одну возможность применения зависимости (2) для описания деформаций земной поверхности перед землетрясением. В работе [4] приводятся данные по изменению высот семи реперов при землетрясении 1971 г. в Сан-Фернандо. Используя формулу Дамбары, дающую радиус около 10 км, мы отобрали результаты измерений для ближайших к эпицентру землетрясения трех реперов и подобрали параметры, позволившие наиболее близко описать эти данные с помощью формулы (2). При этом мы учитывали, что глубина эпицентра землетрясения составила 8 км, а магнитуда $M = 6,4$. На рис. 3, *b* соответствующими значками показаны данные за 10 лет по измерению высот реперов *c*, *d* и *e*, а также сплошная кривая, построенная по зависимости (2) с использованием следующих значений входящих в зависимость (2) параметров: $U_0 = 195$ кДж/моль; $\gamma = 0,083$ кДж/(моль · МПа); $\sigma_0 = 100$ МПа; $\delta = 70$ см; $\varepsilon' = 30$ см; $RT = 3,6$ кДж/моль.

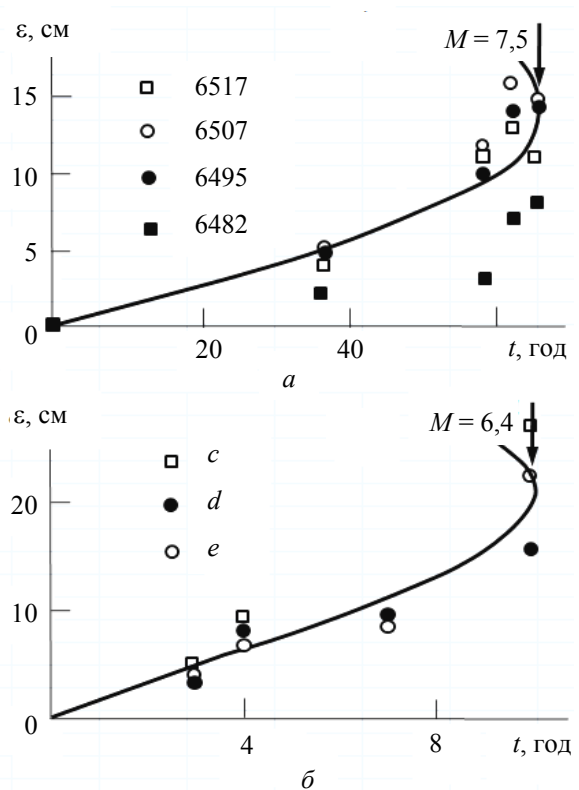


Рис. 3. Зависимости изменения вертикальных смещений поверхности земли во времени при землетрясениях: *a* – в Ниигата; *b* – Сан-Фернандо

Заключение. Приведенные примеры применения кинетической теории подтверждают, что она достаточно близко отражает развитие физико-механических процессов, происходящих в напряженных телах, в том числе и в земной коре, и может служить основой для разработки методики предсказания землетрясений.

Литература

1. Стеликов, Н. Е. Кинетика деформирования и разрушения твердых тел при ползучести / Н. Е. Стеликов // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2004. – № 3. – С. 60–63.
2. Стеликов, Н. Е. Кинетическая теория ползучести: монография / Н. Е. Стеликов. – Горки: Ред.-изд. отдел БГСХА, 2006. – 104 с.
3. Моги, К. Предсказание землетрясений / К. Моги. – М.: Мир, 1988. – 382 с.
4. Рикитаке, Т. Предсказание землетрясений / Т. Рикитаке. – М.: Мир, 1979. – 390 с.

В. В. Чаевский, ст. преподаватель; В. Б. Дроздович, доцент; В. В. Углов, профессор (БГУ)

ВЛИЯНИЕ КОМПРЕССИОННЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ПОТОКОВ НА ФАЗОВЫЙ СОСТАВ И ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ Mo-ПОКРЫТИЙ НА Ni-ОСНОВЕ

The Mo-coatings were formed by the method of condensation from a plasma phase in a vacuum with ion bombardment of Ni-surfaces. The investigations of the changes of element, phase composition coatings, the surface morphology as well as electrochemical behavior in alkaline solution after treatment by compression plasma flows were studied. Mo-coatings contain separate obtained cubic α – Mo phase and fragmentary solid solution Mo in Ni. Such coatings exclude hydrogenation of Ni foundation in alkaline solution and possess enlarged electrocatalytic properties while emitting hydrogen and oxidgen.

Введение. В настоящее время продолжают-ся интенсивные поиски путей повышения водород-углеродного отношения при аккумуляции водорода до практически приемлемого уровня с целью применения в топливных элементах для транспортных средств или большой и малой стационарной энергетики. Сплав Ni – Mo используется как самостоятельное высокоэффективное каталитическое покрытие в качестве электрода-катализатора, а также в роли подслоя для многослойных катализаторов, как составная часть ренеевских сплавов Ni – Al – Mo, Ni – Mo – Ti – Al, Ni – Mo – Zn и др. [1]. Особое внимание в этом направлении уделяется композитам на их основе, которые в свою очередь могут быть применены как электродные материалы прежде всего для обратимой водородной реакции.

В последнее время среди методов обработки поверхности различных материалов широко изучаются и начинают использоваться способы, основанные на высокоэнергетических технологиях, и методы, комбинирующие различные технологии. В результате чего значительно возрастают физико-механические, антикоррозионные и другие свойства обрабатываемых материалов, что позволяет существенно расширить их области применения [2]. Анализ современного состояния исследований в области поверхностной обработки материалов показывает широкие возможности лазерной обработки, основанной на способности лазерного излучения создавать на малом участке поверхности высокие плотности теплового потока, необходимые для интенсивного нагрева или расплавления практически любого материала, что приводит к изменению механических свойств поверхности [3]. Тем не менее, в сравнении с лазерной обработкой, плазменная модификация поверхности имеет ряд преимуществ, заключающихся в большей величине обрабатываемой площади, возможности ионной имплантации плазмообразующего вещества и сравнительно малом времени воздействия.

Целью данной работы было исследование состава и электрохимических свойств поверх-

ности никеля, обработанной молибденом, с помощью комбинирования нескольких ионно-плазменных методов.

Экспериментальная часть. Mo-покрытия осаждались на никелевую фольгу методом конденсации с ионной бомбардировкой (КИБ) на установке типа «Булат» в два этапа [4]. Проводилась предварительная обработка ионами молибдена в вакууме (10^{-3} Па) при отрицательном потенциале подложки -1 кВ. Покрытия наносились при опорном напряжении $U_{оп} = 120$ В, при токе горения дуги катода 180 А, в атмосфере азота при давлении 10^{-1} Па. Температура при осаждении соответствовала $400\text{--}450^\circ\text{C}$. Толщина покрытий составляла $2\text{--}3$ мкм.

Компрессионные плазменные потоки получали с помощью магнитоплазменного компрессора (МПК) компактной геометрии, в котором ускорение плазмы в аксиально-симметричной системе двух электродов сопровождается ее сжатием за счет взаимодействия продольной составляющей тока с собственным азимутальным магнитным полем [5]. МПК, плазмообразующим веществом которого являлся азот, работал в режиме «остаточного газа» при давлении в диапазоне $100\text{--}500$ Па. Длительность разряда составляла 100 мкс. Количество разрядов изменяли от 1 до 5. Скорость плазмы компрессионного потока составляла $(4\text{--}7) \cdot 10^6$ см/с. Температура плазмы находилась в пределах $10^4\text{--}10^5$ К [6].

Морфология сформированных покрытий и элементный состав полученных соединений определялись методами рентгеноспектрального микроанализа (РСМА) и растровой электронной микроскопии (РЭМ) с помощью сканирующего электронного микроскопа LEO-1455VP. Фазовый состав полученных покрытий исследовался методом рентгеноструктурного анализа (РСА) посредством дифрактометра ДРОН-4.0.

Электрокаталитические свойства полученных образцов изучались вольтамперометрически с линейной разверткой потенциала в 1 М КОН среде при температуре $t = 20^\circ\text{C}$.

Результаты и их обсуждение. Полученные результаты РЭМ-исследований поверхности

образцов (рис. 1) подтверждают данные, что при воздействии компрессионных плазменных потоков (КПП) на образцы осуществляется нагрев поверхностных слоев, плавление покрытия и части подложки, а затем жидкофазное перемешивание обоих компонентов.

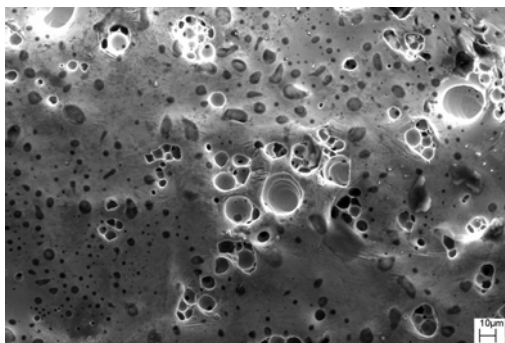


Рис. 1. РЭМ-изображение поверхности образца Ni (фольга) / Mo – КИБ после обработки КПП

Рентгеноструктурный анализ показывает, что при КИБ-осаждении молибдена на Ni-фольгу образуется отдельная фаза α – Mo с объемно центрированной кубической (ОЦК) структурой, не взаимодействующая с основой (рис. 2).

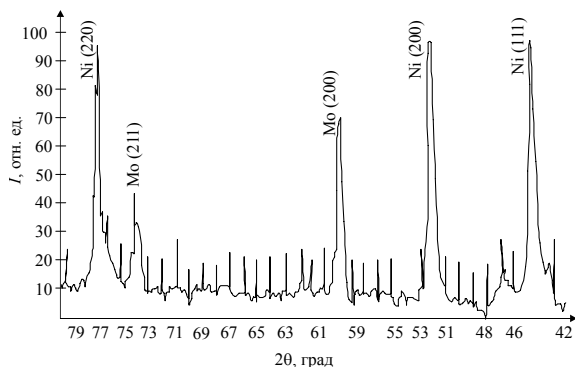


Рис. 2. Рентгенограмма Ni-фольги с Mo-покрытием

При КПП-обработке Mo-покрытия формируются отдельные фазы молибдена и никеля (рис. 3).

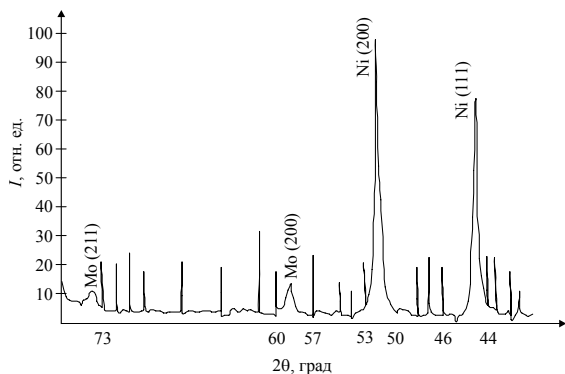


Рис. 3. Рентгенограмма образца Ni (фольга) / Mo – КИБ после обработки КПП

При этом увеличение мощности КПП приводит к уменьшению фазы α – Mo в поверхностном слое Ni-основы, о чем свидетельствует снижение интенсивности пика фазы молибдена на рентгенограммах. Уменьшение концентрации металлической составляющей в КИБ-покрытиях при обработке КПП объясняется увеличением поглощенной энергии и глубины легирования металла [7].

При определенном режиме обработки КПП образуется твердый раствор внедрения молибдена в никель Ni(Mo, N) со значительным преобладанием Ni-компонентов, что подтверждается данными рентгеноструктурного анализа (рис. 4), показывающими смещение положения дифракционных максимумов в область больших дифракционных углов, и рентгеноспектрального микроанализа (таблица).

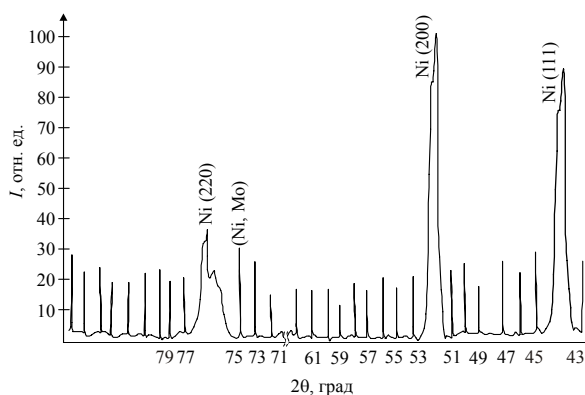


Рис. 4. Рентгенограмма Ni-фольги с Mo-покрытием после обработки КПП (количество импульсов $n = 1$)

Таблица

Результаты микроанализа образца Ni (фольга) / Mo – КИБ после обработки КПП

Элемент	Концентрация, ат. %	Погрешность, ат. %
Ni	92,60	$\pm 9,63$
Mo	4,71	$\pm 0,62$
Примеси	2,48	$\pm 0,82$

Полученные циклические вольтамперометрические (ЦВА) кривые (рис. 5) образцов Ni (фольга) / Mo – КИБ после обработки КПП демонстрируют значительное подобие с ЦВА-кривыми для эталонного никеля, тем самым подтверждая доминирование Ni-компонентов в поверхностном слое практически для всех образцов. Вольтамперометрические исследования, проведенные в 1 М КОН среде для образцов после обработки КПП, показали, что при потенциале $-0,2$ В происходит незначительное растворение молибдена только при первом цикле линейной развертки потенциала (рис. 5). При дальнейшем циклировании развертки потенциала в щелочном электролите исследуемые

покрытия проявляют высокую электрокаталитическую активность при выделении кислорода и водорода.

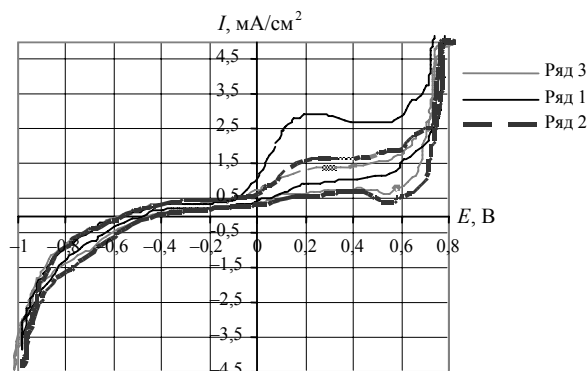


Рис. 5. Потенциодинамические iE -кривые образца Ni (фольга) / Мо – КИБ после обработки КПП

Необходимо отметить, что Мо – КИБ-покрытия, нанесенные на никель, показывают более стабильные электрокаталитические свойства при выделении водорода и кислорода только после нескольких циклов поляризации в области потенциалов от $-1,2$ до $+0,9$ В (рис. 5).

Заключение. Суммируя результаты проведенных исследований состава и свойств Мо-покрытий, нанесенных методом КИБ с последующей обработкой компрессионными плазменными потоками на никелевую фольгу, показали, что такие покрытия образуют отдельную конденсированную фазу α – Мо с ОЦК-структурой. При обработке КПП с плотностью мощности импульсов $1,3\text{--}4,0 \cdot 10^5$ Вт/см² и их количестве от 1 до 5 на никелевой основе образуется фрагментарно твердый раствор внедрения молибдена со значительным преобладанием Ni-компонентов.

Следует отметить, что полученные ионно-плазменные молибденовые покрытия после электрохимической поляризации в области потенциалов от $-1,3$ до $+0,9$ В в щелочном электролите исключают процессы наводороживания никелевой основы. Эти результаты представляют повышенный интерес ввиду того, что актуальной задачей в промышленности является снижение наводороживания стальных и других

конструкционных материалов, приводящее к их охрупчиванию с последующей ускоренной коррозией и потере прочностных свойств.

Литература

1. Отечественные электролизеры – необходимая составляющая водородной энергетики в России / Н. В. Кулешов [и др.] // Сб. тр. Междунар. симп. по водородной энергетике, Москва, 1–2 нояб. 2005 г. / МЭИ. – Москва, 2005. – С. 156–163.

2. Получение и свойства комбинированных Ni – (Ti, Cr)N и Ti – Cr – N покрытий на стали / В. В. Чаевский [и др.] // Покрытия и обработка поверхности. Эффективность, качество, конкурентоспособность: тез. докл. 5-й Междунар. конф., Москва, 9–11 апр. 2008 г. / РХТУ. – Москва, 2008. – С. 151–153.

3. Галенко, П. К. Высокоскоростная кристаллизация конструкционной стали при лазерной обработке поверхности / П. К. Галенко, Е. В. Харанжевский, Д. А. Данилов // Журнал технической физики. – 2002. – Т. 72. – Вып. 5. – С. 48–55.

4. Вакуумно-плазменные технологии формирования высокотвердых и износостойких материалов на основе нитридов переходных материалов / В. В. Углов [и др.] // ФТТ-2007: сб. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 23–26 окт. 2007 г.: в 3 т. / БГУ. – Минск, 2007. – Т. 3. – С. 290–292.

5. The effect of dense compression plasma flow on silicon surface morphology / V. V. Uglov [et al.] // Surf. Coat. Techn. – 2002. – Vol. 158/159. – P. 272–275.

6. Materials modification by compression plasma flows / V. V. Uglov [et al.] // Proceedings of 9th International Conf. on Modification of Materials with Particle Beams and Plasma Flows, Tomsk, Sept. 21–26, 2008. – Tomsk, 2008. – P. 153–157.

7. Углов, В. В. Воздействие компрессионных плазменных потоков на систему хром/титан / В. В. Углов, В. И. Шиманский, Н. Н. Черенда // Быстрозакаленные материалы и покрытия: сб. тр. 7-й Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф., Москва, 2–3 дек. 2008 г. / МАТИ. – Москва, 2008. – С. 208–212.

В. В. Тульев, доцент; А. В. Касперович, доцент

ЭЛЕМЕНТНЫЙ СОСТАВ, СТРУКТУРА И ФРИКЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОВЕРХНОСТИ РЕЗИНЫ, МОДИФИЦИРОВАННОЙ ИОННО-АССИСТИРУЕМЫМ ОСАЖДЕНИЕМ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ Mo, W

Surface layer and the interface formed by self-ion assisted deposition (SIAD) of metal W-, Mo-based coatings on cured synthetic rubber. The SIAD modified surfaces were examined using RBS in conjunction with RUMP code simulation and X-ray photoelectron spectroscopy with the aim of better understanding the factors which influence on friction. In this study it was shown that the element W-, Mo-based coatings produced by means of SIAD have a complicate composition. Thin films deposited on rubber consist of W or Mo, C, O, H, S and Zn. The last one appears in the coatings due to outdiffusion of sulphur from rubber. Friction tests on Me ion-assisted deposited layers on rubber showed a substantial reduction of wear resistance. The improvement of the tribological behavior between the active sites on the counterface may reduce the friction characteristics up to more than factor two, but depends on the deposited species and is sensitive to the regime of the film deposition. The observed results are attributed to a decrease of the real contact area between the modified rubber and the steel shaft or pin due to the "wavy" structure of the coating surface.

Введение. В последнее время получили развитие методы ионно-плазменного нанесения упрочняющих, защитных, декоративных, проводящих, изолирующих и других покрытий на материалы и изделия. Актуальной проблемой является создание защитных покрытий на эластомере с целью увеличения износостойкости поверхности, снижения коэффициента трения, повышения стойкости к воздействию агрессивных сред, изменения смачиваемости поверхности. В данной работе изучался элементный состав, структура и износостойкость металлосодержащих покрытий, сформированных на резине марки 7-ИПР-1068.

Основная часть. Для осаждения покрытий на резину использовался метод ионно-ассистируемого осаждения металлосодержащих покрытий [1]. На резину осаждались покрытия на основе Mo и W. Плотность ионного тока при осаждении составляла $\sim 4-5$ мкА/см², интегральный поток ассистирующих ионов – $2 \cdot 10^{16}$ см⁻², ускоряющая разность потенциалов – 10 кВ. Осаждение происходило при вакууме в мишенной камере ($\sim 10^{-2}$ Па).

Элементный состав и распределение элементов по глубине в модифицированных структурах исследовались с помощью метода резерфордского обратного рассеяния (РОР) ионов гелия. На рис. 1 представлены спектры РОР ионов гелия, полученных от резины до и после ионно-ассистируемого осаждения покрытий на основе Mo. Соответствующие сигналы на спектре свидетельствуют о том, что осажденные покрытия содержат атомы молибдена, атомы технологических примесей – С и О. Источником С и О является летучая фракция вакуумного масла паромасляного насоса [2]. Для покрытий на основе W были получены аналогичные результаты.

Концентрационные профили распределения элементов по глубине строились на основе моделирования спектров РОР с использованием компьютерной программы RUMP [3].

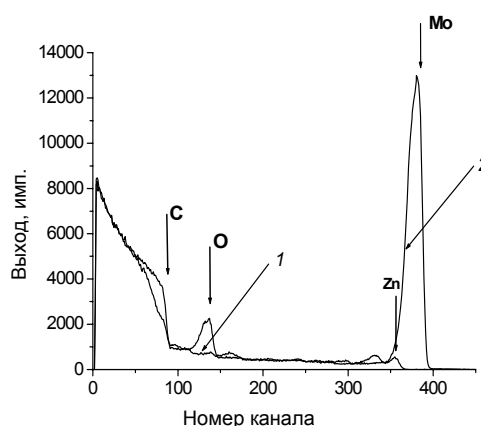


Рис. 1. Спектры РОР ионов гелия от резины до (1) и после (2) осаждения покрытий на основе Mo

На рис. 2 показаны концентрационные профили распределения компонентов по глубине в покрытии, сформированном на резине при осаждении W. Моделирование спектров РОР показало, что в состав покрытий входят атомы из подложки (резины) – H, C, N, S, Zn; атомы осажденного покрытия – W (Mo); а также атомы технологических примесей – С и О.

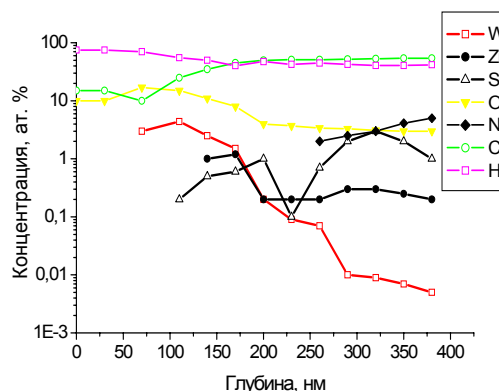


Рис. 2. Профили распределения компонентов по глубине в резине после осаждения покрытия на основе W

Анализ химических связей проводился на основании метода рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС) на электронном спектрометре Leybold WG с использованием MgK_{α} -излучения. Послойный анализ образцов выполнялся с помощью травления ионами Ag^{+} . В качестве маркера для определения точного значения энергетической линии на спектре применялся сигнал Au_{4f} . Для анализа химических связей с участием атомов-компонентов сформированных покрытий была осуществлена обработка фотоэлектронных спектров по участкам, соответствующим определенной спектральной линии. Проводились вычитание фона и последующее разложение спектральной линии на составляющие с помощью функций Гаусса. Обработаны спектральные линии фотоэлектронов, эмитированных из соответствующих электронных состояний атомов $C_{1s/2}$, $O_{1s/2}$, $W_{4f/2}$.

На рис. 3 представлен фотоэлектронный спектр, снятый с глубины 10 нм покрытия. Результаты обработки спектров РФЭС от структур W – резина свидетельствуют о том, что по основным компонентам элементный состав, идентифицируемый этим методом, качественно согласуется с данными, полученными в независимых опытах с использованием метода РОР ионов гелия.

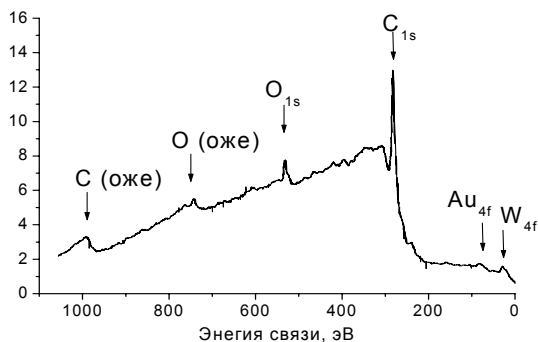


Рис. 3. Спектр РФЭС от резины после ионно-ассистированного осаждения покрытия на основе W

На рис. 4 показан спектр C_{1s} фотоэлектронов, снятый с поверхности покрытия. Спектр C_{1s} может быть разложен на две составляющие. Максимумы составляющих спектральных линий расположены соответственно в интервалах энергий связи: 282,9–283,6 и 283,9–284,0 эВ. Первая из них относится к графитоподобному углероду, вторая – к карбиду вольфрама WC [4]. Графитоподобный углерод в анализируемом слое составляет ~35%, остальное количество углерода в покрытии приходится на WC. Наличие этих составляющих характерно и для спектров, полученных при анализе более глубоких слоев покрытия.

На рис. 5 представлен спектр O_{1s} фотоэлектронов, снятый на поверхности покрытия.

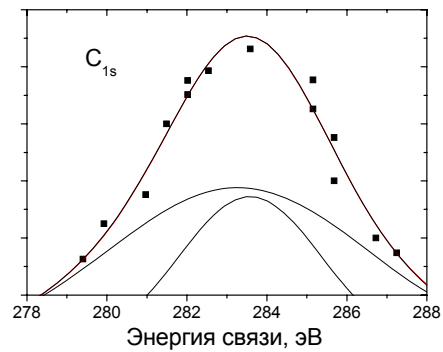


Рис. 4. РФЭС линии C_{1s} , полученной с поверхности резины, модифицированной ионно-ассистированным осаждением W

Спектр O_{1s} на поверхности образца может быть разложен на две составляющие с энергиями связи: 529,8–530,2 и 533,0–533,3 эВ. Первая из них может относиться к оксидам вольфрама WO_2 и WO_3 , вторая – к гидроксиду вольфрама $WOOH$ [4]. На оксиды вольфрама на поверхности приходится ~45% атомов кислорода.

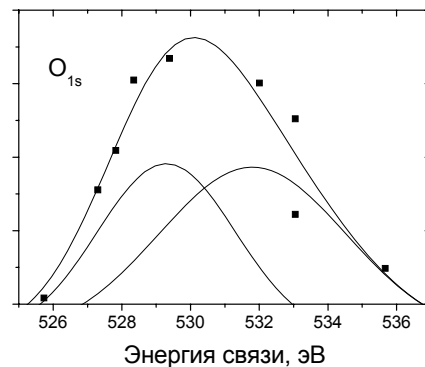


Рис. 5. РФЭС линии O_{1s} , полученной с поверхности эластомера, модифицированного ионно-ассистированным осаждением W

На рис. 6 показан фотоэлектронный спектр W_{4f} , снятый на глубине 10 нм того же покрытия, сформированного на эластомере. Спектр W_{4f} может быть разложен на три составляющие: 30,6–30,7, 35,5 и 36,1 эВ. Первая составляющая относится к металлическому вольфраму, вторая – к оксиду вольфрама WO_2 , третья – к оксиду вольфрама WO_3 [4]. Наличие этих составляющих характерно и для спектров, полученных при анализе других слоев покрытия. С увеличением глубины происходит суммарное изменение интенсивности сигнала, которая определяется концентрацией вольфрама в анализируемом слое, и интенсивностей отдельных составляющих. Причем на поверхности ~45% атомов вольфрама находится в металлическом состоянии, и с возрастанием глубины его содержание в этом состоянии несколько увеличивается.

Фрикционные характеристики поверхности модифицированной резины определялись на трибометре ТАУ-3М.

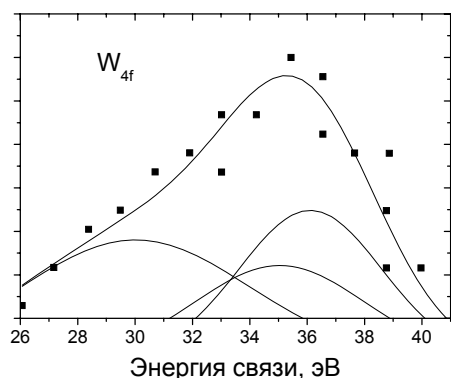


Рис. 6. РФЭС линии W_{4f} , полученной на глубине 10 нм покрытия на эластомере, модифицированного ионно-ассистируемым осаждением W

Для этого деструктивным методом изучались процессы разрушения исходной и модифицированной резины в результате сухого трения с ней стального штока при возвратно-поступательном движении. Результаты испытаний приведены на рис. 7.

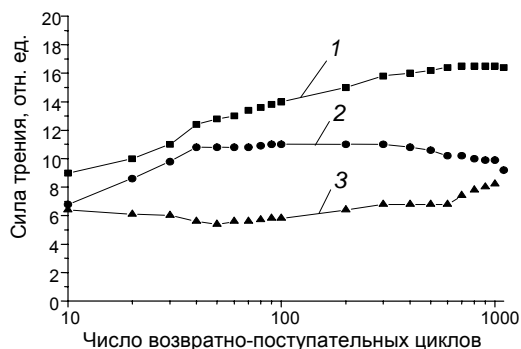


Рис. 7. Зависимость силы трения на поверхности исходной резины (1), резины с молибденовым (2) и вольфрамовым покрытиями (3) от числа возвратно-поступательных циклов

Сухое скольжение стержня по необработанной поверхности вызывает постоянное увеличение силы трения от 8,9 до 16,5 отн. ед. после 900 циклов (рис. 7, кривая 1) до момента разрушения резины. Подобное поведение резины с молибденовым покрытием наблюдается только на первой стадии скольжения, когда сила трения повышалась от 6,8 до 11,0 отн. ед. после 50 возвратно-поступательных циклов (рис. 7, кривая 2), но затем она остается постоянной до 300 циклов и медленно начинает снижаться до 9 отн. ед., что составляет величину 0,5 относительно исходной резины после 1000 циклов испытаний. Сила трения резины с осажденным покрытием на основе вольфрама при перемещении по ней стального стержня медленно уменьшается до 0,9 от начального значения 6 отн. ед. после 40–50 циклов скольжения (рис. 7, кривая 3), а затем этот параметр начинает медленно и постоянно увеличиваться до 9 отн. ед. после 1000 испытательных циклов.

Сила трения для резины с молибденовым и вольфрамовым покрытиями после 1500 циклов перемещения стержня сходна и достигает 0,55 от силы трения необработанной резины при таких же условиях испытания. Это показывает снижение износа резины даже после разрушения осажденного на нее покрытия.

При элементном анализе сформированных покрытий на резине было установлено, что приповерхностные слои полученных структур содержат 10–20 ат. % углерода и 20–30 ат. % кислорода, а также ~20–50 ат. % водорода. Поэтому покрытие, осажденное методом ионно-ассистируемого осаждения, можно рассматривать как пленку – аналог твердой смазки [5].

Закключение. Исследования поверхностных структур, полученных ионно-ассистируемым осаждением покрытий на основе Mo и W на резину марки 7-ИПР-1068, показали, что на поверхности образцов формируются покрытия, содержащие атомы осажденного покрытия (Mo, W), атомы технологических примесей (C, O), атомы из подложки (H, C, N, S, Zn). При этом установлено, что создаваемые покрытия содержат металлический W (Mo), углерод в виде графита, соединения углерода и водорода, а также карбиды и оксиды осаждаемых металлов.

Обнаружено, что поверхность резины с покрытиями на основе Mo и W обладает повышенной износостойкостью по сравнению с поверхностью исходной резины. Сила трения на поверхности модифицированной резины достигает 0,50–0,55 от силы трения на поверхности необработанной резины. Причиной повышенной износостойкости является формирование ионно-ассистируемым осаждением на поверхности резины покрытий – аналогов твердой смазки.

Литература

1. Esinger, W. Low energy ion assist during deposition – an effective tol for controlling thin film microstructure / W. Esinger // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. – 1997. – Vol. B127–128. – P. 796–808.
2. Тульев, В. В. Изучение состава покрытий, полученных ионно-ассистируемым осаждением хрома на подложки из алюминия, стали и кремния, ядерно-физическими методами и компьютерным моделированием / В. В. Тульев, И. С. Ташлыков // Физика и химия обработки материалов. – 2005. – № 3. – С. 54–57.
3. Doolittle, L. R. A semiautomatic algorithm for rutherford backscattering analysis / L. R. Doolittle // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. – 1986. – Vol. B15. – P. 227–234.
4. Нефедов, В. И. Рентгеноэлектронная и фотоэлектронная спектроскопия: справочник / В. И. Нефедов. – М.: Химия, 1984. – 256 с.
5. Materials and Processes for Surface and Interface Engineering / ed. Y. Pauleau. – Netherlands: Kluwer Acad. Publ, 1995. – 664 p.

ОСОБЕННОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЖИДКОСТНЫХ ЛАЗЕРОВ

The paper shows the effect of the solution viscosity and temperature on the value of polarization of stimulation radiation. We have examined the effect of excitation light intensity and E-vector orientation on polarization of radiation. With reduction of the temperature and increase in solution viscosity, the degree of polarization of radiation increases and tends to the limiting value. The limiting value of the degree of polarization of induced radiation equals one. Increase in the excitation light intensity leads to decrease in the excited-state lifetime of the molecules and increase in the degree of polarization of radiation. The value of the degree of polarization of radiation also depends on the E-vector orientation of the excitation light. The maximum value occurs in case of the orthogonal orientation to the axis of the resonator. It is shown that in cavities of different qualities the polarization of forced radiation of phthalimide solutions is mainly by the solvent viscosity and excitation power.

Введение. Механизм генерации излучения растворов органических соединений описывается на основе рассмотрения двух уширенных электронно-колебательных уровней. При этом лазерное излучение обусловлено переходами электронов с нижних колебательных подуровней возбужденного состояния на верхние колебательные подуровни основного состояния. Условия возникновения лазерного излучения различных систем определяются тремя факторами: оптическими свойствами активной среды, резонатором и накачкой активной среды. Естественно, что основные свойства вынужденного излучения (энергетические, спектральные и векторные) характеризуются этими факторами [1].

В ранних работах [2, 3] по исследованию излучения лазеров на растворах сложных соединений было установлено, что при возбуждении плоско поляризованным светом рубинового оптического квантового генератора (ОКГ) степень поляризации близка к предельному значению. Проведенные впоследствии исследования данного вопроса носят разрозненный характер, так как в них использовались активные среды из различных классов молекул, а эксперимент проводился при различных условиях.

Настоящая работа посвящена систематическому исследованию поляризации лазерного излучения растворов сложных соединений из

класса фталимидов в зависимости от состояния активной среды и поляризации возбуждающего излучения.

Основная часть. Для исследования степени поляризации лазеров на растворах красителей применялся поперечный вариант, принципиальная схема которого приведена на рис. 1. Возбуждение растворов осуществлялось излучением второй гармоники ($\lambda = 347$ нм) рубинового лазера с модулированной добротностью или импульсами второй гармоники ($\lambda = 532$ нм) лазера на алюминий-иттриевом гранате, активированный ионами неодима (АИГ: Nd^{+3}), работающего с частотой от 1 до 100 Гц. Длина волны возбуждения для конкретных соединений выбиралась такой, чтобы она попадала в длинноволновую область поглощения раствора красителя. В этом случае осцилляторы поглощения и излучения параллельны между собой и степень поляризации излучения принимает максимальное положительное значение. Поворот плоскости поляризации излучения накачки проводился при помощи пластинки $\lambda/2$, а ослабление возбуждения осуществлялось нейтральными светофильтрами. Разделение исследуемого излучения на компоненты выполнялось при помощи призмы Волластона, а измерение интенсивности этих компонент проводилось фотоэлектрическим способом.

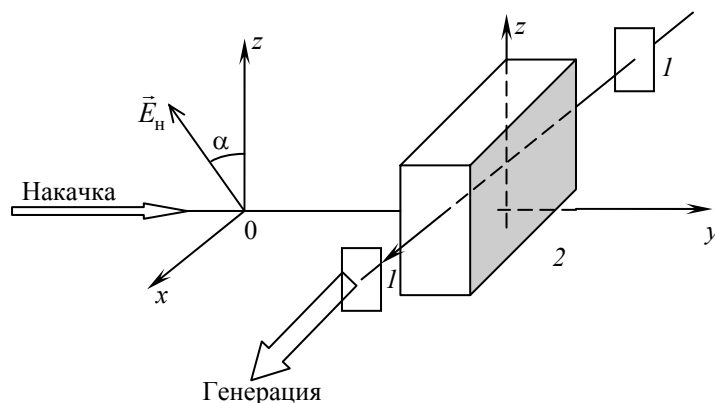


Рис. 1. Поперечный вариант накачки лазера на красителе с выбранной системой координат: 1 – зеркала, 2 – кювета с раствором красителя

При возбуждении изотропного раствора плоско поляризованным излучением распределение в пространстве возбужденных молекул, моделируемых линейными осцилляторами, является анизотропным. Состояние анизотропии распределения возбужденных молекул к моменту излучения генерации определяет степень поляризации лазерного излучения. Для изучения этого положения в работе проведено систематическое исследование степени поляризации лазерного излучения растворов фталимидов различной вязкости η в широком температурном интервале T . Вязкость и температура раствора влияют на интенсивность вращательной диффузии активных молекул, что в свою очередь определяет состояние анизотропии возбужденных молекул, а значит, величину степени поляризации излучения. Совместное влияние вязкости и температуры удобно характеризовать деполяризующим фактором T/η . Влияние этого фактора на степень поляризации излучения удобно представлять в виде $1/P = f(T/\eta)$.

На рис. 2 приведена данная зависимость для двух растворов исследуемых соединений. Представленная зависимость носит линейный характер, что позволяет непосредственно оценить время возбужденного состояния активных молекул, а также определить предельное значение степени поляризации излучения для жестких растворов при генерации излучения.

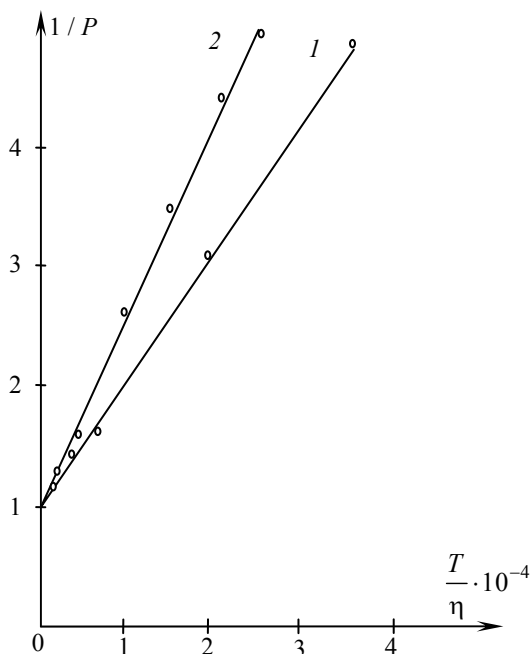


Рис. 2. Зависимость $1/P = f(T/\eta)$ для 3,6-диамино-N-метилфталимида (1) и 3-амино-N-метилфталимида (2) в глицерине

Рассчитанные численные значения τ_r для растворов фталимидов лежат в интервале $(1,5-3,0) \cdot 10^{-9}$ с (что на порядок ниже времени

возбужденного состояния при спонтанном излучении), а предельное значение $P_0 = 1$.

Таким образом, анализ полученных результатов показывает, что поляризация излучения генерации растворов сложных соединений, имея ряд специфических особенностей, во многом коррелирует с поляризацией флуоресценции и в значительной степени определяется интенсивностью броуновского вращательного движения активных молекул.

Степень поляризации вынужденного излучения растворов сложных соединений зависит от времени жизни возбужденного состояния активных молекул. С другой стороны, при вынужденном излучении время возбужденного состояния определяется развиваемой в резонаторе плотностью мощности излучения. Поэтому τ_r уменьшается с повышением интенсивности накачки, что должно приводить к увеличению степени поляризации излучения. В литературе даются единичные и не систематизированные сообщения об исследовании данного вопроса. Кроме того, имеющиеся результаты в некоторой мере противоречивы и объясняются неоднозначно.

Нами проведено систематическое исследование влияния плотности мощности возбуждающего света на поляризацию вынужденного излучения растворов фталимидов. На рис. 3 представлены типичные результаты исследуемой зависимости.

Для глицеринового раствора при $T = 293$ К (рис. 3, кривая 1) вынужденное излучение практически полностью поляризовано и не зависит от плотности мощности возбуждения. Этот факт связан с тем, что при большой вязкости раствора изменение времени возбужденного состояния активных молекул не оказывает влияния на состояние анизотропии распределения их и степень поляризации излучения не изменяется.

В изобутиловом спирте, вязкость которого на два порядка меньше глицеринового раствора, степень поляризации излучения (рис. 3, кривая 3) при пороговых уровнях накачки составляет 0,15. Превышение интенсивности накачки в 33 раза приводит к увеличению степени поляризации до величины 0,35. Кривая 2 (рис. 3) иллюстрирует зависимость P от интенсивности возбуждения глицеринового раствора при температуре 358 К, когда вращательное движение активных молекул становится достаточно интенсивным.

В заключение проанализируем закономерности поляризации вынужденного излучения растворов красителей в зависимости от ориентации вектора электрического поля \mathbf{E} световой волны возбуждающего излучения. Отметим, что если отсутствуют другие анизотропные элементы, то при интенсивном возбуждении

раствор можно рассматривать в оптическом отношении как одноосный кристалл [4]. В этом случае излучение представляет собой сумму двух независимых мод, линейно поляризованных по осям Z и Y . При этом коэффициенты усиления связаны соотношением $k_z = 3k_y$ при $\alpha = 0^\circ$ и $k_z = k_y$ при $\alpha = 90^\circ$. Величина степени поляризации излучения при этом определяется углом α и кратностью превышения накачки M над пороговым значением.

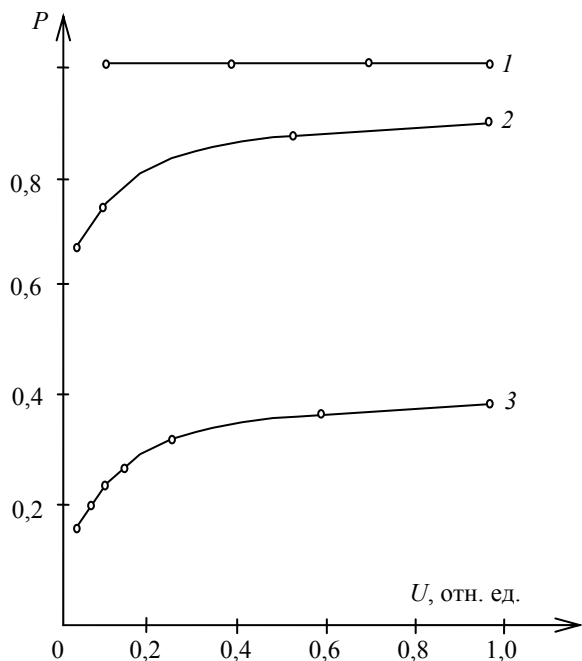


Рис. 3. Зависимость $P = f(U)$ для 4-амино-N-метилфталимида в глицерине (1) и 3-амино-N-метилфталимида в глицерине и изобутаноле (2, 3) при $T = 293$ К (1, 3) и $T = 358$ К (2)

На рис. 4 приведены результаты зависимости $P = f(\alpha)$ для 3,6-тетраметилфталимида в глицерине и изобутаноле. Полученные данные показывают, что для вязких растворов степень поляризации определяется только анизотропией распределения возбужденных молекул в рассматриваемой системе координат. Для маловязких растворов изучаемая величина характеризуется двумя факторами: анизотропией распределения и вращательной диффузией возбужденных молекул. В пределе при $\alpha = 90^\circ$ степень поляризации генерируемого излучения стремится к нулю.

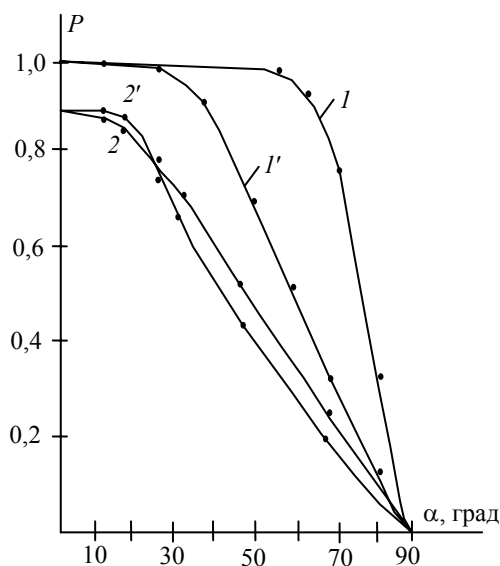


Рис. 4. Зависимость $P = f(\alpha)$ для раствора 3,6-тетраметилфталимида в циклогексаноле (1, 1') и изобутаноле (2, 2'): 1, 2 – накачка в пороге генерации; 1', 2' – $M = 10$

Заключение. Анализ полученных экспериментальных результатов показывает, что степень поляризации лазерного излучения растворов сложных молекул хорошо описывается осцилляторной моделью этих соединений. Значение степени поляризации определяется анизотропией распределения возбужденных молекул к моменту излучения. Полученные данные могут быть использованы для управления величиной степени поляризации лазерного излучения.

Литература

1. Рубинов, А. Н. Оптические квантовые генераторы на красителях и их применение / А. Н. Рубинов, В. И. Томин // Итоги науки и техники. – 1976. – Т. 9. – С. 5–127.
2. Laser-pumped stimulated emission from organic dye. Experimental studies and analytical comparisons / P. Sorokin [et al.] // IBM J. Res. and Dev. – 1967. – Vol. 11. – P. 130–148.
3. McFarland, B. Laser stimulated emission or organic dye / B. McFarland // Appl. Phys. Lett. – 1967. – Vol. 10. – P. 208–209.
4. Пикулик, Л. Г. Поляризация излучения и оптическая анизотропия растворов органических соединений / Л. Г. Пикулик, В. А. Чернявский, К. И. Рудик // Спектроскопия и люминесценция молекулярных систем. – Минск: БГУ, 2002. – С. 245–255.

ХОЛЛОВСКИЕ СВЧ-ИЗМЕРЕНИЯ В КРЕМНИИ ПРИ КОМНАТНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

When a plane polarized electromagnetic wave passes through a semiconductor and a static magnetic field is applied along the direction of propagation, there occurs a rotation of the plane of polarization. This effect has been analyzed and it was shown that at weak magnetic fields (assuming the relaxation time to be energy independent) the angle of rotation of the plane of polarization can be explained by additional imposed Hall field and can be expressed to a first order of approximation by proportional relationship between angle of rotation and magnetic field. The formula obtained can be used at room temperatures and was verified experimentally using *n*-Si crystal. The mobility deduced from the slope of measured dependence was found to be in good agreement with that measured by usual Hall dc technique.

Введение. Для исследования полупроводниковых материалов широко применяются импедансные и резонансные методы СВЧ-диапазона [1, 2]. Способ зондирования образцов СВЧ-излучением, основанный на измерении угла поворота плоскости поляризации в магнитном поле, приложенном вдоль направления распространения зондирующей волны (эффект Фарадея), обеспечивает бесконтактное определение подвижности свободных носителей заряда. Эффект Фарадея в микроволновом диапазоне впервые наблюдался в металлах, полупроводниковых и ферромагнитных материалах [3, 4]. Продольное магнитное поле приводит к появлению в проводящей среде поперечного холловского поля, поэтому одним из механизмов поворота плоскости поляризации является эффект Холла, а угол поворота зависит от холловских параметров зондируемого образца. Использование данного метода наиболее целесообразно для материалов с низкой проводимостью $\sigma \sim 1 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, так как глубина проникновения зондирующего излучения $\delta \sim (\mu_0 \omega \sigma)^{-1/2}$ на частоте $\omega \sim 10^{10}$ Гц составляет несколько миллиметров и угол поворота плоскости поляризации можно измерять в сравнительно слабом магнитном поле. При интерпретации результатов холловских СВЧ-измерений приходится учитывать время релаксации τ носителей заряда, вследствие чего измерения проводятся при низких температурах, при которых τ мало по сравнению с частотой сигнала.

В данной работе получена и экспериментально проверена упрощенная формула для угла поворота плоскости поляризации, найдены условия, при которых подвижность носителей можно оценить из измерений при комнатной температуре, без необходимости использования данных о времени релаксации и эффективной массе носителей заряда.

Основная часть. Поворот плоскости поляризации можно проанализировать на основе приближения сферических энергетических поверхностей с использованием модели Друде – Зенера [5]. Рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ , концентрацией свобод-

ных носителей заряда n , обладающих эффективной массой m . Постоянное магнитное поле \vec{B} приложено в направлении распространения. Уравнение движения носителей заряда имеет вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m}{\tau} \vec{v} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (1)$$

где v – скорость дрейфа носителей заряда; τ – время релаксации; e – абсолютное значение заряда электрона.

Если движение носителей заряда происходит в плоскости xy (постоянное магнитное поле направлено по оси z), то уравнение (1) можно представить в следующем виде:

$$m \frac{d\upsilon_{\pm}}{dt} + \frac{m}{\tau} \upsilon_{\pm} = eE_{\pm} \mp ieB, \quad (2)$$

где $\upsilon_{\pm} = \upsilon_x \pm i\upsilon_y$, $E_{\pm} = E_x \pm iE_y$ – скорости носителей под действием поля волны с напряженностью электрического поля E_{\pm} , знаки «+» и «-» относятся к волнам с правой и левой круговой поляризацией соответственно; υ_x и υ_y , E_x и E_y – проекции скорости носителей и напряженности поля на оси x и y соответственно.

Если пренебречь зависимостью τ от энергии носителей, то с учетом решения уравнения (2) для синусоидального электрического поля можно получить выражение для плотности тока, включающей в себя ток проводимости и ток смещения:

$$j = nev + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_{\pm}}{\partial t} = \left[\epsilon_{\text{ст}} \epsilon_0 - \frac{(ne^2/\omega)(m\omega \pm eB)}{(m/\tau)^2 (m\omega \pm eB)^2} \right] \frac{\partial E_{\pm}}{\partial t} + \frac{ne^2 m / \tau}{(m/\tau)^2 + (m\omega \pm eB)^2} E_{\pm}, \quad (3)$$

где ϵ_0 – диэлектрическая постоянная; $\epsilon_{\text{ст}}$ – диэлектрическая проницаемость в постоянном электрическом поле; ω – циклическая частота зондирующего излучения.

Из (3) следует, что значениям E_+ и E_- соответствуют значения диэлектрической проницаемости и проводимости:

$$\varepsilon_{\pm} = \varepsilon_{\text{ст}} - \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{(\sigma_0 / \omega)(\omega\tau \pm \mu B)}{1 + (\omega\tau \pm \mu B)^2}, \quad (4)$$

$$\sigma_{\pm} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega\tau \pm \mu B)^2},$$

где $\sigma_0 = ne^2\tau / m$ – проводимость на постоянном токе; $\mu = e\tau / m$ – подвижность носителей заряда.

Угол поворота θ плоскости колебаний вектора \vec{E} после прохождения образца толщиной l можно найти из соотношения

$$\theta = \frac{1}{2}(\alpha_- - \alpha_+)l, \quad (5)$$

где α_{\pm} – вещественная часть постоянной распространения k -й плоской электромагнитной волны в объеме проводящей немагнитной среды, которая выражается известными формулами [6]:

$$k_{\pm} = \mu_0 (\varepsilon_{\pm} \omega^2 - i\sigma_{\pm} \omega) = \alpha_{\pm} + i\beta_{\pm}, \quad (6)$$

$$\alpha_{\pm} = \omega(\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2} \left[\frac{1}{2} \left[\varepsilon_{\pm} \left(1 + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\pm} \omega} \right)^{1/2} + 1 \right] \right]^{1/2}. \quad (7)$$

Используя формулы (4)–(6), можно получить выражение для угла θ в приближении слабых магнитных полей и малых значений параметров $\omega\tau$ и μB ($\omega\tau \ll 1$, $\mu B \ll 1$):

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \frac{\sigma_0 \mu B l}{\sqrt{\varepsilon_{\text{ст}}}} F(s), \quad (8)$$

где $F(s)$ – функция от параметра $s = \sigma_0 / \omega \varepsilon \varepsilon_0$, которая графически представлена на рис. 1.

На частотах $\omega > 10^{10}$ Гц для большинства полупроводников значение $s \gg 1$. Расчеты показывают, что при $s > 1$ значение функции $F(s)$ близко к 1. Поэтому формула (8) примет вид

$$\theta = 132,78 \frac{\sigma_0 \mu B l}{\sqrt{\varepsilon_{\text{ст}}}}. \quad (9)$$

Выражение для постоянной k , совпадающее с (6), также можно получить из решения уравнений Максвелла, записанных с учетом холловского поля \vec{E}_H :

$$\vec{E}_H = R\vec{B} \times \vec{j} = \mu\vec{B} \times \vec{E},$$

$$\nabla \times (\vec{E} + \vec{E}_H) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma_0 \vec{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \left(\frac{\partial (\vec{E} + \vec{E}_H)}{\partial t} \right).$$

Если постоянное магнитное поле B приложено вдоль направления распространения плоской волны, то выражение для k имеет вид

$$k_{\pm}^2 = \mu_0 \left[\frac{\omega^2 \varepsilon \varepsilon_0 [1 + (\mu B)^2] \pm \omega \sigma_0 \mu B - i\omega \sigma_0}{1 + (\mu B)^2} \right]. \quad (11)$$

Это соотношение совпадает с выражением для k_{\pm} , которое получается подстановкой формулы (4) в уравнение (6) при условии $\omega\tau \ll \mu B$. Поэтому применение предельной формулы (11) приводит к выражению (8) для угла θ .

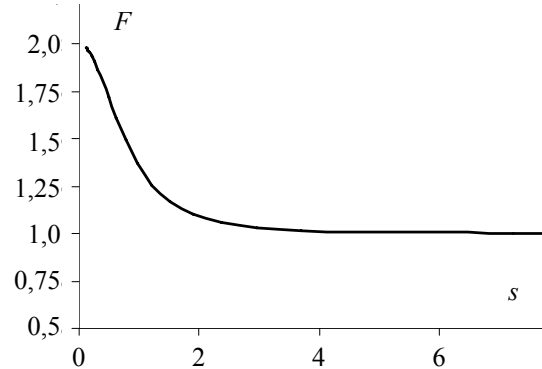


Рис. 1. Зависимость функции F от параметра $s = \sigma_0 / \omega \varepsilon \varepsilon_0$ при значении проводимости $\sigma_0 = 1 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, $\varepsilon = 12$

Эффект Фарадея при прохождении зондирующей СВЧ-волны вызван анизотропией диэлектрической проницаемости, создаваемой продольным магнитным полем. Поворот плоскости колебаний в полупроводнике в слабых магнитных полях ($\mu B \ll 1$) можно объяснить наложением холловского поля на электрическое поле зондирующей волны. Подвижность в формуле (9) определяется холловской подвижностью и зависит от параметров полупроводникового образца.

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 2. Зондирующая волна с частотой 9,6 ГГц формировалась клистронным генератором. Волновод имел стандартное прямоугольное сечение и был рассчитан на прохождение моды TE_{11} . Образец слаболегированного монокристаллического кремния n -типа с удельным сопротивлением $0,5 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ и толщиной 4 мм помещался в неподвижную цилиндрическую переходную латунную секцию, состоящую из двух коаксиальных цилиндров. Один из цилиндров мог поворачиваться с помощью червячной передачи и был соединен со второй прямоугольной секцией.

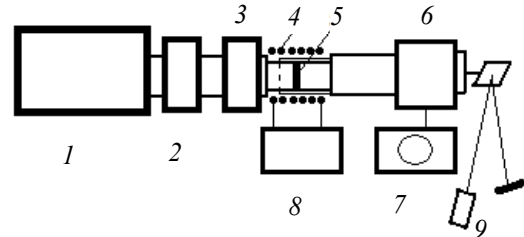


Рис. 2. Схема экспериментальной установки: 1 – генератор; 2 – аттенуатор; 3 – волномер; 4 – соленоид; 5 – образец; 6 – детектор; 7 – осциллограф; 8 – источник питания; 9 – лазер

На цилиндрическую секцию одевался соленоид, который создавал продольное магнитное поле в месте расположения образца. Направление магнитного поля совпадало с направлением образца 111. Угол поворота цилиндрической секции измерялся по смещению светового пятна луча лазера, отраженного от зеркальца, которое жестко соединено с вращающейся секцией.

Мощность прошедшей волны измерялась калориметрическим детекторным блоком, соединенным со второй прямоугольной секцией. Предварительно проводилась проверка прохождения волны без образца. Регистрируемая мощность изменялась пропорционально $\cos^2\varphi$ (φ – угол между главными плоскостями обеих секций волноводов). Такая же зависимость получалась и со вставленным образцом без приложенного магнитного поля. При смене направления магнитного поля путем переключения полярности источника питания соленоида направление поворота плоскости поляризации волны менялось на противоположное. Воспроизводимость измеренного угла поворота была не хуже 5%.

На рис. 3 представлена зависимость угла поворота плоскости поляризации θ от магнитной индукции, измеренная при комнатной температуре.

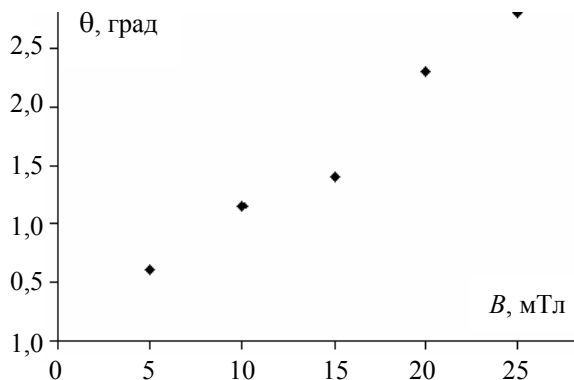


Рис. 3. Зависимость угла поворота плоскости поляризации в образце кремния от магнитной индукции

Наблюдаемая зависимость достаточно точно аппроксимируется линейной функцией. Значение подвижности оценивалось по коэффициенту наклона этой зависимости с помощью формулы (9) и составило $0,34 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$.

При расчетах использовалось значение $\epsilon_{\text{ст}} = 12$. В условиях опыта соблюдались сле-

дующие условия: $\omega\tau \ll 1$ и $\mu B \ll 1$. Для оценок принималось значение времени релаксации $\tau \sim 2 \cdot 10^{-13} \text{ с}$, значение параметров $\omega\tau$ и μB составляло 0,13 и 0,07 соответственно. Полученное значение подвижности хорошо согласуется со значением, измеренным при комнатной температуре на постоянном токе ($0,38 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$).

Заключение. Получено простое выражение для угла поворота плоскости поляризации, который в слабом магнитном поле и на частотах $\sim 10^{10} \text{ Гц}$ пропорционален магнитной индукции, причем коэффициент пропорциональности зависит от подвижности и не зависит от времени релаксации и эффективной массы носителей заряда. Такая зависимость позволяет дать оценку подвижности носителей из измерений при комнатной температуре. При этих условиях эффект Фарадея объясняется наложением холловского поля на поле электромагнитной волны. Выведенная формула проверена экспериментально на образце монокристаллического кремния. Полученные результаты можно применять для бесконтактных измерений высокоомных полупроводниковых образцов.

Литература

1. Density and well width dependences of the effective mass of two-dimensional holes in (100) GaAs quantum wells measured using cyclotron resonance at microwave frequencies / H. Zhu [et al.] // Solid State Commun. – 2007. – Vol. 141, № 9. – P. 510–513.
2. Broadband complex permittivity measurement techniques of materials with thin configuration at microwave frequencies / M. Kenichiro [et al.] // J. Appl. Phys. – 2005. – Vol. 98, № 8. – P. 084107/1–084107/8.
3. Cooke, S. P. Hall and Kerr effects at microwave frequencies / S. P. Cooke // Phys. Rev. – 1948. – Vol. 74, № 6. – P. 7006–7012.
4. Hogan, C. L. The Ferromagnetic Faraday Effect at Microwave Frequencies and its Applications / C. L. Hogan // Phys. Rev. – 1953. – Vol. 25, № 1. – P. 258–262.
5. Маделунг, О. Физика полупроводниковых элементов III и V групп / О. Маделунг. – М.: Мир, 1968. – 277 с.
6. Ахиезер, А. Л. Электродинамика высоких энергий в веществе / А. Л. Ахиезер, Н. Ф. Ахиезер. – М.: Наука, 1993. – 343 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ТРИПЛЕТНОГО СОСТОЯНИЯ ХЛОРОФИЛЛА А ПО ДАННЫМ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНОГО ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ

Quenching of the triplet states for system of chlorophyll *a* and meso-tetraphenylporphin in degassed toluene at 298 K was studied using flash photolysis technique. The data obtained evidences for the quenching is caused by intermolecular *T-T*-energy transfer between molecules of these compounds. It is suggested that such quenching occurs via formation of the long-lived excited complexes consisting of interacting molecules. Energy of the triplet state of chlorophyll was determined ($E_T = 10\,430\text{ cm}^{-1}$) on the basis of kinetic analysis of mechanism of intermolecular triplet state energy transfer in the excited complexes. Such value of E_T is close to the values those are known for this pigment in some frozen solutions at 77 K. It was made conclusion that one extra ligand was added to Mg ion in the chlorophyll molecule.

Введение. В некоторых процессах, происходящих при фотосинтезе, предполагается участие триплетного состояния (ТС) хлорофиллов. Одна из основных характеристик ТС – его энергия (E_T). E_T хлорофиллов *a* (ХЛ) и *b* определены в ряде работ по регистрации фосфоресценции их твердых растворов при температуре 77 К [1, 2]. В разных исследованиях положение полос фосфоресценции ХЛ было различным. Это отличие, вероятно, обусловлено образованием различных ассоциатов и сольватов ХЛ. Значительное число таких форм вызвано присутствием в молекуле ХЛ ряда специфических групп: двух карбоксильных и карбонильной, атомы кислорода которых могут участвовать в образовании межмолекулярных водородных связей, и присутствием иона магния, способного образовывать координационные связи с атомами кислорода и азота других молекул. Эти процессы усиливаются при понижении температуры. Представляет интерес установить E_T ХЛ в жидком растворе при комнатной температуре в среде инертного растворителя в отсутствие ассоциатов и специфических сольватов. В данной работе определено значение E_T для ХЛ при температуре 298 К в толуоле. Поскольку выход фосфоресценции ХЛ при таких условиях мал, для нахождения E_T использован метод, основанный на данных по межмолекулярному *T-T*-переносу энергии.

Основная часть. Измерения выполнены на установке импульсного лампового фотолиза с фотоэлектрической регистрацией. Энергия разряда составляла 100 Дж при его длительности $\tau_{1/2} = \sim 20$ мкс. Растворы были обезгажены, используя стандартную методику многократного замораживания – откачивания под вакуумом – оттаивания. Тушение триплетных состояний для системы ХЛ – мезотетрафенилпорфин (ТФП) изучено путем регистрации *T-T*-поглощения соединений. При исследовании тушения ТС ХЛ молекулами ТФП для фотовозбуждения применен стеклянный светофильтр КС-18. При этом возбуждались в основном молекулы ХЛ (для максимума его длинноволновой полосы длина волны равна 670

нм, а для подобной полосы ТФП – 646 нм). Скорость поглощения света молекулами ХЛ в рассмотренных условиях мала и концентрация его молекул в ТС невелика. Поэтому влияние процесса триплет-триплетной аннигиляции на кинетику дезактивации триплетного состояния незначительно. Дезактивация последнего для ХЛ происходила по экспоненциальному закону. На рис. 1 приведены зависимости Штерна – Фольмера – Вавилова $1/\tau = 1/\tau_0 + K_q[Q]$ (где τ и τ_0 – время жизни ТС ХЛ с тушителем и без него соответственно; K_q – константа скорости тушения; $[Q]$ – концентрация тушителя) для тушения ТС ХЛ молекулами ТФП.

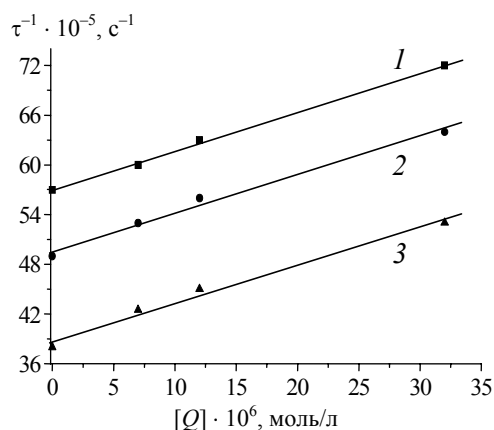


Рис. 1. Зависимости τ^{-1} для ХЛ от концентрации ТФП от концентрации ТФП при λ_r *T-T*-поглощения ХЛ: 1 – 670 нм; 2 – 545 нм ($C_D = 2,7 \cdot 10^{-6}$ моль/л для обоих графиков); 3 – 475 нм ($C_D = 2,9 \cdot 10^{-6}$ моль/л)

Зависимости получены для двух разных опытов и при использовании различных длин волн регистрации (λ_r) *T-T*-поглощения ХЛ. Последнее выполнено с целью проверки возможности влияния образования фотопродуктов на регистрируемую кинетику. При этом использованы $\lambda_r = 475$ нм и $\lambda_r = 545$ нм, на которых наблюдали исчезновение *T-T*-поглощения ХЛ, и $\lambda_r = 670$ нм, на которой отмечали восстановление исходного (синглет-синглетного) поглощения ХЛ.

Как видно из рис. 1, полученные зависимости $1/\tau$ от $[Q]$ близки друг к другу. Используя их, найдено, что значения K_q равны $4,2 \cdot 10^7$; $4,9 \cdot 10^7$ и $5,0 \cdot 10^7$ л/(моль · с) соответственно для указанных λ_r . Одна из полученных зависимостей не приведена на рис. 1 ($\lambda_r = 475$ нм, концентрации ТФП те же, что и для зависимостей 1 и 2 на рис. 1, концентрация ХЛ равна $3,4 \cdot 10^{-6}$ моль/л). В этом случае $K_q = 5,2 \cdot 10^7$ л/(моль · с). Среднее арифметическое значение $K_q = 4,8 \cdot 10^7$ л/(моль · с). Погрешность определения значений K_q составляла $\pm 10\%$.

Для тушения ТС ТФП молекулами ХЛ зависимость $1/\tau = f([Q])$ приведена на рис. 2 при $K_q = 4,9 \cdot 10^9$ л/(моль · с). Здесь для фотовозбуждения использован стеклянный светофильтр ЗС-1 (в этом случае в основном возбуждались молекулы ТФП), а регистрация T - T -поглощения ТФП осуществлялась на $\lambda_r = 777$ нм, где у ХЛ нет заметного T - T -поглощения.

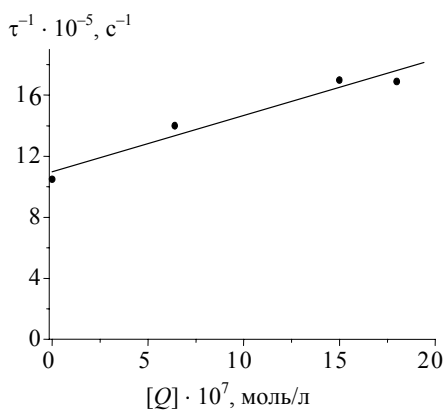


Рис. 2. Зависимость τ^{-1} для ТФП от концентрации ХЛ ($C_D = 1,2 \cdot 10^{-5}$ моль/л, $\lambda_r = 777$ нм)

Деактивация ТС ТФП здесь также происходила по экспоненте. Наблюдаемое тушение в обоих случаях, очевидно, обусловлено межмолекулярным T - T -переносом энергии. Альтернативный такому переносу энергии процесс фотоиндуцированного переноса заряда, по-видимому, не играет заметной роли при тушении: образования фотопродуктов не обнаружено, K_q при использовании разных λ_r близки, одинаково и время жизни наведенного поглощения, измеренное при этих λ_r . Триplet-синглетный перенос энергии должен быть неэффективен, так как он запрещен спиновыми правилами отбора.

Поскольку энергия ТС ТФП известна ($E_T = 11\,660$ см $^{-1}$), а значения констант скоростей переноса энергии от ХЛ к ТФП (K_q^1) и обратно (K_q^2) определены, можно найти разность энергий ТС ХЛ и ТФП (ΔE_T) и E_T для ХЛ. Для этого в ряде работ применяется выражение [3]

$$K_q^1 = K_q^2 \exp\left(-\frac{\Delta E_T}{KT}\right). \quad (1)$$

Используя (1), получено, что $\Delta E_T = (950 \pm 95)$ см $^{-1}$ и для ХЛ $E_T = 10\,710$ см $^{-1}$.

Формула (1), согласно [3], верна для переноса энергии, контролируемого диффузией молекул. В таком случае, поскольку ΔE_T достаточно велика, значение K_q^1 должно быть близко к значению диффузионной константы (K_d), $K_d = 4RT/1000\eta$ (где η – коэффициент динамической вязкости растворителя). Для оценки значения K_q^2 взято соотношение из работы [3]

$$K_q^1 = K_d \frac{1}{1 + \exp(-\Delta E_T / KT)}. \quad (2)$$

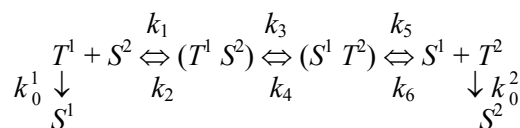
Для толуола при 298 К $K_d = 1,8 \cdot 10^{10}$ л/(моль · с). Значение K_q^2 меньше значения K_d более чем в 3 раза. Такое различие превышает погрешность определения K_d и K_q^2 . Поскольку для рассмотренных молекул энергетические и стерические препятствия переносу энергии отсутствуют, единственной предлагаемой в литературе причиной уменьшения значений K_q^2 и констант скоростей тушения по сравнению с K_d является образование комплексов из молекул доноров энергии и тушителей. При этом

$$K_q = K_d \frac{k_3}{k_2 + k_3}. \quad (3)$$

где k_2 и k_3 – константы скоростей распада комплекса без тушения и с тушением соответственно.

Модель комплекса столкновения (КС) для рассматриваемого случая не применима. При времени жизни КС порядка 10^{-11} с (это время жизни диффузионной пары) перенос энергии успеваеt осуществиться только в редких случаях. Это обусловлено тем, что вероятность переноса энергии (K_{ET}) по обменному механизму зависит от расстояния между молекулами (r), согласно соотношению $K_{ET} \sim \exp(-2r/L)$, где L – эффективный борковский радиус молекул [4]. Эта вероятность достигает значения порядка 10^{11} с $^{-1}$ только при малых r ($r \leq 3$ Å). Такие K_q и r имеют место только для случаев, когда перенос энергии происходит между молекулами растворителя и растворенного вещества [4]. Если молекулы разделены сольватными оболочками, то r между ними будет значительно больше 3 Å, а вероятность переноса энергии будет намного меньше 10^{11} с $^{-1}$.

Схема тушения с образованием возбужденных комплексов имеет следующий вид:



где T^1 , T^2 и S^1 , S^2 – молекулы двух соединений в триpletном и основном состояниях соответственно; $(T^1 S^2)$ и $(S^1 T^2)$ – комплексы из взаи-

действующих молекул; k_0-k_6 – константы скоростей процессов.

Перенос энергии характеризуется k_3 и k_4 . Кинетика дезактивации ТС обоих соединений в случае выполнения вышеприведенной схемы описывается системой из шести линейных дифференциальных уравнений, получение приближенных решений которых и их кинетический анализ затруднены. Можно найти выражения для K_q^1 и K_q^2 для частных случаев, когда концентрации тушителей малы. Для тушения ТС ТФП молекулами ХЛ:

$$K_q^2 = k_1 \frac{k_3 k_5 k_0^2}{k_3 k_5 k_0^2 + k_2 [k_4 (k_6 [S^1] + k_0^2) + k_5 k_0^2]} \quad (4)$$

Если пренебречь вкладом обратного переноса энергии, получим, что

$$K_q^2 = k_1 \frac{k_3}{k_2 + k_3} \quad (5)$$

Из анализа выражений (3) и (5) следует, что $K_q^2 < k_1$, и если $k_1 = K_d$, то $K_q^2 < K_d$. По-видимому, наблюдаемое соотношение $K_q^2 < K_d$ обусловлено тем, что тушение ТС ТФП молекулами ХЛ осуществляется по вышеприведенной схеме. Для переноса энергии от ХЛ к ТФП:

$$K_q^1 = \frac{k_2 k_4 k_6}{k_2 k_4 + k_5 (k_2 + k_3)} \quad (6)$$

Поскольку справедливы соотношения: $k_3 \gg k_4$ и $k_3 \gg k_2$ ($k_2 \sim 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, k_3 – вероятность переноса энергии из T^1 - в T^2 -состояние в комплексе, k_4 – вероятность переноса в обратном направлении) и для комплексов одинаковой природы $k_2 = k_5$, из (6) получим, что

$$K_q^1 = \frac{k_6 k_4}{k_3} \quad (7)$$

Если константы образования комплекса равны K_d (это предполагается для возбужденных комплексов), отношение вероятностей переноса энергии в двух направлениях составит

$$\frac{k_4}{k_3} = \frac{K_q^1}{K_d} = \exp\left(-\frac{\Delta E_T}{KT}\right) \quad (8)$$

Используя значения K_q^1 и K_d , получили, что $\Delta E_T = (1230 \pm 120) \text{ см}^{-1}$ и для ХЛ $E_T = 10 430 \text{ см}^{-1}$. Это значение близко к $E_T = 10 420 \text{ см}^{-1}$ и $E_T = 10 400 \text{ см}^{-1}$, соответствующим максимумам полос фосфоресценции в двух стеклюющихся смесях растворителей при 77 К в [2].

Электронные спектры поглощения ХЛ были измерены в толуоле и пиперидине. В послед-

нем спектре ХЛ имеются две Q -полосы с $\lambda_{\max} = 670 \text{ нм}$ и $\lambda_{\max} = 650 \text{ нм}$, т. е. помимо формы с $\lambda_{\max} = 670 \text{ нм}$, наблюдаемой в толуоле, здесь образуется и форма с $\lambda_{\max} = 650 \text{ нм}$. Полоса с $\lambda_{\max} = 670 \text{ нм}$ принадлежит форме ХЛ, где к магнию присоединена одна молекула растворителя, а полоса с $\lambda_{\max} = 650 \text{ нм}$ принадлежит форме, где присоединены две молекулы растворителя. Такой вывод основан на данных, согласно которым макроцикл металлопорфирина с координационным числом 6 центрального иона металла является плоским (если порфириновый лиганд плоский и два дополнительных лиганда одинаковы), а с координационным числом 5 – неплоским. В последнем случае ион металла выходит из плоскости макроцикла, что вызывает отклонение формы последнего от плоской. А это приводит к сдвигу Q -полос в сторону больших длин волн. Поэтому можно сделать вывод о том, что в толуоле к иону магния ХЛ присоединена одна молекула дополнительного лиганда.

Закключение. На основании метода импульсного фотолиза изучено тушение ТС для пары хлорофилл *a* – мезо-тетрафенилпорфин в толуоле при 298 К. В соответствии с выполненным кинетическим анализом механизма тушения ТС при образовании возбужденных комплексов из взаимодействующих молекул предложена методика определения значений разности энергий ТС двух молекул, между которыми идет перенос энергии. Используя этот способ, найдено, что для ХЛ в толуоле $E_T = 10 430 \text{ см}^{-1}$. При применении методики, не учитывающей образование указанных комплексов, получено, что $E_T = 10 710 \text{ см}^{-1}$.

Литература

1. Красновский, А. А. (мл). Спектральные характеристики фосфоресценции хлорофиллов и феофитинов *a* и *b* / А. А. Красновский (мл.), Н. Н. Лебедев, Ф. Ф. Литвин // Докл. акад. наук СССР. – 1974. – Т. 216, № 6. – С. 1406–1409.
2. Фосфоресценции хлорофиллов *a* и *b* и их феофитинов / С. М. Дворников [и др.] // Оптика и спектроскопия. – 1979. – Т. 46, № 6. – С. 689–695.
3. Sandros, K. Triplet State Energy Transfer in Liquid Solutions. III. Reversible Energy Transfer / K. Sandros // Acta Chem. Scand. – 1964. – Vol. 18, № 10. – P. 2355–2374.
4. Безызлучательный перенос энергии электронного возбуждения / В. Л. Ермолаев [и др.]. – Л.: Наука, 1977. – 311 с.

УДК 628.1

Н. М. Богослав, ассистент

АНАЛИЗ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ ВОДОПОДГОТОВКИ КОТЕЛЬНЫХ УСТАНОВОК

Article is devoted problems of modern level of automation of installations of water preparation for the boiler equipment, major factors making negative impact on a system condition as a whole are considered. The choice of the scheme and a way of clearing depending on quality of initial water and the requirements shown to processed water is explained. Classification of systems of water preparation according to parameters of arriving streams and external factors is given. Also one of variants of an adaptive control system is considered by water purification process, the algorithm of work of the scheme is resulted. Conclusions that the control and management of water preparation for power systems demand application of systems of the adaptive management considering change of seasonal conditions, instability of water stream both under the expense and on structure and presence of critical events are as a result drawn.

Введение. Системы водоподготовки котлов являются важной составляющей энергетики предприятий. От качества поступающей на их питание воды зависит надежность и эффективность работы. Одной из проблем является образование твердых отложений на поверхности котлов, теплообменников и трубопроводов, приводящих к потерям энергии. Неудовлетворительное качество воды из котельной обуславливает перерасход топлива из-за накипи (5–7% на 1 мм накипи); повышение энергопотребления насосов (до 7% на 2 мм отложений); снижение сроков службы и постоянный ремонт оборудования; затраты на промывку котлов и теплообменников; падение КПД систем и котлов (при эксплуатации 3–4 месяца до 50%). Это связано с отсутствием в котельных установках водоподготовки либо с износом имеющихся. В итоге вода подается в систему без обработки.

Важнейшими показателями качества воды, определяющими пригодность использования ее в промышленности и энергетике, являются [1]: содержание взвешенных веществ (прозрачность) и солей (минерализация); концентрация водородных ионов (рН); жесткость и ее составляющие; окисляемость (содержание органических веществ); щелочность и ее составляющие; содержание коррозионно-активных газов.

Загрязняющие воду примеси различаются по природе (неорганические, органические, биологические) и размерам. Крупные неорганические частицы (от единиц микрометра до миллиметра) гетерогенны, видны невооруженным глазом в виде мутности, имеют четкую границу раздела с водой и могут самопроизвольно осаждаться [2]. Микрочастицы (от долей до единиц микрометра) имеют неорганическую или биологическую природу, невоору-

женным глазом определяются как опалесценция, из-за броуновского движения не осаждаются. Макромолекулы растворимых органических веществ с молекулярной массой до 500 000 единиц, а также вирусы и бактерии имеют размеры от сотых долей до микрометра. Истинные растворы, содержащие ионы растворенных неорганических веществ, имеют размеры в единицы ангстрем ($1 \text{ \AA} = 10 \text{ мкм}$).

Широкий спектр примесей и их неоднородный характер приводят к тому, что для обеспечения надлежащего качества водоподготовки необходимы адаптивные системы управления процессом водоочистки. Первые адаптивные системы водоочистки были реализованы в США и Великобритании и показали высокую эффективность.

Основная часть. В зависимости от качества исходной воды и требований к питательной воде водоподготовка котельных может включать следующие операции [3]: 1) очистка от взвешенных частиц (отстаивание, фильтрация); 2) очистка от железа и марганца (отстаивание, фильтрация, окисление с фильтрацией); 3) удаление органических загрязнений (обесцвечивание, дезодорация); 4) умягчение воды (реагентное, ионный обмен, нанофильтрация, электрохимическая обработка); 5) обессоливание (термическое, ионный обмен, мембранный и обратный осмос, электродиализ, комбинированный); 6) удаление биозагрязнений; 7) коррекция состава воды (щелочности или кислотности, содержания Са, F). В настоящее время в системах водоподготовки котельных наиболее широко применяются умягчение и обессоливание по средствам обратного осмоса [4]. Однако для данных технологий часто требуется предварительная подготовка воды с целью удаления железа и органических примесей.

Для повышения надежности и экономичности систем водоподготовки необходимо учитывать теорию их динамического анализа и динамической оптимизации, т. е. всесторонне проанализировать условия эксплуатации и определить динамические характеристики режимов, в которых работает система, учесть критерии эффективности при работе в переменных режимах и синтезировать систему управления.

Центральный технологический оператор системы водоподготовки представляется в виде

$$C_{\text{вых}} = A(z, u, \xi) [C_{\text{вх}}], \quad (1)$$

где $C_{\text{вых}}$, $C_{\text{вх}}$ – исходное и конечное качество воды (загрязненность), определяемое чаще всего концентрациями ингредиентов; z – вектор конструктивно-технологических параметров; u – вектор управляющих воздействий, компенсирующих влияние колебаний $C_{\text{вх}}$ и ξ , включающий признаки структурной организации и параметры системы управления; ξ – вектор возмущающих воздействий, изменяющих свойство оператора A в процессе эксплуатации.

Основными задачами при построении системы управления являются оценка динамической эффективности, т. е. расчет колебаний $C_{\text{вых}}$ при соответствующих колебаниях $C_{\text{вх}}$, ξ , известном $A(z, u)$, и синтез динамически оптимальной системы, т. е. поиск оптимального варианта $A(z, u)$ при колебаниях $C_{\text{вх}}$ и ξ .

По характеру возмущающих воздействий можно выделить три основные системы: 1) системы с переменными по расходу и составу потоками; 2) системы, режим функционирования которых обусловлен метеоусловиями; 3) системы, работа которых зависит от природных источников и приемников воды.

Наличие систем с переменными по расходу и составу потоками вызвано нестационарностью водопотребления предприятий, которая диктует переменные режимы работы звеньям систем водоподготовки и выражается чаще в изменении необходимого количества воды и очень редко в изменении задания на ее регламентное качество. В настоящее время главным фактором нестационарности со стороны производства, ставящим наиболее сложные задачи, является переменность состава воды. Колебания расхода и состава водных потоков, поступающих на водоочистку, часто дополняются колебаниями температуры воды, что делает нестабильной кинетику водообработки и ведет к плотностной стратификации потоков. Если рассмотреть нестационарность расхода воды, поступающей на очистку, в течение года и разложить расход в ряд Фурье, то получим

$$F(t) = \sum_{k=0}^n (F_k + A_k(t)) \cos \omega t, \quad (2)$$

где $F(t)$ – расход воды, поступающей на очистку; $A_k(t)$ – случайная функция, берущая в расчет нестабильность расхода.

Тогда $F_0 + A_0(t)$ будет учитывать среднегодовое изменение расхода, а $A_0(t)$ будет достаточно мало (1–2% от F_0). $F_1 + A_1(t)$ принимает во внимание среднемесячное изменение расхода, где $A_1(t)$ составляет в зависимости от месяца и поры года 5–10% от F_1 . $F_2 + A_2(t)$ – среднесуточное изменение расхода, $A_2(t)$ может варьировать в широком диапазоне. Для непрерывного производства в зависимости от времени суток $A_2(t)$ может составлять 50–80% от среднесуточного расхода воды F_2 . В случае циклического характера производства (например, при работе в две смены) амплитуда $A_2(t)$ может достигать 100% от среднесуточного расхода.

Системы с режимом функционирования, зависящим от метеоусловий, характеризуются фактором метеорологической открытости как причиной нестационарности. Этот фактор влияет на тепловые процессы в обрабатываемых водных потоках. Поскольку промышленное водопользование сопровождается в большинстве случаев нагреванием воды, то главный интерес представляют процессы испарительного охлаждения воды атмосферным воздухом. Свойства воздуха как охладителя определяются температурой Θ , влажностью ϕ и барометрическим давлением P_6 . Для этих факторов нет проблемы первичной информации об условиях эксплуатации даже для проектируемых объектов. Опыт обработки метеорологической информации показывает, что для большинства климатических зон полную функцию внутригодового распределения температур допустимо строить на основе среднесуточных данных с поправкой на внутрисуточные колебания. Таким образом, зависимость температуры окружающей среды от времени имеет вид

$$T(t) = \sum_{k=0}^n (T_k + A_k(t)) \cos \omega t, \quad (3)$$

где $T(t)$ – температура поступающей на очистку воды; $A_k(t)$ – случайная функция, учитывающая нестабильность температуры воды.

$T_0 + A_0(t)$ принимает во внимание среднегодовое изменение температуры, где $A_0(t)$ может изменяться в пределах 1–2°C. $T_1 + A_1(t)$ учитывает среднемесячное изменение температуры ($A_1(t)$ составляет 3–5°C). $T_2 + A_2(t)$ – среднесуточное изменение температуры, где $A_2(t)$ будет варьировать в пределах 5–10°C в зависимости от времени суток и поры года. Для учета изменения температуры подземных вод, залегающих на определенной глубине, в соответствии с температурой окружающей среды внесем в (3) запаздывание в виде смещения фазы ψ :

$$T(t) = \sum_{k=0}^n (T_k + A_k(t)) \cos[\omega t + \psi]. \quad (4)$$

Гидрологический режим систем, функционирование которых зависит от природных водосточников, определяется располагаемым количеством воды, применяемой для водозабора или разбавления сточных вод. Главным ξ -фактором функционирования большинства систем при этом является нестационарность речного стока. Поскольку непостоянство расхода воды в реках представляло интерес для многих отраслей народного хозяйства, этот фактор хорошо изучен и отражен математическими моделями, которые вполне приемлемы для использования в решении задач динамики систем водоподготовки.

Таким образом, с точки зрения нестационарности очищаемой воды и представленного разложения в ряд Фурье очевидно, что с увеличением номера гармоник растет диапазон изменения параметров (расхода, температуры). Поэтому система управления водоочисткой должна быть адаптированной к суточным варьированиям параметров. Одна из таких систем представлена на рисунке.

На установку водоподготовки подается исходная неочищенная вода. Перед поступлением воды на очистку вводится коагулянт, укрупняющий частицы. Расход измеряется преобразователем, сигнал с которого поступает на логический контроллер. По заданию оператора контроллер выдает сигнал на управление насосом подачи коагулянта № 1 и насосом управления рН № 2 в зависимости от расхода воды. Насос № 1 предназначен для загрузки коагулянтов, например сульфата алюминия. Насос № 2 служит для подачи рН-агентов. Смеситель

перемешивает исходную воду, коагулянт и рН-агенты перед подачей их на установку водоочистки. Коагулянт взаимодействует с взвешенными частицами, укрупняет их и подготавливает к процессам флокуляции, хлорирования и фильтрации.

Датчик тока течения необходим для измерения величины тока течения воды непосредственно после введения коагулянта. Передаточная функция датчика будет иметь следующий вид:

$$W_{TT} = \frac{k_1}{(T_{эл1} + 1)(T_{см1} + 1)} e^{-\tau_1 p}, \quad (5)$$

где k_1 – коэффициент усиления; $T_{эл1}$ – постоянная времени электрода, равная 1–2 с; $T_{см1}$ – постоянная времени смешения в ячейке, составляющая 2–3 с; τ_1 – транспортное запаздывание, определяемое временем от введения коагулянта до прохождения потоком датчика тока течения; p – оператор Лапласа.

Совмещенный с датчиком тока течения рН-метр предназначен для измерения уровня рН. Его передаточная функция будет иметь вид

$$W_{pH} = \frac{k_2}{(T_{эл2} + 1)(T_{см2} + 1)} e^{-\tau_2 p}, \quad (6)$$

где k_2 – коэффициент усиления; $T_{эл2}$ – постоянная времени электрода, равная 0,05 мин; $T_{см2}$ – постоянная времени смешения в ячейке, составляющая 0,05 мин; τ_2 – транспортное запаздывание, определяемое временем от введения коагулянта до прохождения потоком рН-метра; p – оператор Лапласа.

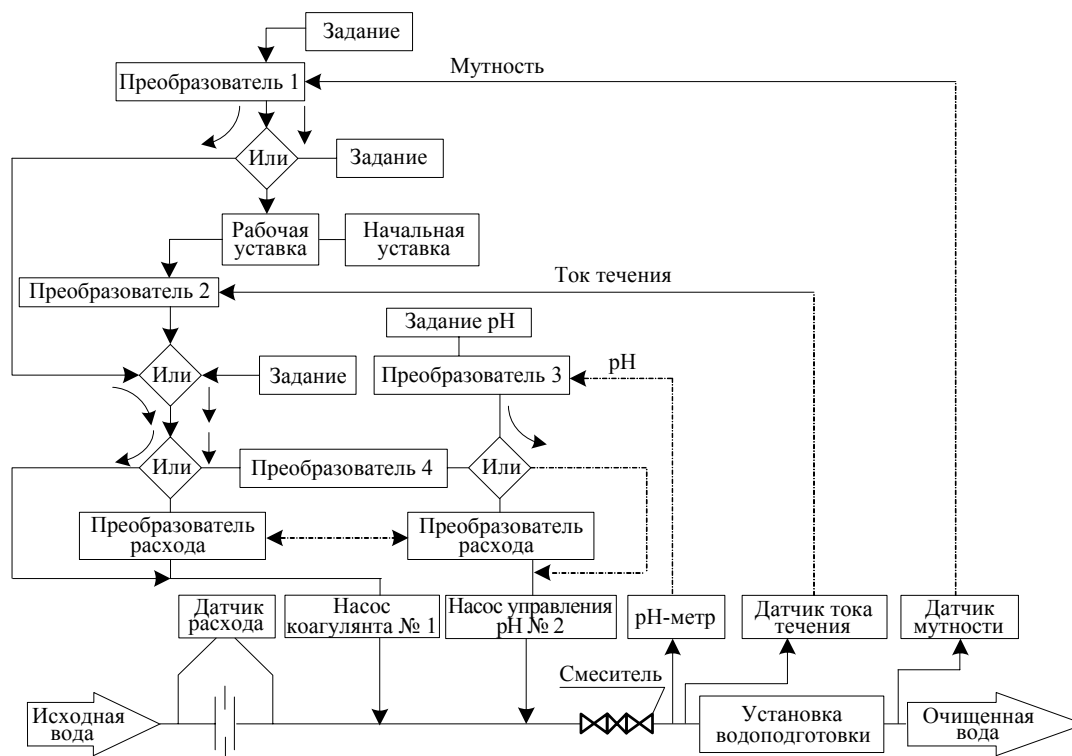


Рисунок. Система управления водоочисткой с дозированием коагулянта

Сигнал рН-метра передается на контроллер для корректировки расхода рН-агентов посредством насоса № 2, что обеспечивает поддержание постоянного уровня рН в воде. Стабилизация рН необходима по той причине, что датчик тока течения не может определять, произошли изменения электрокинетического потенциала из-за изменения рН или концентрации взвешенных частиц. Передаточная функция датчика мутности воды на выходе установки водоподготовки имеет следующий вид:

$$W = \frac{k_3}{T+1} e^{-\tau_3 p}, \quad (7)$$

где k_3 – коэффициент усиления; T – постоянная времени датчика, составляющая порядка 1 с; τ_3 – транспортное запаздывание, определяемое временем от введения коагулянта до прохождения потоком датчика мутности; p – преобразователь Лапласа.

Сигнал датчика подается на контролер для задания и корректировки уставки для сигнала датчика тока течения.

Последовательность операций контроллера представлена на рисунке. Изначально датчик тока течения не активен, и контроллер управляет насосом подачи коагулянта по показаниям датчика. Этот режим работы системы используется для калибровки датчика тока течения или при неисправности датчика.

Контроллер периодически считывает сигнал с выхода датчика расхода, датчика тока течения, рН-метра и датчика мутности. После выполнения первого цикла контроллер определяет завершенность очистки на установке водоподготовки (если нет, то осуществляются предыдущие операции, если да, то контроллер переходит к следующей стадии цикла).

Во время выполнения второго цикла контроллер проверяет дозу коагулянта и рН-агентов в воде. Расход неочищенной воды регулируется автоматически в соответствии с нормой выработки. При этом корректируется подача коагулянта и рН-агентов.

При изменении расхода оператором контроллер начинает управлять преобразователями расхода по сигналу от датчика расхода, воспринимая изменение расхода исходной воды и изменяя дозу подаваемого коагулянта и рН-агентов. Если расход воды не изменяется, то дозировка коагулянта и рН-агентов остается неизменной.

Далее контроллер выполняет третий цикл и проверяет, достигла ли очищаемая вода, содержащая определенную дозу коагулянта, датчика мутности. Время очистки воды может варьироваться в пределах от 20 мин до нескольких часов в зависимости от типа установки. Это время задается программно оператором. Каждый раз, когда время истекает, контроллер высчитывает

диапазон зоны нечувствительности по показателю мутности. Ширина зоны нечувствительности определяется следующим образом: к заданному значению мутности прибавляются и отнимаются допустимые значения отклонения. Если мутность лежит в пределах этой зоны, контроллер продолжает выполнять операции. При выходе показаний за пределы зоны нечувствительности контроллер начинает корректировать уставку по каналу тока течения, изменяя расход коагулянта. При этом оператор имеет возможность вывести из действия датчик потока течения, так что контроллер игнорирует показания датчика тока течения и управляет насосом подачи коагулянта исключительно по показаниям датчика мутности. Если при этом показатели мутности попадают в заданный диапазон, то уставка является правильной, а работа датчика тока течения считается некорректной.

На насос подачи коагулянта поступает сигнал контроллера. Контроллер проверяет, достигла ли вода с известной дозой коагулянта датчика тока течения. Далее отсчитывает время прохождения воды через смеситель и после каждого цикла определяет допустимые пределы зоны нечувствительности, сравнивает данные пределы с показаниями датчика. Если показания находятся в пределах указанного диапазона, то доза коагулянта является правильной и подстройка не нужна. Если показания датчика лежат выше зоны нечувствительности, то устанавливается снижение дозы; если ниже, то увеличение дозы.

Заключение. Контроль и управление водоподготовкой для энергетических систем требует применения систем адаптивного управления, учитывающих изменение сезонных условий и наличие критических событий. Главной задачей, при этом, является использование адаптивной интеллектуальной системы управления с применением принципиально новых датчиков контроля качества в системе.

Литература

1. Рябчиков, Б. Е. Современные методы подготовки воды для промышленного и бытового использования / Б. Е. Рябчиков. – М.: ДеЛи принт, 2004. – 301 с.
2. Вода в дисперсных системах / Б. В. Дерягин [и др.]; под общ. ред. Б. В. Дерягина. – М.: Химия, 1989. – 288 с.
3. Хохрякова, Е. А. Водоподготовка: справочник / Е. А. Хохрякова, Я. Е. Резник; под ред. С. Е. Беликова. – М.: Аква-Терм, 2007. – 240 с.
4. Смирнов, Д. Н. Автоматическое регулирование процессов очистки сточных и природных вод / Д. Н. Смирнов. – М.: Стройиздат, 1974. – 256 с.

Ю. А. Василенко, инженер (РУП «Беларуськалий»)

**АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ЭЛЕКТРОПРИВОД ТРАКТА ПОДАЧИ РУДЫ
ПРОТЯЖЕННОСТЬЮ БОЛЕЕ 6 КМ**

We consider the automated two motor electric drive of the conveyers, more then 6 km long, on the basis of frequency converters with the vector type of control.

Введение. Республиканское унитарное предприятие «Беларуськалий» является одним из крупнейших производителей калийных удобрений в мире. Основной вид деятельности предприятия заключается в добыче полезных ископаемых, производстве и реализации минеральных удобрений. Доля его продаж на рынке составляет 17%.

В настоящее время для пополнения сырьевой базы ведется строительство Краснослободского рудника. Руда до сильвинитовой обогатительной фабрики Второго рудоуправления будет доставляться по конвейерному тракту общей протяженностью более 6 км. В состав тракта входят три конвейера: № 1 длиной 3045 м, № 2 длиной 3260 м и № 3 длиной 350 м. Максимальная производительность достигает 2000 т/ч. Конвейеры подобной длины являются уникальными для Республики Беларусь.

Объектом рассмотрения данной статьи является электропривод конвейеров № 1 и 2.

Основная часть. Для расчета мощности приводного электродвигателя необходимо найти окружное (тягловое) усилие на ободе приводного барабана (общее усилие сопротивления движению ленты) нагруженного горизонтального конвейера [1]:

$$P = K_d L_r \omega (q_r + qp' + qp'' + 2q_{л.ср}), \quad (1)$$

где K_d – коэффициент, учитывающий дополнительные сопротивления; L_r – длина горизонтальной проекции конвейера, м; ω – коэффициент сопротивления движению ленты по роликоопорам и барабанам; qp' , qp'' – линейные нагрузки (даН/м), зависящие от массы вращающихся частей роликоопор соответственно верхней и нижней ветвей ленты, численно равные массам вращающихся частей соответствующих роликоопор, кг/м; $q_{л.ср}$ – средняя линейная нагрузка (даН/м) от массы ленты, численно равная среднему значению массы, кг/м.

Расчетную мощность двигателя привода (кВт) вычисляют по формуле

$$N = \frac{PvK}{102\eta}, \quad (2)$$

где v – скорость ленты, м/с; K – коэффициент неучтенных потерь; η – общий КПД привода.

Двухдвигательная система привода конвейера позволила использовать двигатели с меньшей номинальной мощностью и повысить надежность

работы привода. Одним из требований, предъявляемых к мощности электропривода, было обеспечение производительности 60% от номинальной при работе с одним двигателем.

Таким образом, были приняты двигатели номинальной мощностью 800 кВт каждый, обеспечивающие максимальную производительность 2000 т/ч при скорости движения ленты 3,15 м/с.

В нынешних условиях жесткой экономии энергоресурсов остро стоит вопрос о минимизации их потребления. Для работающего практически в круглосуточном режиме конвейерного транспорта выход один – регулирование скорости движения для обеспечения максимальной загрузки ленты.

Загрузка конвейерного тракта может осуществляться двумя путями: кратцер-краном со склада руды и непосредственно с отделения дробления. Однако при любом варианте руда на транспортер подается неравномерно.

Данные о нагрузке с тензометрических весов, установленных в начале тракта, передаются на микропроцессорный контроллер (МПК) Simatic S7-300. Управляющим сигналом для регулируемого электропривода является задание скорости, которая изменяется в зависимости от нагрузки в начале тракта.

Применение регулируемого электропривода позволяет не только уменьшить потребление энергии электроприводом в установившемся режиме и в переходных процессах, но и в целом повысить качество технологического процесса. Чтобы реализовать возможность экономии электроэнергии в регулируемом электроприводе, необходимо понимать процессы управляемого электромеханического преобразования энергии.

Параметры, необходимые для расчета характеристик и энергетических показателей асинхронных электроприводов, можно определить из анализа математической модели эквивалентного двухфазного асинхронного двигателя в осях xu [2]:

$$\begin{aligned} u_{1x} &= i_{1x} R_1 + \frac{d\Psi_{1x}}{dt} - \omega_1 \Psi_{1y}, \\ u_{1y} &= i_{1y} R_1 + \frac{d\Psi_{1y}}{dt} - \omega_1 \Psi_{1x}, \\ 0 &= i'_{2x} R'_2 + \frac{d\Psi_{2x}}{dt} - (\omega_1 - \omega_{\text{эл}}) \Psi_{2y}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$0 = i'_{2y} R'_2 + \frac{d\Psi_{2y}}{dt} - (\omega_1 - \omega_{эл}) \Psi_{2x},$$

$$M = \frac{3}{2} p_n k_r (i_{1y} \Psi_{2x} - i_{1x} \Psi_{2y}).$$

Для управления скоростью был однозначно выбран частотный способ как наиболее перспективный и широко используемый в настоящее время метод регулирования частоты вращения асинхронных двигателей. Частотно-регулируемый привод обеспечивает поддержание с высокой точностью скорости вращения двигателя. Регулирование частоты вращения в этой системе может осуществляться плавно, в широком диапазоне, в обе стороны от естественной характеристики, т. е. двигатель может иметь частоту вращения, большую номинальной, давая при этом возможность регулировать скорость разгона и остановки. Такой «мягкий» пуск двигателя имеет массу преимуществ: снижаются ударные нагрузки на двигатель и оборудование во время пуска, полностью исключаются броски пускового тока. Ввиду этого уменьшаются механические нагрузки на двигатель и оборудование, что соответственно увеличивает их срок службы, и межремонтный цикл.

Частотное регулирование является весьма экономичным, так как регулирование частоты вращения двигателя в этой системе не сопровождается большими потерями скольжения в роторной цепи, ухудшающими КПД электропривода и приводящими к необходимости завышения мощности двигателя. При этом регулировочные характеристики имеют необходимую жесткость, а двигатель сохраняет высокую перегрузочную способность.

В качестве приводов ленточных конвейеров № 1 и 2 используются по два трехфазных асинхронных двигателя фирмы АЕМ. Двигатели специально предназначены для создания комплектных частотно-регулируемых приводов. Номинальная мощность двигателя составляет 800 кВт. Номинальное напряжение переменное трехфазное 690 В «звезда». Двигатели работают в комплекте с преобразователями частоты (ПЧ) фирмы АВВ типа ACS 800-07-1160-7.

Задание скорости, подача сигналов пуска/останова двигателей, считывания скоростей, нагрузок и состояния (работа, готовность, авария) электроприводов конвейеров выполняется по сети Profibus-DP. Для этого в преобразователи частоты установлена плата РРВА-01. Поскольку применяется двухдвигательный привод конвейеров, необходимо было распределить нагрузку между двигателями. Преобразователи частоты ACS 800-07-1160-7 позволяют решить эту задачу без использования МПК. Для этого были выполнены следующие операции.

1. В частотном преобразователе в платы управления RМIO установлены специальные платы RDCO-02 для организации связи Master/Slave между преобразователями частоты.

2. Один из преобразователей частоты сделан ведущим с управлением скоростью.

3. Второй преобразователь установлен ведомым с управлением моментом от ведущего привода.

4. Ведущий и ведомый приводы соединены оптоволоконной линией связи.

Таким образом, важно было решить две основные задачи: управление скоростью вращения и моментом двигателя. Необходимость регулирования момента была продиктована техническими и технологическими требованиями. Для нормального функционирования привода следует регулировать момент и ток двигателя в переходных процессах пуска, торможения и приложения нагрузки. При работе конвейера в однодвигательном режиме механизм будет испытывать значительные перегрузки, что требует необходимости непрерывного регулирования момента двигателя в целях ограничения динамических ударных нагрузок.

Для решения задач регулирования скорости и момента применяют два основных метода частотного управления:

- скалярное управление;
- векторное управление.

Метод скалярного управления относительно прост в реализации, но обладает двумя существенными недостатками. Во-первых, при отсутствии датчика скорости на валу двигателя невозможно регулировать скорость вращения вала, так как она зависит от нагрузки. Во-вторых, нельзя регулировать момент на валу двигателя. Более того, при скалярном управлении нельзя регулировать одновременно и момент и скорость [3].

Устранить недостатки, присущие скалярному управлению, позволяет метод векторного управления. Хорошие силовые полупроводниковые приборы и мощные системы обработки информации современных электроприводов дают возможность закладывать в систему управления математическую модель двигателя, которая позволяет рассчитывать момент на валу и скорость вращения вала.

Используемые ПЧ фирмы АВВ поддерживают так называемый режим DTC (Direct Torque Control), т. е. прямое управление электромагнитным моментом двигателя. Суть этого метода заключается в следующем.

1. Магнитный поток статора рассматривается как интеграл от ЭДС статора, поэтому его величина определяется приложенным к статору напряжением.

2. Развиваемый электромагнитный момент двигателя пропорционален синусу угла между

потокосцеплениями статора и ротора (векторное представление электромагнитного момента).

3. Действие потокосцепления ротора на изменение напряжения статора меньше, чем действие потокосцепления статора.

Таким образом, величина потокосцепления статора и развиваемый двигателем электромагнитный момент непосредственно управляются с помощью создания пространственного вектора напряжения статора. Вектор напряжения статора формируется надлежащим выбором последовательного включения-отключения (состояния) силовых ключей ПЧ. Для оптимизации процесса переключения силовых ключей инвертора используется векторная пространственная широтно-импульсная модуляция (ШИМ).

В системе прямого управления моментом двигателя на основе векторной ШИМ применяется синхронно вращающаяся система координат с ориентацией оси x вдоль вектора потокосцепления статора $\dot{\Psi}_1$. Математическая модель асинхронного двигателя в синхронно вращающейся системе координат xu независимо от ориентации осей относительно какого-либо вектора определяется уравнением (3). Если ось x системы координат xu направить вдоль вектора потокосцепления статора $\dot{\Psi}_1$, тогда:

$$\Psi_{1x} = \Psi_1, \quad \Psi_{1y} = 0 \quad (4)$$

и уравнение (3) примет вид

$$\begin{aligned} u_{1x} &= i_{1x}R_1 + \frac{d\Psi_1}{dt}, \\ u_{1y} &= i_{1y}R_1 + \omega_1\Psi_{1x}, \\ 0 &= i'_{2x}R'_2 + \frac{d\Psi_{2x}}{dt} - (\omega_1 - \omega_{эл})\Psi_{2y}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$0 = i'_{2y}R'_2 + \frac{d\Psi_{2y}}{dt} - (\omega_1 - \omega_{эл})\Psi_{2x},$$

$$M = \frac{3}{2}p_n i_{1y}\Psi_{1x}.$$

После ряда преобразований уравнение математической модели асинхронного двигателя в синхронно вращающихся осях xu при ориентации потокосцепления статора $\dot{\Psi}_1$ вдоль оси x можем записать:

$$u_{1x} = i_{1x}R_1 + \frac{d\Psi_1}{dt},$$

$$u_{1y} = i_{1y}R_1 + \omega_1\Psi_1,$$

$$\Psi_1 + T_2 \frac{d\Psi_1}{dt} = L_1 \left(i_{1x} + T_2 \frac{di_{1x}}{dt} + \sigma T_2 \Delta\omega_{эл} i_{1y} \right), \quad (6)$$

$$\Psi_{1x} = \Psi_1,$$

$$\Psi_{1y} = 0,$$

$$M = \frac{3}{2}p_n i_{1y}\Psi_1,$$

где T_2 – электромагнитная постоянная времени цепи ротора.

По уравнению (6) составляется функциональная схема прямого управления моментом с вычислителем скорости. После проведения так называемого индефикационного прогона двигателя в систему управления вводятся необходимые компенсирующие сигналы.

Заключение. Использование векторного управления позволило достичь следующих результатов:

- высокая точность регулирования скорости ведущего двигателя;
- безынерционное поддержание момента на валу ведомого двигателя;
- плавный, без рывков, разгон и останов двигателей, особенно в области малых частот;
- быстрая реакция на изменение нагрузки, т. е. при резких скачках нагрузки практически не происходит скачков скорости;
- обеспечен режим работы двигателей, при котором снижены потери на нагрев и намагничивание.

Настройка параметров, выбор макросов, контроль работы и управление частотными преобразователями конвейеров может выполняться по сети Profibus-DP.

Литература

1. Шахмейстер, Л. Г. Теория и расчет ленточных конвейеров / Л. Г. Шахмейстер. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
2. Фираго, Б. И. Регулируемые электроприводы переменного тока / Б. И. Фираго. – Минск: Техноперспектива, 2006. – 318 с.
3. Усольцев, А. А. Векторное управление асинхронными двигателями / А. А. Усольцев. – СПб.: СПбГУ, 2002. – 424 с.

В. В. Сарока, ассистент; О. И. Оробей, учащийся; Д. А. Гринюк, доцент;
М. А. Анкуда, ассистент; И. О. Оробей, доцент

МЕТОЧНЫЙ ЯМР-РАСХОДОМЕР ВРЕМЕННОГО ТИПА С СОВМЕЩЕНИЕМ АДАПТАЦИИ СИСТЕМЫ РЕГИСТРАЦИИ К ИЗМЕРЯЕМОМУ РАСХОДУ И КОРРЕКЦИЕЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ БАЗЫ ПО ИНДУКЦИИ ПОЛЯ АНАЛИЗАТОРА

Questions of the building of marker NMR-flowmeter of the temporary type are considered in article. Within the framework of article are stated main theoretical and technical decisions, which can be marketed when making markers meters of the consumption on effect NMR. On the grounds of designed theoretical premiseses possible creation NMR-flowmeter, combining in itself adapting the system to registrations to measured consumption and correcting the measuring base on inductions of the field of the analyzer. Use the adaptive system to registrations allows greatly to raise accuracy of the measurement of the consumption and raise the speed of the meter of the consumption. Correction to inductions of the field of the analyzer takes into account possible change the temperature, composition and time to relaxations measured to liquids.

Введение. Измерительной базой меточных расходомеров является участок между сечением отметки и катушкой регистрации. К сдвигу сечения отметки приводит изменение индукции постоянного поля в зоне катушки нутации из-за колебаний температуры окружающей среды или жидкости и нестабильность генератора нутации [1]. Способы борьбы с этим эффектом заключаются в размещении катушки отметки в поле с большим градиентом или в согласованном сдвиге сечения отметки и частоты генератора отметки [2, 3]. Погрешности смены режима течения и релаксационные погрешности можно свести к изменению эффективной длины измерительной базы, для компенсации которого следует учитывать факторы, влияющие на вязкость или время релаксации T_1 .

Вязкостные и релаксационные характеристики чистых жидкостей сильно зависят от температуры и обладают незначительным разбросом в пределах допустимых концентраций присадок, процентного состава компонентов и т. д. Тогда основное воздействие на погрешности смены режима течения и релаксационные погрешности оказывают температурные зависимости вязкости и времени релаксации, а компенсацию нужно проводить с учетом температуры среды.

Уменьшение случайных погрешностей измерения расхода, обусловленных шумами в тракте регистрации, для меточных ЯМР-расходомеров временного типа обеспечивается применением адаптивной частоты отметки и полосы пропускания канала регистрации к расходу.

Основная часть. Для измерения температуры можно использовать постоянные магниты анализатора, находящиеся в тепловом контакте с жидкостью (индукция поля анализатора зависит от температуры жидкости). Магнитометр выполнен на датчике Холла (ДХ) [4]. Выход магнитометра является базовым сигналом корректора характеристики преобразования и применяется для автопоиска и стабилизации резонансных условий в анализаторе.

Структурная схема адаптивного временного ЯМР-расходомера с коррекцией характеристики преобразования по индукции поля анализатора приведена на рис. 1.

Особенностью устройства является наличие теплового контакта жидкости с постоянными магнитами через теплопроводящие полюсные наконечники, температура магнитов определяется температурой жидкости. Тепловая изоляция магнитов от внешних воздействий обеспечивается в магнитных системах бронированного типа с помощью теплоизолирующих прокладок между ярмом и магнитами.

Постоянным магнитам присуща зависимость параметров от температуры [5]. Температурный коэффициент остаточной индукции ферритов бария и стронция составляет $-0,2\%/^{\circ}\text{C}$ для температур от -70 до $+200^{\circ}\text{C}$. Аналогично зависит от температуры индукция в зазоре магнитной системы. Разработка термостабильных систем на постоянных магнитах достаточно сложна, а измерение сдвига индукции не представляет трудностей.

Магнитометр выполнен на основе преобразователя Холла [4]. Спиновый детектор, синхронный детектор, детектор резонансных условий (ДРУ), генератор модуляции, удвоитель частоты и устройство автопоиска и стабилизации образуют контур точного поиска и стабилизации резонансных условий в области поля, определенной по преобразователю Холла.

Измеритель работает следующим образом. При расстройке резонансных условий в центре анализатора напряжение на выходе синхронного детектора не превышает порога срабатывания ДРУ, высокое напряжение на выходе которого переключает устройство автопоиска и стабилизации в режим поиска (рис. 2). Поиск осуществляется сканированием частоты генерации спинового детектора пилообразным напряжением устройства автопоиска и стабилизации.

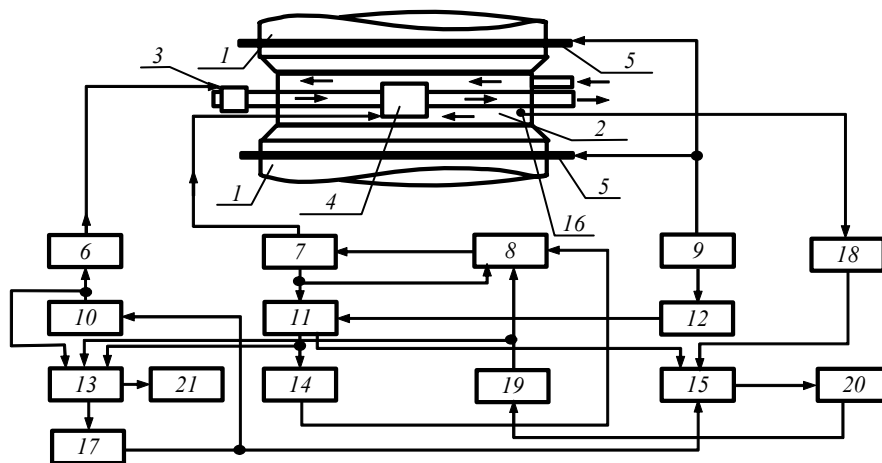


Рис. 1. Структурная схема адаптивного временного ЯМР-расходомера с коррекцией характеристики по индукции поля анализатора:

- 1 – магниты анализатора и поляризатора; 2 – кювета поляризатора; 3, 4, 5 – катушки отметки, регистрации и модуляции соответственно; 6 – генератор нутации; 7 – спиновый детектор; 8 – устройство автопоиска и стабилизации резонансных условий; 9, 10 – генераторы модуляции и синхронизации соответственно; 11 – синхронный детектор; 12 – удвоитель частоты; 13 – фазовый детектор; 14 – ДРУ; 15 – АЦП; 16 – преобразователь Холла; 17 – преобразователь $1/X$; 18 – электронный блок ДХ; 19 – ЦАП; 20 – микроконтроллер; 21 – схема адаптивного усреднения

Напряжение, от которого начинается сканирование, определяется по выходу магнитометра Холла через цифроаналоговый преобразователь (ЦАП) контроллером. В момент прохождения резонансных условий $t_{пр}$ срабатывает ДРУ и система переходит в режим автоподстройки, т. е. напряжение, управляющее частотой генерации спинового

детектора, начинает характеризоваться индукцией поля анализатора. Аналогово-цифровой преобразователь (АЦП) преобразовывает в цифровую форму напряжение с выхода электронного блока ДХ и подает данные на микроконтроллер.

Процесс измерения расхода стандартен для меточных ЯМР-расходомеров временного типа.

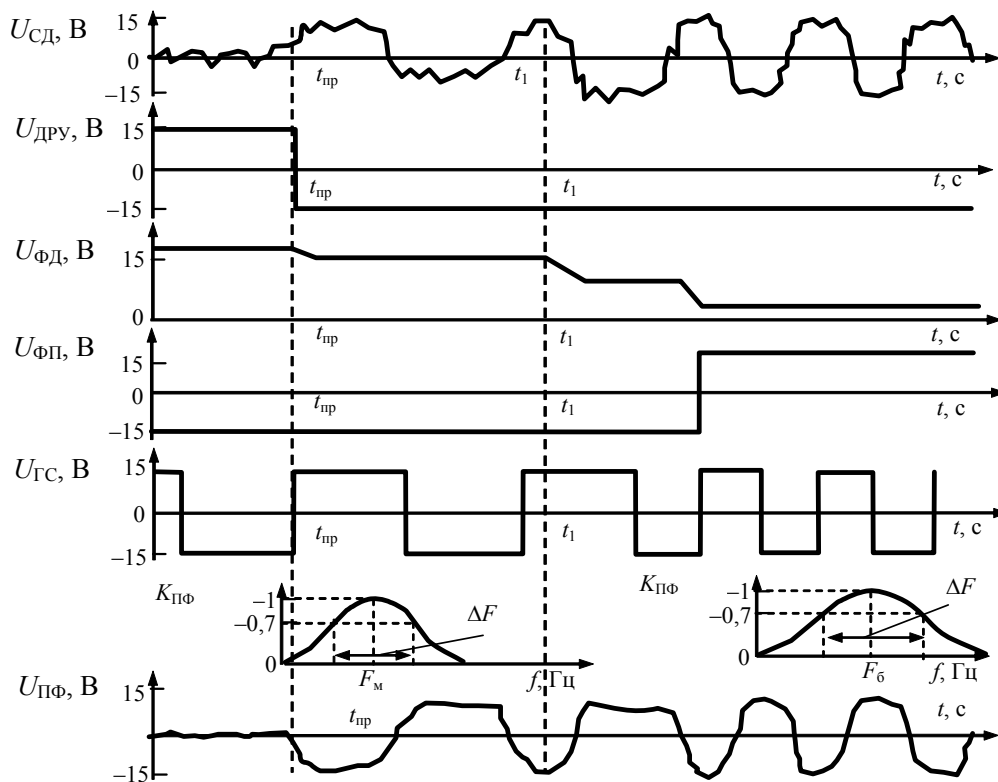


Рис. 2. Диаграммы адаптивного временного ЯМР-расходомера:

$U_{сд}$, $U_{дру}$, $U_{фд}$, $U_{фп}$, $U_{гс}$, $U_{пф}$ – напряжения на выходах синхронного детектора, детектора резонансных условий, фазового детектора, функционального преобразователя, генератора синхронизации и полосового фильтра соответственно; $K_{пф}$ – амплитудно-частотные характеристики

Импульсы напряжения генератора синхронизации периодически включают генератор нутации, что изменяет направление намагниченности под воздействием резонансного поля нутации и создает в потоке метки ЯМР. Фазовый сдвиг φ между сигналами генератора нутации и синхронного детектора, характеризующий движение метки, связан с расходом следующим соотношением:

$$Q = a_0 + \frac{2\pi R^2 L_n}{T_n \varphi} + f(\varphi^{-2}; \varphi^{-3}; \dots), \quad (1)$$

где L_n – длина измерительного участка; T_n – период следования импульсов отметки. Третье слагаемое в (1) описывает нелинейность, возникающую из-за неравенства скорости метки и средней скорости потока.

Фазовый детектор преобразует сдвиг фаз в напряжение, управляющее аналоговым преобразователем $1/X$, выходное напряжение которого примерно пропорционально расходу. Это напряжение поступает на АЦП и в микроконтроллер. Температурная коррекция характеристики преобразователя осуществляется микроконтроллером по сигналу с датчика Холла.

Снижение случайных погрешностей измерения расхода, обусловленных шумами в тракте регистрации, для меточных ЯМР-расходомеров временного типа достигается применением адаптивной частоты отметки и полосы пропускания канала регистрации к скорости жидкости. Погрешность определения информативного параметра связана с напряжением шумов в тракте регистрации:

$$\delta t_{\text{пер}} = \frac{A_{\text{ш}}}{dA/dt}, \quad (2)$$

где $A_{\text{ш}}$ – амплитуда шумовых флуктуаций сигнала; dA/dt – скорость изменения интенсивности в момент регистрации отметки.

Случайная погрешность, возникающая при измерении расхода, характеризуется погрешностью информативного параметра:

$$\frac{\delta Q}{Q} \approx \frac{\delta t_{\text{пер}}}{t_{\text{пер}}} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_n \tau_y}} = \frac{A_{\text{ш}}}{t_{\text{пер}} (dA/dt)} \sqrt{\frac{T_n}{\tau_y}}, \quad (3)$$

где ω_n – частота импульсов; τ_y – время усреднения расхода.

Скорость изменения интенсивности сигнала ЯМР зависит от длины катушки регистрации и функции распределения частиц по скоростям. Для идеального случая, когда скорость по сечению трубопровода является постоянной

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A_a W}{l} = \frac{A_{\text{ш}} CW}{l}, \quad (4)$$

где A_a – амплитуда сигнала метки; W – скорость метки; l – длина измерительного участка; $C = A_a / A_{\text{ш}}$ – отношение сигнала к шуму.

Распределение скоростей по сечению трубопровода уменьшает dA/dt по сравнению с величиной, задаваемой (4). Значение dA/dt можно получить из напряжения, характеризующего движение метки:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{Q} &\geq \frac{l}{t_{\text{пер}} CW} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_n \tau_y}} = \frac{l}{t_{\text{пер}} CW} \sqrt{\frac{T_n}{\tau_y}} = \\ &= \frac{l S_n}{C(V_5 + V_6)} \sqrt{\frac{T_n}{\tau_y}} = \frac{l}{L_n C} \sqrt{\frac{T_n}{\tau_y}}. \end{aligned} \quad (5)$$

При постоянной частоте отметки случайные погрешности временного расходомера растут с увеличением расхода, а нижний предел задается условием $Q_{\text{min}} = (V_5 + V_6) / T_n$, которое вытекает из требования однозначности показаний $T_n \geq t_{\text{пер}}$, справедливого для меточных расходомеров. Идея адаптивного расходомера состоит в повышении частоты отметки пропорционально расходу жидкости и в соответствующем изменении полосы пропускания канала регистрации при соблюдении условия однозначности, что, согласно (5), повышает точность измерений. Сигнал каждого одиночного акта измерения может быть использован для оптимальной настройки системы регистрации при следующих измерениях. Такой учет предыстории в реальных системах возможен в связи с ограниченной скоростью изменения расхода.

Структурная схема адаптивного меточного ЯМР-расходомера временного типа с адаптацией частоты отметки и полосы пропускания канала регистрации к расходу приведена на рис. 1, а временные диаграммы его работы – на рис. 2.

Устройство работает следующим образом. Измеряемая жидкость поступает в магнитное поле поляризатора, затем проходит катушку нутации и попадает в анализатор. В момент включения прибора из-за расстройки резонансных условий в анализаторе сигнал ЯМР на выходе спиновое детектора отсутствует, на выходе синхронного детектора (СД) напряжение близко к нулю, при этом не превышает порог срабатывания ДРУ, а на его выходе устанавливается высокий потенциал, соответствующий расстройке резонансных условий в анализаторе. ДРУ сканирует частоту генерации спиновое детектора пилообразным напряжением и одновременно принудительно устанавливает высокое напряжение, соответствующее минимальным расходам, на выходе фазового детектора. Функциональный преобразователь переключается в состояние с низким потенциалом и устанавливает частоту F_m генератора синхронизации и полосу пропускания регулируемого полосового фильтра, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) которого согласуется с частотой отметки.

В момент прохождения резонансных условий $t_{\text{пр}}$ на выходе ДРУ появляется низкий потенциал,

устройство автопоиска переключается в режим стабилизации, а управляющий вход фазового детектора не оказывает воздействия на его выход, т. е. напряжение фазового детектора определяется разностью фаз между сигналами с генератора синхронизации и регулируемого полосового фильтра. Начинается измерение расхода. Генератор синхронизации включает и выключает генератор нутации, обеспечивая периодическое изменение намагниченности жидкости под воздействием резонансного поля катушки нутации.

Таким образом, в потоке создаются метки ЯМР, регистрация которых осуществляется в анализаторе модуляционным методом.

При малом расходе из-за большого времени распространения метки по измерительному участку наблюдается значительный сдвиг фаз между сигналами с генератора синхронизации и регулируемого полосового фильтра, сохраняются состояние функционального преобразователя, частота отметки F_m , задаваемая генератором синхронизации и полосовым фильтром, реализованном на микроконтроллере. Увеличение расхода снижает информативный фазовый сдвиг. При этом уменьшается напряжение на выходе фазового детектора и переключается функциональный преобразователь, одновременно изменяя на F_0 частоту отметки и АЧХ полосового фильтра, оставляя неизменной ширину полосы его пропускания ΔF . Время адаптации системы регистрации не превышает периода отметки после изменения расхода. Схема измерения преобразует напряжение фазового детектора в расход и производит индикацию значения расхода. Это взаимодействие между блоками сохраняется при любых изменениях расхода.

Функциональный преобразователь представляет собой последовательно соединенные преобразователь напряжения $1/X$, который выполнен на основе аналоговых перемножителей, параллельный АЦП и схему смещения уровня или дешифратор, обеспечивающие управление генератором синхронизации и регулируемым полосовым фильтром. Для расходомера с двумя частотами отметки в качестве функционального преобразователя можно использовать инвертирующий триггер Шмитта.

Детектор резонансных условий представляет собой пиковый детектор с постоянной времени, превышающей период отметки, и компаратор. В качестве фильтров с регулируемой полосой пропускания оптимальными являются адаптивные фильтры, которые обладают стабильными фазовыми характеристиками и не вносят дополнительных погрешностей измерения расхода, обусловленных дрейфом фазовых сдвигов в тракте.

Устойчивость адаптивного расходомера определяется максимально возможной скоростью изменения расхода. Условием однозначности показаний является необходимость того, чтобы информативный фазовый сдвиг не превышал 360° .

Граничный расход, соответствующий переключению частоты отметки, отличается от нижнего предела измерений, задаваемого условием однозначности, на величину изменения расхода за период отметки. Для двух частот отметки:

$$Q_{\text{пер}} = \pi R^2 L_n F_0 + F_0^{-1} \frac{dQ}{dt}. \quad (6)$$

Реальная скорость изменения расхода в гидравлических трактах технологических процессов, например процессов подготовки аминов, требует превышения второго слагаемого в (6) над первым в 3–4 раза.

Закключение. По сравнению с меточными расходомерами частотного типа разработанный адаптивный измеритель обеспечивает повышенную точность измерений за счет сужения полосы пропускания канала регистрации; в сравнении с временными к увеличению точности на больших расходах приводит рост частоты отметки. Применение адаптивной системы регистрации в измерителе расхода без увеличения времени усреднения в 4 раза уменьшило случайные погрешности и обеспечило повышение точности до 1% при времени измерения 3 с для двух частот отметки (1 и 4 Гц).

Разработка термостабильных систем измерительных преобразователей на постоянных магнитах, реализующих компенсацию влияния температуры на индукцию поля анализатора в зазоре магнитной системы, достаточно сложна, ввиду этого целесообразно использовать схемы на основе измерителей сдвига индукции.

Введение контура стабилизации с коррекцией характеристики по индукции поля анализатора позволяет сократить погрешности, возникающие при смене режимов течения, и погрешности, связанные с изменением релаксационных показателей технологических сред.

Литература

1. Жерновой, А. И. Ядерно-магнитный расходомер с отметкой в приемной катушке / А. И. Жерновой // Известия вузов. – 2007. – № 1. – С. 39–43.
2. Жерновой, А. И. Ядерно-магнитные расходомеры / А. И. Жерновой. – Л.: Машиностроение, 1985. – 136 с.
3. Пряхин, А. Е. Нутационный измеритель расхода протонсодержащих жидкостей / А. Е. Пряхин, С. С. Шушкевич, И. О. Оробей // Приборы и техника эксперимента. – 1983. – № 6. – С. 186–188.
4. A Magnetometer Based on a Hall-Effect Transducer / I. O. Orobei [et al.] // Instrument and Experimental Techniques. – 2003. – Vol. 46, № 2. – P. 271–274.
5. Сарака, В. В. ЯМР-расходомер жидкостей на эффекте Джексона-Вангснесса / В. В. Сарака, И. О. Оробей // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2005. – Вып. XIII. – С. 127–129.

В. В. Сарока, ассистент; О. И. Оробей, учащийся; Д. А. Гринюк, доцент;
М. А. Анкуда, ассистент; И. О. Оробей, доцент

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНФОРМАТИВНОГО ПАРАМЕТРА МЕТОЧНОГО ЯМР-РАСХОДОМЕРА ПО СПЕКТРАЛЬНОМУ РАЗЛОЖЕНИЮ НАМАГНИЧЕННОСТИ ПРИ ДВИЖЕНИИ МЕТКИ ПО ИЗМЕРИТЕЛЬНОМУ УЧАСТКУ

In article are touched questions, connected with actual methods of the analysis of the information parameter marks flowmeter. The Executed studies have allowed to work out the practical recommendations for making the methods of the determination worker parameter marks NMR flowmeter on spectral decomposition magnet when moving the mark on measuring area. The Designed way enables to realize the determination an worker parameter with minimization of inaccuracy, which can contribute such factors as change the mode of the current of the flow, the temperature measured to liquids, as well as time to relaxations. Use the brought methods can be of interest when making marks flowmeter of the different types: heat, electromagnetic, inductions and others.

Введение. Меточный ЯМР-расходомер временного типа (рис. 1) работает следующим образом. Измеряемая жидкость поляризуется в кюветах 2 полями магнитов 1, после чего по транспортному участку поступает в катушку отметки 4, расположенную в поле магнитов 3. Отметка инверсией осуществляется импульсами радиочастотного поля. Регистрация намагниченности с целью определения времени распространения метки ЯМР по измерительному участку производится модуляционным методом в катушке 6, расположенной в поле магнитов анализатора 5. Поле модуляции создают катушки 7 [1]. При разработке меточных ЯМР-расходомеров существует проблема оценки информативного параметра.

Основная часть. Поскольку интенсивность сигнала в катушке регистрации без учета насыщения в первом приближении пропорциональна намагниченности жидкости, то следует получить

выражение для намагниченности в анализаторе. Примем, что индукции B_{n1} , B_{n2} , B_a направлены по оси Oz (рис. 1), а жидкость движется по оси Ox . Процесс намагничивания описывается уравнениями Блоха, в которых можно пренебречь действием радиочастотных полей с равновесным значением намагниченности, зависящим от x , так как $B_0 = B(x)$ (рис. 1), т. е. $M_0 = \chi_0 B_0 = \chi_0 B(x)$. При отметке инверсией намагниченности в разных сечениях гидравлического тракта имеют вид

$$M_{A-A} = \chi_0 B_{n1} \left[1 - e^{-V_{n1}(\mathcal{Q}T_1)^{-1}} \right], \quad (1)$$

$$M_{B-B} = \chi_0 B_{n1} \left[1 - e^{-V_{n1}(\mathcal{Q}T_1)^{-1}} \right] e^{-V_3(\mathcal{Q}T_1)^{-1}}, \quad (2)$$

$$M_{C-C} = (\chi_0 B_2 - M_{B-B}) \left[1 - e^{-V_{n2}(\mathcal{Q}T_1)^{-1}} \right] + M_{B-B}, \quad (3)$$

$$M_{D-D}^{\pm} = \pm M_{C-C} e^{-V_4(\mathcal{Q}T_1)^{-1}}, \quad (4)$$

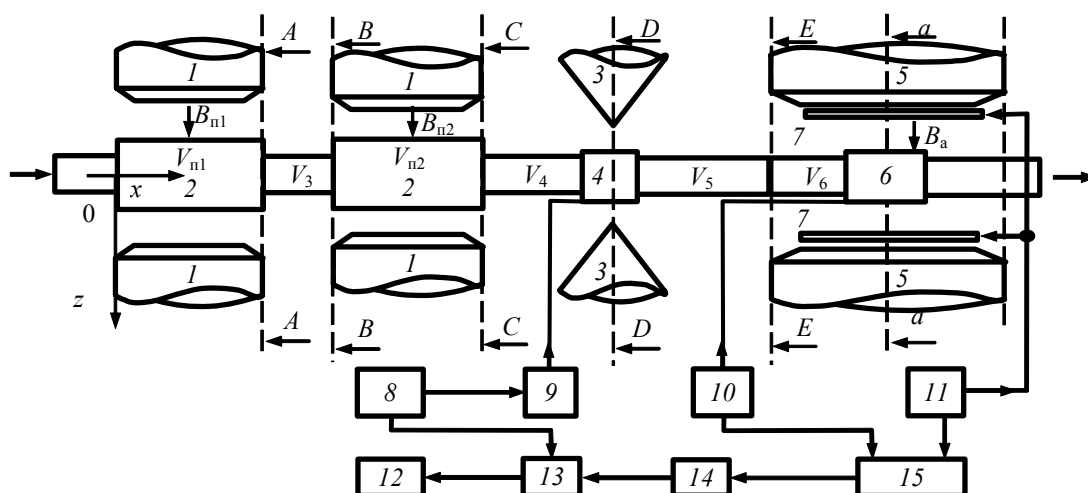


Рис. 1. Структурная схема ЯМР-расходомера временного типа:

- 1, 2 – магниты и кюветы поляризаторов соответственно; 3 – магниты отметки;
4 – катушка отметки; 5 – магниты анализатора; 6 – катушка регистрации;
7 – катушки модуляции; 8 – генератор синхронизации; 9 – генератор нутации;
10 – спиновый детектор; 11 – генератор модуляции; 12 – устройство преобразования и индикации;
13 – фазовый детектор; 14 – блок фильтрации импульсов отметки; 15 – синхронный детектор

$$M_{E-E}^{\pm} = M_{D-D}^{\pm} e^{-V_5(QT_1)^{-1}}, \quad (5)$$

$$M_{a-a}^{\pm} = \left(\chi_0 B_a - M_{E-E}^{\pm} \right) \left[1 - e^{-V_6(QT_1)^{-1}} \right] + M_{E-E}^{\pm}, \quad (6)$$

$$M_n = M_{a-a}^+ - M_{a-a}^-, \quad (7)$$

где B_{n1}, B_{n2}, B_a – индукции полей поляризаторов и анализатора соответственно; V_3, V_4 – объемы транспортных участков; V_5, V_6 – объемы измерительного участка вне и в поле анализатора соответственно; V_{n1}, V_{n2} – объемы поляризаторов; M_n – амплитуда метки. Верхние знаки в (4)–(7) соответствуют объемам с инвертированной намагниченностью, нижние – с инвертированной. Единицы измерения используемых в расчетах величин: объемы – см³; расход – л/ч; индукции полей – Гс; время релаксации – с; намагниченность – Гс. Расчет намагниченностей в характерных точках гидравлического тракта первичного преобразователя позволяет получить диапазон измеряемых расходов, но не дает величины погрешностей.

Оценку погрешностей можно проводить по информативному параметру, которым в меточных расходомерах является время перемещения метки по измерительному участку. Одним из возможных методов определения этого времени следует считать спектральный анализ движения метки [2]. Рассмотрим методику на примере расходомера, представленного на рис. 1. Пусть отметка производится инверсией намагниченности импульсами радиочастотного поля катушки нутации со скважностью 2. Используя разложение в ряд Фурье, с учетом (1)–(4) получаем намагниченность в сечении отметки:

$$M_{D-D} = \frac{4}{\pi} M_{C-C} \exp\left(-\frac{V_4}{QT_1}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\omega_n t}{n}\right), \quad (8)$$

где n – номер гармоники в разложении импульсов намагниченности в ряд Фурье; ω_n – частота импульсов отметки; t – интервал времени от момента отметки.

С учетом распределения скоростей и домагничивания на измерительном участке зависимость от времени намагниченности в объеме регистрации имеет вид

$$M_k(t) = \frac{2\pi V_{к.р}}{S_n} \chi_0 B_a \int_0^R \left(1 - e^{-\frac{V_6}{S_n T_1 W(r)}} \right) r dr + \frac{16M_{C-C}}{\omega_n} e^{-\frac{V_4 R}{QT_1}} \int_0^R e^{-\frac{-(V_5+V_6)}{S_n W(r) T_1}} W(r) \times \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\omega_n V_{к.р}}{2S_n W(r)}\right) \times$$

$$\times \sin\left(n\omega_n \left(t - \frac{V_5+V_6}{S_n W(r)}\right)\right) r dr, \quad (9)$$

где $V_{к.р}$ – объем катушки регистрации; S_n – площадь поперечного сечения трубопровода на измерительном участке; $W(r)$ – распределение скоростей.

Первое слагаемое в (9) дает постоянную составляющую намагниченности в объеме катушки регистрации из-за домагничивания в анализаторе, второе – переменную, характеризующую движение метки:

$$u(t) = K_n 16M_{C-C} \exp\left(\frac{-V_4}{QT_1}\right) \omega_n^{-1} \times \times \int_0^R \exp\left(\frac{-(V_5+V_6)}{S_n W(r) T_1}\right) W(r) \times \times \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\omega_n V_{к.р}}{2S_n W(r)}\right) \times \times \sin\left(n\omega_n \left(t - \frac{V_5+V_6}{S_n W(r)}\right)\right) r dr, \quad (10)$$

где K_n – коэффициент пропорциональности.

Поле анализатора не влияет на переменную часть намагниченности и (10), т. е. домагничивание на измерительном участке не оказывает воздействия на информативный параметр. Подставляя в (10) распределения скоростей для разных режимов течения, получаем выражения для метки при ламинарном и турбулентном потоках. Время перемещения метки по измерительному участку определяется из уравнения

$$u(t) = A_g, \quad (11)$$

где A_g – уровень срабатывания.

В ЯМР-расходомерах критерием прихода фронта метки в катушку регистрации является $u(t) = 0$. Приравнявая к нулю (10), получаем уравнения для расчета информативного параметра.

Расчет временных диаграмм метки ЯМР для разных расходов проведен в пакете Matlab. На рис. 2 приведены рассчитанные временные диаграммы метки для разных расходов при ламинарном и турбулентном потоках для расходомеров с гидравлическим трактом в виде цилиндрического прямого трубопровода.

Метки ЯМР ставятся в нулевой момент времени. Момент пересечения фронта метки с осью времени является информативным параметром. Расположения фронтов меток при ламинарном и турбулентном режимах не совпадают. На малых расходах присутствует набег фаз – фаза предыдущего импульса фиксируется

после установки последующей метки. Это явление указывает на сложность измерения малых диапазонов расходов методом ЯМР, что критично при конструировании расходомеров малых расходов [3].

Численное решение уравнений для определения времени перемещения метки ЯМР осуществлялось методом дихотомии. Погрешность вычисленного значения информативного параметра до 0,2% обеспечивалась при 500 шагах разбиения радиуса трубопровода с учетом гармонических составляющих метки с частотой, в 600 раз большей частоты отметки.

Значительные несовпадения информативных параметров при ламинарном и турбулентном потоках приводят к большим погрешностям при смене режима течения. Относительные погрешности при смене режима течения достигают 30%. Большая часть расходов приходится на участок с турбулентным режимом течения. Несовпадение времени перемещения метки наблюдается и с изменением времени релаксации жидкости, что вызывает появление релаксационных погрешностей ЯМР-расходомеров. На погрешности для турбулентного режима изменения T_1 особого влияния не оказывают (до 3% при минимальных расходах и T_1), релаксационные погрешности имеют максимум при малых скоростях. Изменения T_1 оказывают влияние для ламинарного режима (до 12% при минимальных расходах и T_1), погрешности имеют максимум при малых скоростях. Исходя из этого появляется необходимость компенсации релаксационных погрешностей для малых расходов.

При построении систем управления особую роль играет информация о динамических

характеристиках измерительных преобразователей. Информативным параметром, по которому определяется расход жидкости, является время перемещения метки ЯМР по измерительному участку расходомера от момента постановки метки до момента регистрации. В идеальном случае (отсутствие искажений формы метки, связанных с режимом течения и T_1 среды):

$$Q = (V_5 + V_6)t_n^{-1}. \quad (12)$$

На t_n оказывают влияние многие факторы. При определении статических характеристик необходимо учитывать и компенсировать влияние тех факторов, которые вносят наибольший вклад в погрешность измерения информативного параметра. Статическая характеристика как функция расхода от $(t_n)^{-1}$ получена методом наименьших квадратов (МНК) для различных степеней аппроксимирующего многочлена по расчетным данным. Для определения необходимой степени аппроксимирующего многочлена применяются аппроксимирующие многочлены до десятой степени. По квадратичной погрешности оценивалась ошибка аппроксимации:

$$\Delta = \sqrt{\sum_n (Q_n - Q_{\text{апп}n})^2 n^{-1}}, \quad (13)$$

где $Q_{\text{апп}}$ – расход по аппроксимирующему полиному; n – количество точек измерения.

Результатом оценки является вывод о достаточности использования полиномов четвертого порядка для описания процесса:

$$Q = a_0 + a_1 t_n^{-1} + a_2 t_n^{-2} + a_3 t_n^{-3} + a_4 t_n^{-4}, \quad (14)$$

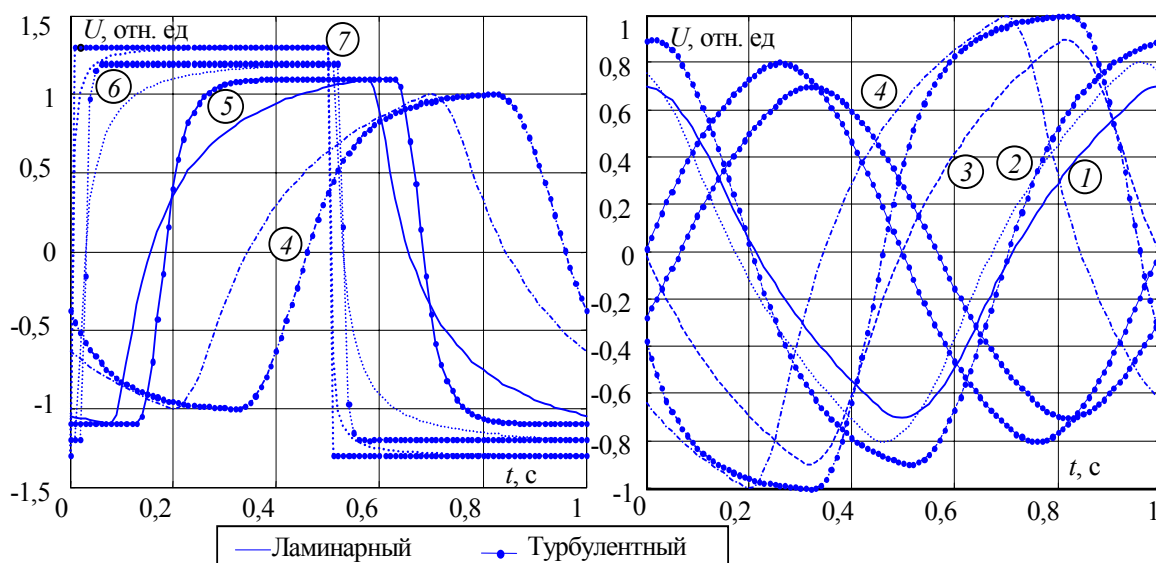


Рис. 2. Метки ЯМР при ламинарном и турбулентном режимах ($V_{n1} = 50 \text{ см}^3$; $V_3 = V_5 = 0$; $V_{n2} = 40 \text{ см}^3$; $V_4 = 3,14 \text{ см}^3$; $V_6 = 9,4 \text{ см}^3$; $B_a = 2800 \text{ Гс}$; $\omega_n = 2\pi \text{ рад/с}$; $V_{кр} = 3,14 \text{ см}^3$; $D = 20 \text{ мм}$; $T_1 = 3,5 \text{ с}$; рад/с): 1–7 отвечают расходам 0,0085; 0,0091; 0,013; 0,02; 0,05; 0,30; 1,94 л/с соответственно

где a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 – коэффициенты аппроксимирующего полинома.

Статическая характеристика носит нелинейный характер даже при неизменном режиме течения. При выводе передаточной функции необходимо учитывать работу в диапазоне расходов, охватывающем разные режимы, для которых характерно существенное изменение коэффициентов аппроксимирующего полинома, что вносит дополнительный вклад в нелинейность передаточной функции. Для статической линеаризации получим

$$\frac{dQ}{dt_n^{-1}} = a_1 + 2a_2 t_n^{-1} + 3a_3 t_n^{-2} + 4a_4 t_n^{-3} \quad (15)$$

и учтем, что измеряемый диапазон состоит из двух участков с ламинарным и турбулентным течением, которые имеют свои коэффициенты полинома

$$\frac{dQ}{dt_n^{-1}} = \begin{cases} a_{1л} + 2a_{2л} t_n^{-1} + \dots + 4a_{4л} t_n^{-3}, & t_n > t_{п.кр} \\ a_{1т} + 2a_{2т} t_n^{-1} + \dots + 4a_{4т} t_n^{-3}, & t_n < t_{п.кр} \end{cases} \quad (16)$$

где $a_{хл}, a_{хт}$ – коэффициенты аппроксимирующих полиномов в (14) для ламинарного и турбулентного режимов течения, выбираемые для соответствующих T_1 ; $t_{п.кр}$ – время перемещения метки, соответствующее критическому расходу и определяемое по (14) и известному критическому расходу.

Измерение расхода связано с временем распространения метки. Информация о расходе поступает с запаздыванием на измерительном участке, которое обусловлено расходом. Это запаздывание лежит в диапазоне от миллисекунд до секунды, т. е. в передаточную функцию преобразователя расхода входит звено с переменным запаздыванием. На время запаздывания влияют свойства жидкости и режимы течения. Используя аппроксимацию зависимости времени перемещения метки от расхода по МНК, определяем коэффициенты полинома, описывающего запаздывание. Оценка ошибки обосновывает использование для аппроксимации запаздывания полиномов четвертого порядка:

$$\tau_n = (b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2 + \dots + b_4 Q^4)^{-1}, \quad (17)$$

где b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 – коэффициенты аппроксимирующих полиномов для ламинарного и турбулентного режимов течения, выбираемые для соответствующих T_1 .

Передаточная функция по каналу время перемещения метки – расход представляется в виде

$$W_a(p) = \frac{dQ}{dt_n^{-1}} e^{-\tau_n p}. \quad (18)$$

Из амплитудофазочастотных характеристик (АФЧХ), построенных по (18) для ламинарного

и турбулентного режимов течения, видно, что одним и тем же частотам соответствует разный сдвиг фаз метки ЯМР, поэтому малоинерционные системы с меточными преобразователями могут быть неустойчивыми.

Описание процессов, влияющих на скорость перемещения метки ЯМР, с помощью спектрального анализа функции намагниченности отдельных элементов жидкости с последующим синтезом интегральной намагниченности позволяет провести расчет информативного параметра, но занимает много времени для вычисления.

Интерес представляет интегральная оценка информативного параметра и сравнение полученных на ее основе результатов со значениями, вытекающими из (8)–(11). Введем величину нормированной относительно максимально возможной в потоке намагниченности, информирующей о метке ЯМР:

$$M_{норм}(r, dr) = \frac{M_n(r)S(r, dr)}{M_{max}}, \quad (19)$$

где $M_n(r)$ – амплитуда метки для слоя на расстоянии r от центра трубопровода; $S(r, dr)$ – площадь кольца толщиной dr на расстоянии r ; M_{max} – максимальная амплитуда метки.

С учетом (1)–(7) определим скорость метки ЯМР, принимая во внимание весовой вклад в результирующую метку нормированной переменной намагниченности слоя жидкости, представленной в (19):

$$W_{ЯМР} = \int_0^R \frac{M_{норм}(r, dr)W(r)}{\pi R^2}. \quad (20)$$

Из (20) следует равенство средней скорости потока и скорости метки ЯМР при большом T_1 или постоянстве скорости среды по сечению. Полное перемешивание жидкости на транспортном участке, обеспечивающее равномерную по сечению намагниченность на входе в катушку отметки, можно учесть условием $V_4 = 0$. Время прохождения меткой ЯМР измерительного участка:

$$t_n = (V_5 + V_6)(\pi R^2 W_{ЯМР})^{-1}. \quad (21)$$

Заключение. Релаксационные погрешности исследовались на воде и водных растворах медного купороса, моделирующих T_1 . Погрешности смены режима течения оценивались сравнением зависимостей информативного параметра от расхода при разных температурах. Подбор вязкости изменением температуры обеспечивает перемещение переходного режима от 20 до 7000 л/ч. Релаксационными погрешностями, связанными с зависимостью T_1 от температуры, можно пренебречь из-за незначи-

тельности по сравнению с погрешностями смены режима течения.

Экспериментальные значения оказались ниже расчетных в 2–5 раз, что объясняется малой длиной транспортного и измерительного участков по сравнению с длиной начального участка, на котором происходит развитие ламинарного или турбулентного течения. Совпадение с экспериментом получено при суммарной длине транспортного и измерительного участков, в 2–5 раз превышающей внутренний диаметр.

Процессы, протекающие в меточном ЯМР-расходомере, аналогичны процессам для всех типов расходомеров, измеряющих в качестве информативного параметра время распространения метки (радиационные, ионизационные, тепловые и т. д.), поэтому методику расчета информативного параметра и передаточной функции можно распространить на все меточные расходомеры с затухающей меткой.

Литература

1. Сарока, В. В. ЯМР-измеритель расхода / В. В. Сарока, И. О. Оробей, А. Л. Пархимович // Компьютеризация в химической и смежных отраслях промышленности: материалы Международ. науч.-техн. семинара, Новополоцк, 15 дек. 2005 г. / ПГУ. – Новополоцк, 2006. – С. 68–71.

2. Сарока, В. В. Метод исследования массопереноса жидких сред на эффекте ЯМР / В. В. Сарока, И. О. Оробей, А. Е. Пряхин // Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов: материалы Международ. науч.-техн. конф., Минск, 22–24 окт. 2003 г. / БГТУ. – Минск, 2003. – С. 35.

3. Методика расчета релаксационных погрешностей меточных ядерно-магнитных расходомеров нутационно-фазового типа при ламинарном течении / А. Е. Пряхин [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 1986. – Т. 51, № 6. – С. 1011–1015.

Н. И. Ульянов, ассистент; И. Ф. Кузьмицкий, доцент

СПОСОБ РАСЧЕТА РАЗДЕЛЕНИЯ СПИРТОВЫХ СМЕСЕЙ И ОЦЕНКА КАЧЕСТВА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

The way of adaptation of a method of modelling of multicomponent rectification «from a plate to a plate» for calculation of division alcohol multicomponent mixes is offered. The given way allows to reduce analytical dynamic models, models aperiodic a link of the second order and a link of delay that has allowed to receive transfer functions for calculation of parameters of quality of process of rectification. The analysis of the received transfer functions for the various substances included in made spirit and various modes of productivity of installation which has shown that essentially distinguished factors of transfer are observed carried out. It causes application of a circuit of adaptation of factor of amplification in system of automatic control. For an estimation of quality of management rectification installations from a position of quality management of a product and economy of power resources the generalized criterion is offered.

Введение. Теория ректификации многокомпонентных смесей разрабатывалась достаточно интенсивно. Широко известны методика Тиле и Геддеса – «способ независимого определения концентраций», а также методика Льюиса и Матисона – «от тарелки к тарелке».

В методике Тиле и Геддеса в качестве независимых переменных берутся температуры на тарелках колонны. Метод Льюиса и Матисона отличается тем, что в качестве независимых переменных выбирается распределение каждого компонента между дистиллятом и кубовым продуктом.

Метод Льюиса – Матисона с большим трудом обеспечивает сходимость вычислений и требует применения специальных процедур (блокировка, отслеживание значений переменных и др.).

Описанные способы разработаны для использования в нефтехимической, химической отраслях промышленности, где содержания компонентов в разделяемых смесях сопоставимы друг с другом. В спиртовой промышленности перерабатываются смеси, в которых в большой степени присутствует этанол и вода, а остальные компоненты являются примесными и содержатся в малом количестве. Большое различие в характерах и свойствах смесей наблюдается для верхнего и нижнего продуктов колонны. Эфиральдегидная фракция может содержать около 30% примесных компонентов при содержании этилового спирта также 30%, а содержание примесных компонентов в готовом продукте должно быть мизерным [1], не более нескольких миллиграммов на литр. Применение описанных методов к спиртовым смесям не всегда приводит к сходимости вычислений.

Поэтому осуществляются попытки адаптировать уже известные способы расчета ректификации многокомпонентных смесей для расчета разделения спиртовых многокомпонентных смесей.

Основная часть. Математическая модель массообменного процесса на тарелке колонны брагоректификационной установки (БРУ) имеет следующий вид [2]:

$$\frac{dM_i}{dt} = L_{i+1} - L_i, G_{i-1} = G_i,$$

$$M_i \frac{d\Theta_{L,i}}{dt} = L_{i+1}(\Theta_{L,i+1} - \Theta_{L,i}) + G_{i-1}(\Theta_{G,i-1} - \Theta_{G,i}),$$

$$\Theta_{G,i}(t) = \Theta_{G,i-1}(t)e^{R_i(t)} - \Theta_{G,i}^*(\Theta_{L,i}(t))(e^{R_i(t)} - 1).$$

Общий коэффициент массопередачи определяется по формуле

$$K_i = \frac{S}{\frac{1}{\beta_{yi}} + \frac{m_i}{\beta_{xi}}},$$

где S – эффективная площадь тарелки; β_{yi} – частный коэффициент массоотдачи в паровой фазе; m_i – коэффициент, учитывающий равновесие в системе «этиловый спирт – вода»; β_{xi} – частный коэффициент массоотдачи в жидкой фазе.

Коэффициенты β_{yi} , β_{xi} используются для корректировки модели или, точнее, для «привязки» ее к реальному объекту.

Для повышения точности расчета коэффициента массопередачи предлагается следующая модель вычисления коэффициентов массоотдачи:

$$\beta_{yi} = \alpha_1 G_i^2 + \alpha_2 G_i + \alpha_3,$$

$$\beta_{xi} = \alpha_4 L_i + \alpha_5,$$

где α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , α_5 – настроечные коэффициенты.

Тепловая модель процесса брагоректификации в дифференциальной форме имеет вид

$$S \frac{dl}{dt} = G_{i-1} + L_{i+1} - L_i(l) - G_i(l),$$

$$\rho C_p S \frac{d(lT)}{dt} = \rho C_p \times$$

$$\times [G_{i-1} T_{G,i-1} + L_{i+1} T_{L,i+1} - L_i(l) T_{L,i} - G_i(l) T_{G,i}],$$

где ρ – плотность жидкости; C_p – теплоемкость при постоянном давлении; T – температура жидкости на тарелке.

Коэффициенты передачи и постоянные времени тарелок бражной колонны

Максимальный режим производительности БРУ		Номинальный режим производительности БРУ		Минимальный режим производительности БРУ	
K_i	T_i	K_i	T_i	K_i	T_i
0,18	0,08	0,20	0,08	0,27	0,09
0,19	0,08	0,25	0,08	0,29	0,09
0,21	0,08	0,30	0,08	0,31	0,09
0,25	0,08	0,35	0,08	0,37	0,09
0,27	0,08	0,40	0,08	0,44	0,09
0,29	0,10	0,45	0,09	0,51	0,10
0,33	0,10	0,50	0,09	0,58	0,10
0,36	0,10	0,55	0,09	0,64	0,10
0,39	0,10	0,60	0,09	0,71	0,10
0,42	0,10	0,65	0,09	0,78	0,10
0,52	0,16	0,70	0,09	0,85	0,11
0,60	0,16	0,75	0,09	0,91	0,11
0,70	0,19	0,80	0,09	0,99	0,11
0,75	0,20	1,00	0,09	1,00	0,11
0,80	0,20	1,00	0,09	1,30	0,11
0,90	0,26	1,00	0,09	1,35	0,11
1,05	0,27	1,00	0,10	1,35	0,15
1,50	0,27	1,00	0,11	1,35	0,16
1,90	0,28	1,40	0,12	1,36	0,17
1,90	0,28	1,50	0,13	1,37	0,18
2,40	0,09	1,60	0,14	1,38	0,19
2,51	0,10	1,70	0,15	1,40	0,20
2,54	0,13	1,90	0,20	1,45	0,30
2,60	0,16	2,00	0,25	1,50	0,35
3,82	0,20	2,80	0,30	1,60	0,40
4,89	0,23	2,90	0,35	1,79	0,45
5,16	0,26	3,32	0,40	2,48	0,55
5,24	0,29	3,45	0,45	2,66	0,80
5,28	0,33	3,50	0,50	2,73	0,90

Пользуясь уравнениями тепло- и массообмена и методикой получения передаточных функций по основным каналам управления [2], были рассчитаны коэффициенты усиления и постоянные времени для каждой тарелки колонн БРУ. Коэффициенты усиления и постоянные времена тепло- и массообменного процесса ректификации для трех режимов производительности БРУ приведены в таблице.

Аналитическую модель динамики тепло- и массообменного процесса в колонне можно представить цепочкой аperiodических звеньев с разными коэффициентами. На рис. 1 показана аналитическая модель динамики тепло- и массообменного процесса бражной колонны БРУ.

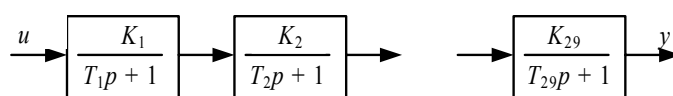


Рис. 1. Аналитическая модель динамики тепло- и массообменного процесса:

K_1 – K_{29} – коэффициенты передачи; T_1 – T_{29} – постоянные времена;

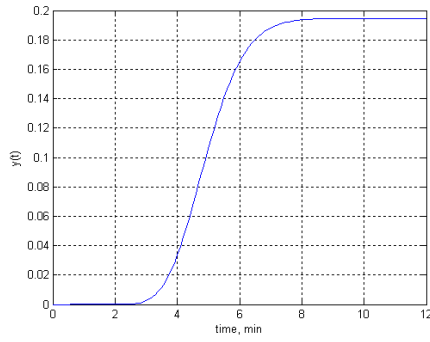
u – входная величина; y – выходная величина

На рис. 2 отражена переходная характеристика, полученная в результате подачи на вход аналитической модели динамики тепло- и массообменного процесса единичного ступенчатого сигнала $u(t) = 1$ (для трех режимов производительности БРУ).

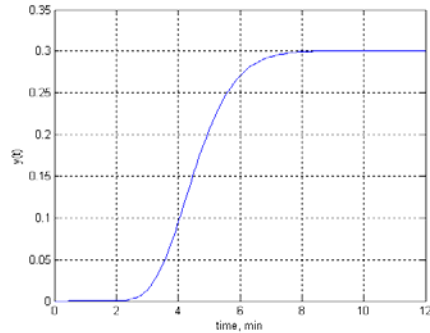
Данные аналитические модели можно редуцировать моделями аperiodического звена второго порядка и звена запаздывания.

Аperiodическое звено второго порядка и звено запаздывания описываются дифференциальным уравнением второго порядка с запаздыванием. Редуцированная модель примет следующий вид:

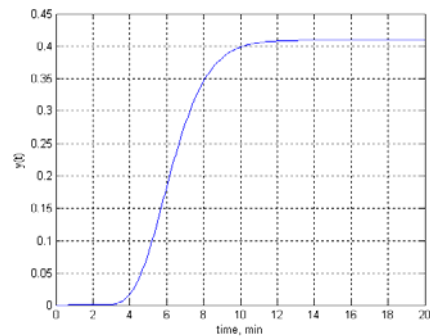
$$T_r' \frac{d^2 y_r(t)}{dt} + T_r'' \frac{dy_r(t)}{dt} + y_r(t) = Ku(t - \tau_r). \quad (1)$$



a



б



в

Рис. 2. Переходная характеристика:
a – максимальный режим;
б – номинальный режим;
в – минимальный режим

Передаточная функция редуцированной модели выглядит следующим образом:

$$W_r(p) = \frac{K}{T_r' p^2 + T_r'' p + 1} e^{-\tau_r p}. \quad (2)$$

Преобразуем уравнение (1) к следующему виду:

$$\frac{d^2 y_r(t)}{dt^2} = \frac{1}{T_r'} \left[Ku(t - \tau_r) - T_r'' \frac{dy_r(t)}{dt} - y_r(t) \right]. \quad (3)$$

Из уравнения (3) выразим $y_r(t)$:

$$y_r(t) = \frac{1}{T_r'} \iint \left[Ku(t - \tau_r) - T_r'' \frac{dy_r(t)}{dt} - y_r(t) \right] dt. \quad (4)$$

Подадим на вход модели единичное ступенчатое воздействие $u(t) = 1$. Запишем функцию ошибок F в виде

$$F = \sum_{i=1}^{i=N} [y(t_i) - y_r(t_i)]^2, \quad (5)$$

где N – число разбиений по оси t .

Для получения K , T_r' и T_r'' , при которых F является минимальной, применяются необходимые условия минимума:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial K} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial T_r'} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial T_r''} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решая систему уравнений (6), получим значения K , T_r' и T_r'' .

Запишем передаточную функцию редуцированной модели для бражной колонны БРУ (по концентрации этилового спирта) и настроечные коэффициенты α для трех режимов производительности:

1) максимальный режим производительности БРУ:

$$W_r(p, \alpha) = \frac{0,19}{0,59p^2 + 1,31p + 1} e^{-3,12p},$$

$$\alpha_1 = 1,13, \alpha_2 = 1,73, \alpha_3 = 3,86,$$

$$\alpha_4 = 1,57, \alpha_5 = 59,64;$$

2) номинальный режим производительности БРУ:

$$W_r(p, \alpha) = \frac{0,3}{0,63p^2 + 1,6p + 1} e^{-3,12p},$$

$$\alpha_1 = 1,03, \alpha_2 = 1,67, \alpha_3 = 2,33,$$

$$\alpha_4 = 8,32, \alpha_5 = 60,54;$$

3) минимальный режим производительности БРУ:

$$W_r(p, \alpha) = \frac{0,41}{0,79p^2 + 2,2p + 1} e^{-3,12p},$$

$$\alpha_1 = 1,13, \alpha_2 = 1,57, \alpha_3 = 2,81,$$

$$\alpha_4 = 1,32, \alpha_5 = 67,92.$$

Анализ параметров передаточных функций показывает, что значительно отличаются они лишь по величине коэффициента передачи. Если коэффициент передачи модели по номинальному режиму производительности БРУ взять в качестве номинального (K_n), тогда коэффициент передачи модели по максимальному

режиму производительности будет $K_{\max} \approx 0,71K_n$, а для модели по минимальному режиму производительности – $K_{\min} \approx 1,48K_n$.

Для нахождения передаточных функций редуцированной модели по концентрациям уксусного альдегида, сивушного масла, уксусно-этилового эфира, метилового спирта, свободных кислот воспользуемся уравнениями (1)–(6). По всем этим веществам будут отличные коэффициенты массопередачи.

Передаточная функция редуцированной модели для ректификационной колонны БРУ при номинальном режиме производительности выглядит следующим образом:

1) по концентрации уксусного альдегида:

$$W_r(p, \alpha) = \frac{0,38}{10,5p^2 + 3,2p + 1} e^{-8,85p};$$

2) по концентрации сивушного масла:

$$W_r(p, \alpha) = \frac{0,15}{2,3p^2 + 1,5p + 1} e^{-7,63p};$$

3) по концентрации уксусно-этилового эфира:

$$W_r(p, \alpha) = \frac{0,35}{8,1p^2 + 2,7p + 1} e^{-8,97p};$$

4) по концентрации метилового спирта:

$$W_r(p, \alpha) = \frac{0,21}{4,2p^2 + 3,9p + 1} e^{-9,15p};$$

5) по концентрации свободных кислот:

$$W_r(p, \alpha) = \frac{0,42}{2,2p^2 + 1,6p + 1} e^{-9,25p}.$$

Анализируя полученные передаточные функции редуцированных моделей по веществам, можно отметить, что они существенно отличаются по коэффициентам передачи. Например, если в качестве номинального коэффициента передачи (К_н) взять коэффициент передачи редуцированной модели по концентрации этилового спирта $K_n \approx K_{э,с}$, то остальные коэффициенты передачи можно записать так: по концентрации уксусного альдегида: $K_{у,а} \approx 1,5K_n$; по концентрации сивушного масла $K_{с,м} \approx 0,6K_n$; по концентрации уксусно-этилового эфира $K_{у,э} \approx 1,4K_n$; по концентрации метилового спирта $K_{м,с} \approx 0,8K_n$; по концентрации свободных кислот $K_{с,к} \approx 1,6K_n$.

Проведенный анализ современного состояния исследований и уровня автоматизации технологического процесса (ТП) ректификации в производстве ректифицированного пищевого этилового спирта (ЭС) показал, что в опубликованных ранее исследованиях отсутствует обобщенный критерий для оценки качества управления БРУ в динамических режимах.

Для оценки качества управления БРУ в динамических режимах и экономии энергоресурсов предлагается использовать обобщенный критерий ($I(q, t)$):

$$I(q, t) = \int_0^t \left[\begin{aligned} &(x_1(t) - x_{1d})d_{11} + (x_2(t) - x_{2d})d_{12} + \\ &+ (x_3(t) - x_{3d})d_{13} + (x_4(t) - x_{4d})d_{14} + \\ &+ (x_5(t) - x_{5d})d_{15} + (x_{6m} - x_6(t))d_{21} + \\ &+ (x_{7n} - x_7(t))^2 d_{31} + (x_{8n} - x_8(t))^2 d_{32} + \\ &+ c_{11}u_{11}^2(t) + c_{22}u_{12}^2(t) + c_{33}u_{13}^2(t) + \\ &+ c_{44}u_{21}^2(t) + c_{55}u_{22}^2(t) + c_{66}u_{23}^2(t) \end{aligned} \right] dt,$$

где t – время; $x_1(t)$ – массовая концентрация альдегидов в пересчете на уксусный в безводном спирте, мг/дм³; x_{1d} – допустимая массовая концентрация альдегидов в пересчете на уксусный в безводном спирте, мг/дм³; $x_2(t)$ – массовая концентрация сивушного масла в пересчете на безводный спирт, мг/дм³; x_{2d} – допустимая массовая концентрация сивушного масла в пересчете на безводный спирт, мг/дм³; $x_3(t)$ – массовая концентрация сложных эфиров в пересчете на уксусно-этиловый эфир в безводном спирте, мг/дм³; x_{3d} – допустимая массовая концентрация сложных эфиров в пересчете на уксусно-этиловый эфир в безводном спирте, мг/дм³; $x_4(t)$ – объемная доля метилового спирта в пересчете на безводный спирт, %; x_{4d} – допустимая объемная доля метилового спирта в пересчете на безводный спирт, %; $x_5(t)$ – массовая концентрация свободных кислот (без CO₂) в пересчете на безводный спирт, мг/дм³; x_{5d} – допустимая массовая концентрация свободных кислот (без CO₂) в пересчете на безводный спирт, мг/дм³; $x_6(t)$ – объемная доля этилового спирта, %; x_{6m} – минимальная объемная доля этилового спирта, %; $x_7(t)$ – массовый расход бражки, кг/ч; x_{7n} – номинальный массовый расход бражки, кг/ч; $x_8(t)$ – температура бражки на входе в БРУ, °С; x_{8n} – номинальная температура бражки на входе в БРУ, °С; $u_{11}(t)$ – массовый расход пара в бражной колонне (БК), кг/ч; $u_{12}(t)$ – массовый расход пара в эпорационной колонне (ЭК), кг/ч; $u_{13}(t)$ – массовый расход пара в ректификационной колонне (РК), кг/ч; $u_{21}(t)$ – температура в кубе БК, °С; $u_{22}(t)$ – температура в кубе ЭК, °С; $u_{23}(t)$ – температура в кубе РК, °С; $d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{15}, d_{21}, d_{31}, d_{32}, c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$ – весовые коэффициенты.

Параметры $x_{1d}, x_{2d}, x_{3d}, x_{4d}, x_{5d}, x_{6m}$ определяются из требований стандарта Республики Беларусь СТБ 1334-2003 [1], а $x_{7n}, x_{8n}, u_{11n}, u_{12n}, u_{13n}, u_{21n}, u_{22n}, u_{23n}$ – из требований технологического регламента брагоректификации.

Для нахождения $x_7(t), x_8(t), u_1(t), u_2(t)$ применяются технические средства автоматизации, существующие на конкретном предприятии.

Для определения $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$, $x_6(t)$ предложен способ определения количественного состава вещества (заявка на патент Республики Беларусь № а20080946 от 17.07.2008).

Изобретение относится к физико-химическим методам анализа и может быть использовано для высокоточного определения содержания каких-либо веществ в многокомпонентных образцах. В частности, оно может быть применено для измерения концентраций водно-спиртовых растворов, виноматериалов, водок и вин в ликероводочной промышленности.

Одним из современных способов количественного анализа является импульсный метод ядерного магнитного резонанса (ЯМР). В этом способе мерой количества вещества является амплитуда сигнала свободной индукции (ССИ), возбуждаемого коротким радиочастотным импульсом на частоте резонанса ядер исследуемого вещества, помещенного в постоянное магнитное поле. Предложенный метод определения количественного состава вещества может быть использован в тех случаях, когда в состав исследуемого образца, кроме анализируемого вещества, входят другие компоненты, содержащие резонансные ядра, что значительно расширяет диапазон исследуемых образцов. Также по данному способу нет необходимости расчета калибровочных коэффициентов, что повышает оперативность определения концентрации водно-спиртовых растворов.

Метод определения количественного состава вещества, включающий измерение начальных амплитуд сигналов свободной индукции исследуемого образца и эталона с известными физико-химическими свойствами, отличается от известных способов тем, что измеряют температуру исследуемого образца и эталона, определяют настроечные коэффициенты и содержание анализируемого вещества в исследуемом образце по формуле

$$c_1 = a_0 + a_1 T_1 + a_2 \frac{A p_3}{A_3},$$

где c_1 – концентрация анализируемого вещества; a_0 , a_1 , a_2 – настроечные коэффициенты; T_1 – температура исследуемого образца; A и A_3 – амплитуды сигналов свободной индукции от образца и эталона соответственно; p_3 – плотность эталона.

Качество управления БРУ с позиции управления качеством и экономии энергоресурсов тем лучше, чем меньше величина критерия $I(q, t)$.

Приведем составляющие, входящие в критерий ($I(q, t)$), в безразмерные величины, путем деления их на номинальные значения. Примем величину весовых коэффициентов равным:

$$d_{11} = d_{12} = d_{13} = d_{14} = d_{15} = d_{21} = 0,9;$$

$$d_{31} = d_{32} = 0,7;$$

$$c_{11} = c_{12} = c_{33} = c_{44} = c_{55} = c_{66} = 0,5.$$

До использования разработанных адаптивных систем автоматического управления в регулировании БРУ величина обобщенного критерия равна 3,69, а с применением разработанных адаптивных систем – 2,93.

Анализируя полученные значения величин обобщенного критерия качества управления БРУ ($I(q, t)$), можно утверждать, что использование разработанных адаптивных систем автоматического управления в регулировании БРУ позволяет улучшить качество управления на 26%.

Заключение. Предложен способ адаптации метода моделирования многокомпонентной ректификации «от тарелки к тарелке» для расчета разделения спиртовых многокомпонентных смесей.

Данный способ дает возможность редуцировать аналитические динамические модели, моделями апериодического звена второго порядка и звена запаздывания, что позволило определить передаточные функции для расчета показателей качества процесса ректификации.

Анализ полученных передаточных функций для различных веществ, входящих в состав ректификованного спирта, и различных режимов производительности БРУ показал, что наблюдаются существенно отличающиеся коэффициенты передачи. Это обуславливает применение цепи адаптации коэффициента усиления в системе автоматического управления.

Обобщенный критерий позволяет оценить качество управления всей БРУ с позиции управления качеством продукта и экономии энергоресурсов в производстве ректификованного спирта.

Установлено, что использование разработанных адаптивных систем автоматического управления по каналу «вход: расход пара – выход: концентрация этанола в полупродуктах (головном продукте)» позволяет улучшить качество регулирования брагоректификационной установкой в динамических режимах на 26%.

Литература

1. Спирт этиловый ректификованный из пищевого сырья. Технические условия: СТБ 1334-2003. – Введ. 01.01.04. – Минск: Госстандарт: Белорус. гос. ин-т стандартизации и сертификации, 2004. – 7 с.
2. Ульянов, Н. И. Исследование основных каналов управления процессом брагоректификации и разработка их динамических моделей / Н. И. Ульянов // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2007. – Вып. XV. – С. 118–121.

В. П. Кобринец, доцент; Д. С. Карпович, доцент;
В. Б. Михайлов, доцент

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ РЕЖИМОВ СУШКИ ТВЕРДЫХ ЖЕЛАТИНОВЫХ КАПСУЛ В УСЛОВИЯХ ОАО «МИНСКИНТЕРКАПС»

The analysis of process of drying of firm gelatinous capsules as object of the control temperature-humidity modes on all zones of drying is lead. The function chart of the control and registration of temperature and humidity on zones of drying, and also registration of change of parameters of air before and after conditioner K-1600 providing a fence and preparation of external air is developed. The basic periods of process of drying are revealed, for each of these periods the mathematical model of the given process on the basis of which are investigated static and dynamic characteristics is developed. It will allow to determine the valid distribution of fields of temperature and humidity in zones of drying and to develop recommendations on improvement of modes of drying of capsules at separate stages, that in a result will lead to decrease in quantity of defective products at manufacturing firm gelatinous capsules.

Введение. Автоматическая линия для получения твердых желатиновых капсул (ТЖК) № 0 и 1 состоит из двух параллельных линий рабочего оборудования, одна из которых изготавливает корпуса, вторая – крышки капсул. В процессе производства ТЖК последовательно осуществляются следующие операции: смазывание пинов (линеек форм для изготовления крышки или корпуса капсулы, собранных в массивы), макание их в ванночки с желатиновой массой, прохождение их через пять зон сушки, снятие корпусов и крышек с пинов, стыковка и выгрузка капсул.

В работе данной линии наиболее важным является процесс сушки ТЖК, проводимый в нескольких зонах, от которого зависит качество получаемой продукции.

Тепловым агентом сушки выступает очищенный и осушенный воздух от кондиционера АНУ-7 без подогрева, поступающий в 0 и IV зоны сушки, и с подогревом до заданных температур с помощью системы электроподогрева – в III зону сушки, а также от кондиционера К-1600, осуществляющего забор наружного воздуха, с электроподогревом до заданных температур – в I и II зоны сушки (рис. 1).

Тепловые режимы по температуре различных зон сушки приведены в таблице.

При изменениях температурно-влажностных параметров заборного воздуха, используемого в процессе сушки, а также некоторых неконтролируемых изменениях теплового режима процесса происходит изменение температурного режима в различных зонах линии, что приводит к ухудшению качества готовой продукции и появлению брака.

Это обстоятельство вызывает необходимость исследования температурно-влажностных режимов процесса сушки капсул на всех стадиях протекания, что позволит разработать количественные взаимосвязи между показателями процесса сушки в статическом и динамическом режимах.

Таблица

Распределение температур по зонам сушки

ТЖК № 0		ТЖК № 1	
0 и IV зоны	Крышки (18 ± 2,5)°C	0 и IV зоны	Крышки (18 ± 2,5)°C
	Корпуса (18 ± 2,5)°C		Корпуса (18 ± 2,5)°C
I зона	Крышки (27 ± 4,0)°C	I зона	Крышки (27 ± 4,0)°C
	Корпуса (28 ± 5,0)°C		Корпуса (28 ± 5,0)°C
II зона	Крышки (30 ± 5,0)°C	II зона	Крышки (28 ± 5,0)°C
	Корпуса (34 ± 6,0)°C		Корпуса (33 ± 5,0)°C
III зона	Крышки (30 ± 5,0)°C	III зона	Крышки (29 ± 5,0)°C
	Корпуса (36 ± 6,0)°C		Корпуса (34 ± 6,0)°C

Данные исследования необходимо проводить как в теоретическом, так и в практическом аспектах решения поставленной проблемы.

Экспериментальная часть исследования заключается в непрерывном измерении температуры и влажности сушильного агента во всех зонах сушки с применением необходимых средств автоматического контроля и регистрации (рис. 1).

Основная часть. При составлении материального и теплового балансов процесса сушки введем: G_1 и G_2 – количество влажного и высушенного материала соответственно, кг/ч; u_0 и u_k – начальная и конечная влажность материала соответственно, %; W – количество удаляемой при сушке влаги, кг/ч.

Тогда условие материального баланса для всего материала будет иметь вид

$$G_1 = G_2 + W, \quad (1)$$

а для абсолютно сухого вещества:

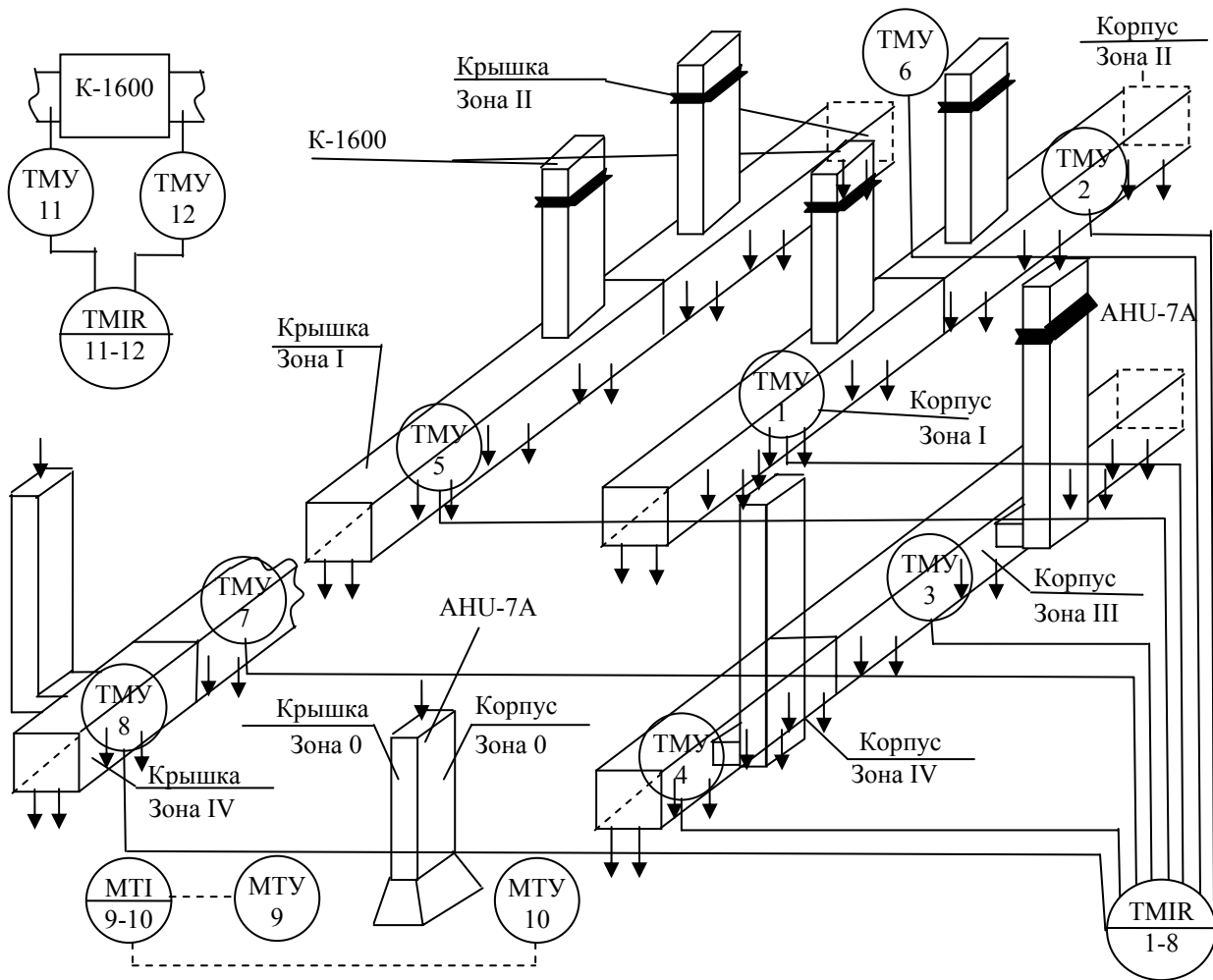


Рис. 1. Функциональная схема автоматического контроля технологических параметров

$$G_1 \frac{100 - u_0}{100} = G_2 \frac{100 - u_k}{100}. \quad (2)$$

Обычно целью составления материального баланса является определение количества влаги, удаляемой при сушке:

$$W = G_1 - G_2. \quad (3)$$

Используя соотношение (2), уравнение для расчета количества влаги (3) можно записать следующим образом:

$$W = G_2 \frac{u_0 - u_k}{100 - u_0}. \quad (4)$$

Если количество влаги W известно, то из уравнения (4) можно определить количество высушенного материала G_2 .

Остановимся на тепловом балансе сушки. Пусть на сушку поступает G_1 , кг/ч, исходного материала, имеющего температуру t_1 , °С. В процессе сушки из материала испаряется W , кг/ч, влаги и удаляется G_2 , кг/ч, высушенного материала при температуре t_2 , °С, с теплоемкостью c_m , Дж/(кг · град), причем теплоемкость влаги составляет c_b , Дж/(кг · град).

В зону сушки от кондиционера (рис. 1) подается влажный воздух, содержащий L , кг/ч, абсолютно сухого воздуха. Перед нагревательным элементом воздух имеет энтальпию I_0 , Дж/кг сухого воздуха. После нагрева, т. е. на входе в зону сушки, энтальпия воздуха повышается до I_1 , Дж/кг сухого воздуха. В процессе сушки в результате передачи теплоты материалу, поглощения испаряющейся из материала влаги и потерь теплоты в окружающую среду энтальпия воздуха изменяется и на выходе из сушилки энтальпия отработанного воздуха равна I_2 , Дж/кг сухого воздуха. Теплоту, подводимую в зону сушки, обозначим через Q_k . Тогда с учетом потерь теплоты сушилкой в окружающую среду Q_n имеем

$$LI_0 + G_2 c_m t_1 + W c_b t_1 + Q_k = LI_2 + G_2 c_m t_2 + Q_n. \quad (5)$$

Из этого уравнения можно определить общий расход теплоты на сушку:

$$Q_k = L(I_2 - I_0) + G_2 c_m (t_2 - t_1) - W c_b t_1 + Q_n. \quad (6)$$

Разделив обе части последнего уравнения на W , получим выражение для общего расхода тепла на 1 кг испаренной влаги:

$$q_k = l(I_2 - I_0) + q_m - c_b t_1 + q_n, \quad (7)$$

где

$$l = \frac{L}{W}, q_m = \frac{G_2 c_m (t_2 - t_1)}{W}, q_n = \frac{Q_n}{W}.$$

После составления теплового баланса рассмотрим динамику процесса сушки. Кинетика процесса сушки химических продуктов характеризуется скоростью удаления влаги.

Обычно при оценке кинетических параметров используются кривые сушки, получаемые экспериментально и представляющие собой зависимость влагосодержания от времени.

Кривые сушки можно разделить на несколько периодов, каждый из которых характеризуется определенным механизмом массопередачи. Так, типичная кривая сушки, изображенная на рис. 2, может быть разбита на три участка: участок с постоянной скоростью сушки (I) и на два участка с уменьшающейся скоростью сушки (II и III), которым соответствуют различные механизмы удаления влаги.

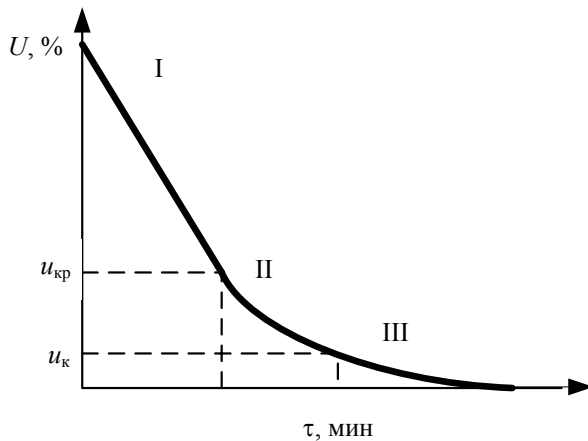


Рис. 2. Типичная кривая сушки

Период постоянной скорости сушки [1].

При рассмотрении этого периода обычно принимают, что на поверхности частицы достигается состояние фазового равновесия, т. е. частица окружена пленкой влаги и воздух над ней находится в состоянии насыщения и имеет температуру мокрого термометра. Тогда скорость процесса сушки определяется состоянием окружающей среды и условиями сушки, а полный поток влаги записывается через объемный коэффициент массоотдачи:

$$-\frac{d\mu}{dt} = j = \beta(x_r - x) = \beta(x^* - x), \quad (8)$$

где x_r — влагосодержание воздуха, кг/кг, на границе частицы, которое считается равновесным, т. е. $x_r = x^*$; x — влажность (воздуха) в объеме сплошной фазы. Обе величины находятся по психрометрическим данным.

Из экспериментально полученных значений потока влаги j , $\% \cdot \text{мин}^{-1}$, при различных температурах можно рассчитать величину β , используя соотношение

$$\beta = \frac{j}{x^* - x}. \quad (9)$$

Парциальные давления насыщенных паров P_t^* при разных температурах t находят из таблиц,

а мольные доли m — из следующих выражений:

$$m^* = \frac{P_t^*}{P}, m = \frac{P_t^* \phi}{P}, \quad (10)$$

где P — атмосферное давление, мм рт. ст.; ϕ — относительная влажность воздуха, определяемая по температуре сухого и мокрого термометров ($t_{\text{сух}}$, $t_{\text{мокр}}$).

Тогда влагосодержание x^* и x вычисляют по формулам

$$x^* = \frac{M_B}{M_{\text{возд}}} \frac{m^*}{1 - m^*}, \quad (11)$$

$$x = \frac{M_B}{M_{\text{возд}}} \frac{m}{1 - m}. \quad (12)$$

Обработкой эксперимента, выполненного при различных температурах, можно получить зависимость $\beta = f(t)$.

Критическое время, соответствующее завершению периода постоянной скорости сушки, составляет

$$\tau = \frac{u_0 - u_{\text{кр}}}{j}. \quad (13)$$

Период падающей скорости сушки [2].

Этому периоду отвечают в общем случае два механизма:

- диффузия влаги из пор к поверхности (участок II на рис. 2);

- удаление химически связанной (кристаллизационной) влаги (участок III на рис. 2).

Период падающей скорости сушки начинается при достижении критического влагосодержания $u_{\text{кр}}$, когда на поверхности материала образуются сухие островки. Если считать, что в этом периоде все сопротивление массопереносу сосредоточено внутри материала и подводимая к поверхности влага моментально отводится, то механизм массопереноса можно описать уравнением нестационарной диффузии в сферических координатах:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \tau} = D_{\text{эф}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right), \quad (14)$$

где ε — пористость частицы; u — значение влагосодержания в момент времени τ на расстоянии ρ от

центра частицы; $D_{эф}$ – обобщенный усредненный коэффициент диффузии. Принимается, что все поры в частице и влага в них распределены равномерно.

Начальное и граничные условия таковы:

$$u = u_{кр} \text{ при } \tau = \tau_{кр}, 0 < \rho < R, \quad (15)$$

$$u = u_r \text{ при } \tau > \tau_{кр}, \rho = R, \quad (16)$$

$$\frac{du}{d\rho} = 0 \text{ при } \tau > \tau_{кр}, \rho = 0. \quad (17)$$

Причем u_r характеризует влагосодержание на границе, равновесное с влагосодержанием окружающего воздуха.

Решение уравнения (14) с граничными условиями (16), (17) и начальным условием (15), полученное методом Фурье, имеет вид

$$\frac{u - u_{кр}}{u_r - u_{кр}} = 1 + \frac{2R}{\pi\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{\pi n \rho}{R} e^{-D(\tau - \tau_{кр})}, \quad (18)$$

где

$$D = \frac{D_{эф} \pi^2 n^2}{R^2 \varepsilon}. \quad (19)$$

Экспериментально получают изменение среднего влагосодержания \bar{u} во времени. Тогда исходя из определения среднего влагосодержания материала находят:

$$\bar{u} = \frac{G_{вл}}{G_{св}} = \frac{\int_0^R u_p \gamma_M 4\pi\rho^2 d\rho}{\int_0^R \gamma_M 4\pi\rho^2 d\rho} = \frac{3}{R^3} \int_0^R u_p \rho^2 d\rho. \quad (20)$$

Подстановка из (18) величины u в уравнение (20) дает зависимость среднего влагосодержания \bar{u} от времени τ в периоде удаления влаги из пор материала:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{3}{R^3} \int_0^R u_p \rho^2 d\rho = \frac{3}{R^3} \int_0^R u_r + (u_r - u_{кр}) \times \\ &\times \frac{2R}{\pi\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{\pi n \rho}{R} e^{-D(\tau - \tau_{кр})} \rho^2 d\rho = \\ &= u_r + (u_r - u_{кр}) \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-D(\tau - \tau_{кр})}. \quad (21) \end{aligned}$$

Среднее влагосодержание можно получить также интегрированием локального влагосодержания u по всему объему V :

$$\bar{u} = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} u dV. \quad (22)$$

Тогда после перехода к сферическим координатам подстановка u из уравнения (20) в выражение (22) дает

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u_r + (u_r - u_{кр}) \frac{3}{4\pi R^3} \frac{2R}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \times \\ &\times e^{-D(\tau - \tau_{кр})} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R \frac{1}{\rho} \sin \frac{\pi n \rho}{R} \rho^2 d\rho, \quad (23) \end{aligned}$$

откуда в результате интегрирования получаем

$$\bar{u} = u_r + \frac{6}{\pi^2} (u_r - u_{кр}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-D(\tau - \tau_{кр})}. \quad (24)$$

Решения (21) и (24) совпадают и представляют собой знакопеременный быстроходящийся ряд, в котором первый член намного больше остальных. Поэтому в качестве первого приближения модели кинетики сушки в рассматриваемом периоде можно использовать только первый член ряда в уравнении (24). В этом случае получаем

$$\bar{u} = u_r - (u_r - u_{кр}) \frac{6}{\pi^2} e^{-D(\tau - \tau_{кр})}. \quad (25)$$

Из последнего выражения можно найти формулу для коэффициента диффузии:

$$D = \frac{\ln \left[\frac{\pi^2 (\bar{u} - u_r)}{6 (u_{кр} - u_r)} \right]}{\tau_{кр} - \tau}. \quad (26)$$

Заключение. Сушка ТЖК – сложный массообменный многозональный процесс, исследование которого необходимо для определения действительных полей температуры и влажности сушильного агента во всех зонах. Проведен анализ статических и динамических режимов процесса сушки, что позволило установить основные статические закономерности и кинетические характеристики данного процесса.

Литература

1. Кафаров, В. В. Математическое моделирование основных процессов химических производств / В. В. Кафаров, М. Б. Глебов. – М.: Высшая школа, 1991. – 400 с.
2. Лыков, А. В. Теория сушки / А. В. Лыков. – М.: Энергия, 1968. – 472 с.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА РЕЗИНОСМЕШЕНИЯ

In the article discuss nonlinear dynamic model of a rubber mixer process. Several articles describe different mathematical model of the process have been analyzed. Compound moving in a gap between rotor and wall is viewed. Resistant moment which is created by deformation in the gap is analyzed. Total resistant moment model of a rubber mixer are assessed. One-dimensional mathematical model of the process is offered. This model links averaged resistant moment with the speed of rotation of rotors. Dynamic models of important process parameters described. These parameters are homogeneity of compound and degree of dispersion of additives. Temperatures of a rubber mixture, rotors, wall and cooling water are analyzed thought heat balance equations. Rubber mixer process is offered to divide into several different stages, thus the model has variable structure. To use different equation and parameter values for every stage of mixing is offered.

Введение. Анализ процесса резиносмешения как объекта управления показывает необходимость разработки комплексной математической модели [1]. Данная модель должна отражать взаимосвязь между основными параметрами процесса во время смешения. К ним следует отнести скорость вращения ротора, момент сопротивления на валу, температуру смеси, ее вязкость, степень диспергирования компонент. Важной особенностью этой модели должно быть описание процесса смешения с точки зрения его нестационарности.

Для системы электропривода резиносмеситель выступает источником момента сопротивления на валу двигателя. Зависимость данного момента от скорости вращения ротора, а также от других параметров процесса является основной зависимостью рассматриваемой математической модели.

Анализ поведения материала в камере смесителя. Существующие модели, которые описывают процессы, происходящие в резиносмесителе, отражены в [2–4]. В этих работах решается локальная задача: поведение резиновой смеси в серповидном зазоре между ротором и стенкой камеры как области наиболее интенсивного воздействия на материал. В работах [2, 3] рассматривается обратная задача: ротор считается неподвижным, а стенка камеры движется навстречу ротору. Причем для упрощения моделирования серповидный зазор разворачивают, при этом используют прямоугольную систему координат. Решение прямой задачи без развертки серповидного зазора и при условии вращения ротора, а не стенки камеры проводится в цилиндрической системе координат. Такой подход предложен в [4]. Преимуществом данной работы является также обширный анализ подобных моделей. В статье учтена неизотермичность процесса смешения.

Рассмотрим движение материала в серповидном зазоре между стенкой камеры и ротором. Для описания выберем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) . Движение материала можно описать следующими уравнениями [4]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\varphi}) = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (2)$$

где $\tau_{r\varphi}$, τ_{rz} – компоненты напряжений сдвига; p – давление в материале.

При написании данных уравнений был сделан ряд стандартных допущений [4].

Для описания зависимости напряжения от скорости деформации воспользуемся равенствами

$$\tau_{r\varphi} = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right), \quad (3)$$

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad (4)$$

где μ – эффективная вязкость; v_φ , v_r – компоненты скорости.

Резиновая смесь является аномально вязкой жидкостью. Ее вязкость подчиняется степенному закону:

$$\mu = K(T, G) \left\{ \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right]^2 + \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} \right]^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}}, \quad (5)$$

где $K(T, G)$ – консистентность смеси; T – температура смеси; G – степень диспергирования углерода; n – индекс течения материала.

Консистентность смеси является функцией температуры и степени диспергирования наполнителя – технического углерода. Уравнение, описывающее данную зависимость, является эмпирическим и имеет следующий вид:

$$K(T, G) = K_0 e^{[b_1(T_0 - T)]} \left(1 + b_2(100 - G)^{b_3} \right), \quad (6)$$

где K_0 – значение консистентности при температуре T_0 и степени диспергирования 100%; b_1, b_2, b_3 – эмпирические константы.

Предположим, что степень диспергирования однозначно определяется удельными затратами

энергии. Тогда уравнение кинетики диспергирования примем в следующем виде:

$$\frac{100 - G}{100 - G_0} = \exp \left[-\frac{g}{\rho} \int_0^t \tau \dot{\gamma} dt \right], \quad (7)$$

где g – эмпирическая константа; ρ – плотность смеси; τ – напряжение сдвига; $\dot{\gamma}$ – скорость деформации.

Систему можно дополнить уравнением неразрывности:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (8)$$

В уравнении энергии можно пренебречь переносом тепла теплопроводностью вдоль потока. Уравнение энергии для нестационарного температурного поля можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{K}{\rho c} \left\{ \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right]^2 + \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} \right]^2 \right\}^{\frac{n+1}{2}}, \quad (9)$$

где T – температура смеси; a – коэффициент температуропроводности; c – удельная теплоемкость смеси.

Систему уравнений следует дополнить граничными и начальными условиями [4].

Приведенная выше система уравнений представляет собой математическую модель неизотермического диспергирующего течения anomalно вязкой жидкости в серповидном пространстве резиносмесителя. Точное решение системы (1)–(9) получить невозможно, поэтому используются приближенные численные способы, основанные на методе конечных разностей. Результаты решения системы приведены в [4].

Оценка момента, вызванного деформированием смеси в зазоре. Изучаемая модель описывает процессы, происходящие только в зазоре между ротором и стенкой камеры, в то время как нас интересует суммарный момент, создаваемый на валу. Первоначально можно определить силу, с которой смесь давит на лопасть ротора. Для чего рассмотрим элементарную силу (силу, действующую на элементарную площадь поверхности ротора). Эта сила равна произведению давления в рассматриваемой точке на элементарную площадь:

$$dF = p(\varphi, z) dA. \quad (10)$$

Указанная сила складывается из двух проекций. Проекция силы на ось z не создает противодействующего вращению момента, следовательно, ее влиянием можно пренебречь. Проекция силы на ось r :

$$dF_\varphi = p(\varphi, z) r dr dz. \quad (11)$$

Проекция силы на ось r :

$$dF_r = p(\varphi, z) r d\varphi dz. \quad (12)$$

Проинтегрируем каждое выражение по поверхности ротора, которая находится под действием сил:

$$F_\varphi = \int_0^{L r_2} \int_0^{\varphi_k} p(\varphi, z) r dr dz, \quad (13)$$

$$F_r = \int_0^L \int_0^{\varphi_k} p(\varphi, z) r d\varphi dz, \quad (14)$$

где L , r_1 , r_2 , φ_k – пределы интегрирования, задаваемые поверхностью ротора.

Распределение давления является достаточно сложным и может быть найдено решением системы (1)–(9) численным методом [4]. Суммарная сила давления на поверхность лопасти ротора может быть получена из выражения

$$F = \sqrt{F_\varphi^2 + F_r^2}. \quad (15)$$

Момент вращения, который создает сила, равен произведению силы на плечо. Величину плеча можно найти численными методами и представить как некоторый условный радиус R^* , тогда момент будет равен:

$$M = FR^*. \quad (16)$$

Предложенный способ позволяет оценить величину момента, который возникает на валу в результате деформирования материала в зазоре между одной лопастью ротора и стенкой камеры. Полученные результаты можно применить для оценочных расчетов момента сопротивления. Однако данная модель не позволяет описать момент сопротивления в динамике изменения скорости вращения ротора. Кроме того, рассматриваемый момент учитывает только величину смесительного воздействия, обусловленного деформацией в зазоре между одной лопастью ротора и стенкой камеры. Момент, вызванный деформированием в остальном объеме камеры с учетом воздействия двух роторов, оставлен без внимания.

Анализ суммарного момента сопротивления. Резиновая смесь в камере роторного смесителя в основном подвержена деформации сдвига. Напряжение, возникающее при деформации сдвига, может быть выражено через уравнения (3), (4) т. е. пропорционально скорости деформации. В то же время эффективная вязкость μ для anomalно вязких жидкостей является функцией скорости и подчиняется степенному закону (5). Используя уравнения (13)–(16), можно оценить момент, вызванный

деформированием в зазоре между ротором и стенкой камеры, однако подобным образом учесть напряжения, возникающие в остальном объеме смесителя, не представляется возможным.

Для получения зависимости момента сопротивления от частоты вращения будем рассматривать сложное деформирование в смесителе как одномерную деформацию сдвига на поверхности ротора. Скорость деформации есть произведение угловой скорости на усредненный радиус ротора:

$$v = \omega r. \quad (17)$$

Напряжение сдвига на поверхности ротора можно выразить следующим образом:

$$\tau = \mu \frac{v}{h} = \mu \frac{\omega r}{h}, \quad (18)$$

где h – усредненное расстояние между поверхностью ротора и поверхностью с нулевой скоростью сдвига (в частном случае – стенкой камеры).

Сила, которую вызывает данное напряжение на поверхности ротора, есть произведение напряжения на некоторую площадь (поверхность ротора, участвующую в деформации):

$$F = \tau S. \quad (19)$$

Момент силы можно выразить:

$$M = Fr = \tau Sr. \quad (20)$$

Подставив (18) в (20), получим окончательную зависимость:

$$M = \mu \omega \frac{Sr^2}{h}. \quad (21)$$

Очевидно, что величины S , r , h являются условными. Нет необходимости устанавливать их значения, что аналитически не представляется возможным. Введем следующие замены:

$$\varepsilon = \frac{r}{h}, \quad (22)$$

$$V_S = Sr, \quad (23)$$

где ε – безразмерный коэффициент; V_S – некоторый условный объем.

Полученная зависимость позволяет оценить взаимосвязь между моментом и угловой скоростью через эффективную вязкость, которая в свою очередь подчиняется степенному закону:

$$\mu = K(T, G)(\omega \varepsilon)^{n-1}. \quad (24)$$

Тогда момент сопротивления можно выразить, подставив (24) в (21). С учетом замен (22) и (23) получим:

$$M = K^*(T, G)\omega^n. \quad (25)$$

Изменение консистенции смеси в зависимости от температуры и степени диспергирования описывается уравнением (6). С учетом принятых замен оно преобразуется к виду

$$K^*(T, G) = K_0^* e^{[b_1(T_0 - T)]} (1 + b_2(100 - G)^{b_3}), \quad (26)$$

$$K_0^* = K_0 \varepsilon^n V_S, \quad (27)$$

где K^* – скорректированная консистенция; K_0^* – скорректированное значение K_0 .

Степень диспергирования определяется удельными энергозатратами в соответствии с уравнением (7). Аналогичную зависимость используем для всего процесса. Механическая мощность может быть выражена как произведение момента на угловую скорость, тогда уравнение (7) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{100 - G}{100 - G_0} = \exp \left[-\frac{g_M}{m} \int_0^t M \omega dt \right], \quad (28)$$

где g_M – эмпирическая константа; m – масса смеси.

Моделирование температуры смеси. Для моделирования температуры смеси воспользуемся допущением об однородности температуры по всему объему смеси. С учетом этого составим уравнения теплового баланса без учета пространственной координаты. Нагревание смеси происходит за счет энергии, затрачиваемой на смешение. Уравнение теплового баланса для смеси:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{M\omega}{cm} - \frac{\alpha_1 s_1}{cm} (T - T_p) - \frac{\alpha_2 s_2}{cm} (T - T_k), \quad (29)$$

где T – температура смеси; α_1 – коэффициент теплоотдачи между смесью и ротором; s_1 – площадь поверхности ротора; T_p – температура ротора; α_2 – коэффициент теплоотдачи между смесью и камерой; s_2 – площадь поверхности камеры, находящаяся в контакте со смесью; T_k – температура камеры.

Для ротора уравнение теплового баланса учитывает его нагревание от смеси:

$$\frac{\partial T_p}{\partial t} = \frac{\alpha_1 s_1}{c_p m_p} (T - T_p), \quad (30)$$

где c_p – удельная теплоемкость материала ротора; m_p – масса ротора.

Камера смесителя с одной стороны нагревается смесью, с другой – охлаждается водой:

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = \frac{\alpha_2 s_2}{c_k m_k} (T - T_k) - \frac{\alpha_3 s_3}{c_k m_k} (T_k - T_B), \quad (31)$$

где c_K – удельная теплоемкость материала камеры; m_K – масса камеры; T_B – средняя температура охлаждающей воды; α_3 – коэффициент теплоотдачи между камерой и охлаждающей водой; s_3 – площадь поверхности камеры, находящаяся в контакте с водой.

Последнее слагаемое в уравнении (31) учитывает тепловой поток, отводимый водой. Этот поток может быть выражен через расход воды:

$$\alpha_3 s_3 (T_K - T_B) = c_B G_B (T_{B_2} - T_{B_1}), \quad (32)$$

где c_B – удельная теплоемкость воды; G_B – массовый расход воды; T_{B_1} , T_{B_2} – температуры охлаждающей воды соответственно во входном и выходном трубопроводе.

Моделирование стадий смешения. При анализе процесса резиносмешения был сделан вывод о необходимости применения модели с переменной структурой [1]. Это связано с последовательным добавлением в смесь различных компонент (особенно технического углерода). Выделим условно 4 стадии, которые могут существенно отличаться друг от друга в процессе моделирования.

1. Пластификация каучука. В смешении участвует каучук (каучуки). В математической модели отсутствует уравнение изменения степени диспергирования (28). Температура растет незначительно.

2. Диспергирование технического углерода. Процесс сопровождается сильным потреблением энергии. Затраты энергии вызывают рост температуры смеси.

3. Смешение с участием мягчителей и других добавок. Различные добавки подают в камеру смесителя в процессе диспергирования углерода. Введение добавок можно учесть, незначительно изменив константы.

4. Пластификация резиновой смеси. Данная стадия приходится на конец процесса смешения, при этом степень диспергирования достигает предельного значения и практически не изменяется. Вязкость смеси снижается.

Заключение. В результате анализа существующих моделей процесса резиносмешения пришли к выводу, что они описывают процессы, происходящие в камере смесителя, в небольшом пространстве. Данные модели характеризуются сложными системами уравнений, которые не предусматривают возможности их применения для динамического моделирования. На основании этих моделей был разработан метод расчета момента сопротивления, вызываемого деформацией сдвига в зазоре между ротором и стенкой камеры (16).

Учитывая невозможность использования данных моделей для динамического моделирования момента сопротивления, была предложена одномерная модель процесса резиносмешения. Данная модель выражает зависимость между усредненным моментом сопротивления на валу и частотой вращения ротора (25). Уравнение было дополнено рядом зависимостей (26)–(28) для моделирования консистентности и степени диспергирования.

Процесс резиносмешения сопровождается сильным тепловыделением. Для моделирования изменения температуры воспользовались уравнениями энергетического баланса (29)–(32).

Литература

1. Байда, Ю. А. Анализ резиносмесителя как объекта управления / Ю. А. Байда // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2008. – Вып. XVI. – С. 95–98.
2. Моделирование неизотермического течения резиновой смеси в камере роторного смесителя / А. В. Баранов [и др.] // Каучук и резина. – 1993. – № 2. – С. 38–40.
3. Неизотермическое диспергирующее течение резиновой смеси в камере смесителя / А. В. Баранов [и др.] // Каучук и резина. – 1994. – № 4. – С. 33–36.
4. Баранов, А. В. Моделирование теплообмена и диспергирующего течения резиновой смеси в камере роторного смесителя / А. В. Баранов, А. И. Балинов // Каучук и резина. – 1998. – № 4. – С. 38–45.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССА ПОЛИКОНДЕНСАЦИИ

This work represents in detail the influence of the basic technological parameters on the process of polycondensation, and also shows the selected control channels, in accordance with which the present studies are conducted. The procedure of the experiment on receiving the dynamic behaviors, according to the selected control channels, is developed. The reaction of the system to the supply of the disturbing effect according to all control channels is determined. The method, based on the use of Volterra series, has been selected for the identification of the dynamic characteristics of process. This method determines nonlinear objects with the help of the linear characteristics, preserving in this case all inherent properties of linear objects. The structure chart of the control object, which includes basic control channels on the temperature and the pressure in the reactors of preliminary and basic polycondensation, has been determined according to the obtained structure of the Volterra series.

Введение. Процесс поликонденсации является завершающей стадией в производстве полимера полиэтилентерефталата, используемого в дальнейшем для промышленных и бытовых нужд. Именно на данной стадии расплав полимера приобретает необходимую молекулярную массу. После поликонденсации полимер пропускают через фильеры, охлаждают и режут на так называемую полимерную крошку.

Основной величиной, «отвечающей» за качество полимера, является его вязкость. Преимущественно на изменение вязкости оказывает воздействие изменение давления и температуры внутри реактора.

Целью данного исследования является получение математической модели, с помощью которой можно определить в аналитической форме влияние основных параметров на вязкость расплава полимера. Для достижения данной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) выделить основные каналы управления реакторами поликонденсации;
- 2) разработать методику по снятию динамических характеристик, согласно каналам управления;
- 3) провести эксперимент и обработать полученные данные;
- 4) выбрать наиболее приемлемый для данного процесса метод идентификации динамических характеристик;
- 5) определить структуру объекта управления и сделать заключение о соответствии построенной модели объекта реальному процессу.

В ходе решения поставленных задач возникает сложность не только в проведении эксперимента, а именно во внесении возмущающих воздействий на реально действующих установках, но и в выборе наиболее соответствующего способа идентификации динамических характеристик.

Основная часть. Из полученных ранее и опубликованных в литературе данных известны основные параметры, влияющие на вязкость полимера. В соответствии с этими данными и выделяют каналы управления объектом. Про-

ведение эксперимента заключается в нанесении искусственного возмущения входной координате $x(t)$ и в регистрации изменений выходного параметра $y(t)$.

Экспериментальный метод определения динамических характеристик основан на трех основных предположениях:

- исследуемый объект есть система с сосредоточенными параметрами;
- при незначительных возмущающих воздействиях $x(t)$ изменения выходной координаты удовлетворяют принципу суперпозиции;
- динамические свойства изучаемого объекта неизменны во времени.

Справедливость второго и третьего предположений может быть проверена при экспериментальном исследовании динамики объекта. Все реальные химико-технологические аппараты и установки являются системами с распределенными в пространстве параметрами, поэтому первое предположение есть идеализация свойств объекта (упрощение поставленной задачи).

Влияние распределенности параметров будем учитывать введением элемента задержки при аппроксимации переходного процесса $y(t)$. В случае процесса поликонденсации выделим следующие каналы управления в предварительном реакторе, учитывая, что главной выходной величиной (определяющей качество полимера) является вязкость расплавленного полиэтилентерефталата:

- 1) регулирование давления в реакторе предварительной поликонденсации. Процесс изменения величины давления внутри реактора осуществляется увеличением/уменьшением расхода азота. Схема процесса представлена на рис. 1.

При увеличении расхода азота растет количество отгоняемого этиленгликоля в реакторе, тем самым давление в реакторе повышается по абсолютной величине (сравливание вакуума).

Сокращение расхода азота приводит к уменьшению абсолютной величины давления в реакторе (заглубление вакуума). В первом случае вязкость расплава снижается, во втором – увеличивается.

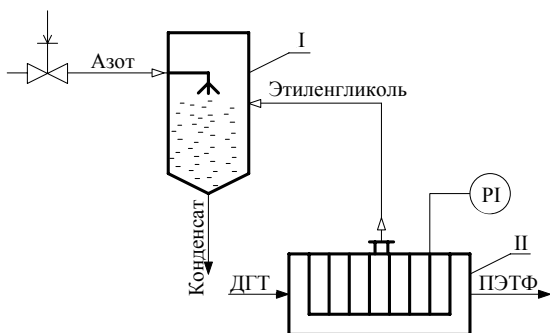


Рис. 1. Схема регулирования давления в реакторе предварительной поликонденсации: I – скруббер; II – реактор предварительной поликонденсации

При значительном увеличении/уменьшении давления в реакторе предварительной поликонденсации наблюдается изменение давления в основном реакторе;

2) регулирование температуры в реакторе предварительной поликонденсации. Данный процесс осуществляется путем изменения расхода греющего пара, который поступает в нагревательный аппарат емкости нагрева динила (рис. 2).

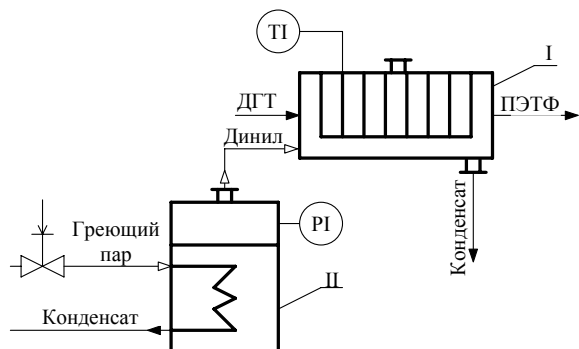


Рис. 2. Схема регулирования температуры в реакторе предварительной поликонденсации: I – реактор предварительной поликонденсации; II – емкость нагрева динила

При увеличении расхода греющего пара температура динила внутри емкости повышается, в результате чего происходит интенсивное испарение динила, и как следствие, увеличение давления паров динила в емкости нагрева. Изменение давления парообразного динила, обогревающего рубашку реактора предварительной поликонденсации, приводит к изменению температуры расплава, находящегося внутри реактора. Вязкость расплава в этом случае повышается.

Необходимо отметить, что при изменении вышеуказанного параметра в реакторе предварительной поликонденсации происходит и режимное изменение в реакторе основной поликонденсации.

После того, как определены основные каналы управления объектом, приступаем к проведению эксперимента.

Перед началом опыта на объекте устанавливается рабочий режим, стабилизируются основные источники возмущений и проверяется правильность включения регистрирующей аппаратуры.

При снятии переходных функций $y(t)$ испытательный сигнал $x(t) = A$ наносят вручную или с помощью исполнительного механизма резким изменением положения регулирующего органа.

Возмущение наносится в момент времени, принятый за нулевой, когда

$$y(0) = \text{const}, \dot{y}(0) = 0, \ddot{y}(0) \approx 0.$$

Регистрация изменений координаты $y(t)$ прекращается после того, как, начиная с некоторого момента времени $t = T_y$, установятся значения $y(t) = \text{const}$.

На рис. 3 показан график изменения вязкости в реакторе предварительной поликонденсации при изменении давления внутри реактора.

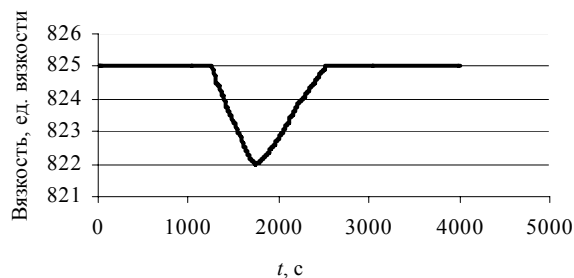


Рис. 3. График изменения вязкости в реакторе предварительной поликонденсации по каналу «давление – вязкость»

На рис. 4 представлен график изменения вязкости в реакторе предварительной поликонденсации по каналу «температура – вязкость».

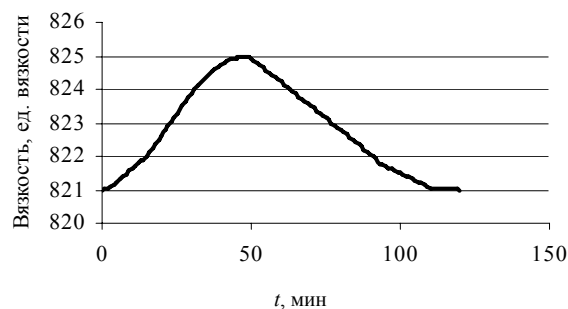


Рис. 4. График изменения вязкости в реакторе предварительной поликонденсации по каналу «температура – вязкость»

Запаздывание в изменении вязкости незначительное по сравнению с каналом «давление – вязкость», так как скорость изменения вязкости происходит соизмеримо со скоростью изменения температуры.

На этапе снятия динамических характеристик частично проверяются предположения о линейности и стационарности динамических свойств объекта. Для этого по всем экспериментальным кривым $y(t)$ вычисляются коэффициенты усиления $k = y(T_y) / A$ и сравниваются между собой для случая, когда не производилась линеаризация статической характеристики. Помимо этого, сравниваются соответствующие ординаты (точнее, их абсолютные значения) переходных функций, полученных при воздействиях $+A$ и $-A$, а также проверяется выполнение принципа суперпозиции для кривых $y(t)$, снятых при сигналах $\pm A$.

При существенном различии коэффициента усиления (абсолютных величин ординат $y(t)$ или при значительном нарушении принципа суперпозиции) требуется уменьшить амплитуду испытательного воздействия и провести опыт повторно [1].

Обработка экспериментальных кривых $y_\beta(t)$ ($\beta = 1, 2, \dots, z$), снятых при различных испытательных сигналах A_β , начинается с их усреднения:

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{z} \sum_{\beta=1}^z \frac{y_\beta(t)}{A_\beta}. \quad (1)$$

Далее из функции $\bar{y}(t)$, полученной по формуле (1), выделяется время «чистого» запаздывания, определяемое как отрезок времени, во всех точках которого выполняется неравенство $0 \leq y(t) \leq \Delta$, где Δ – погрешность измерения координаты $y(t)$.

В ходе проведения эксперимента было выяснено, что модель объекта управления (реактора поликонденсации) является нелинейной.

В результате проведения эксперимента были получены данные о возмущающем (входном) воздействии и реакции системы на это воздействие (выходной величине). Таким образом, имея только вышеуказанную информацию, необходимо построить такую модель, чтобы определяющая ее функция была хорошей аналитической аппроксимацией выходной величины.

Оптимальным представляется описание нелинейного объекта с помощью линейных по параметрам моделей, так как линейным объектам присущи следующие свойства:

- возможность явно записать связь между входом и выходом;
- простота описания соединений системы;
- возможность рассмотрения случайных сигналов.

Вышеизложенные свойства необходимо сохранить и для нелинейных объектов [2]. Для этого воспользуемся разложением Вольтерра.

Используя ряды Вольтерра, ядра которых представляют собой весовые функции высших порядков, можно получить описание нелиней-

ного объекта, допускающее ясную физическую интерпретацию. Этот метод имеет большое достоинство, связанное с тем, что нелинейная система рассматривается как непосредственное обобщение линейного случая, хотя сам объект может существенно отличаться от линейного. Иначе говоря, метод с использованием рядов Вольтерра интерпретирует линейные объекты как подкласс нелинейных объектов [3].

Суть метода заключается в том, что при имеющихся входных $x(t)$ и выходных данных $y(t)$ необходимо подобрать, используя разложение Вольтерра, такую зависимость $\bar{y}(t)$, которая являлась бы хорошей аппроксимацией $y(t)$.

В первом приближении ограничимся $y_{\text{лин}}(t)$:

$$y_{\text{лин}}(t) = h_1 x_1 \Delta t + h_2 x_2 \Delta t + \dots = \sum_{i=1}^N h_i x_i \Delta t, \quad (2)$$

где h_i – амплитуда; x_i – входная величина; Δt – ширина импульса.

При условии

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^N h_i x_i \Delta t = \int_0^t h_1(\tau) x(t - \tau) d\tau, \quad (3)$$

где τ – сдвиг по времени, имеем следующее выражение:

$$y_{\text{лин}}(t) = \int_0^t h_1(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (4)$$

При подаче на объект двух импульсов входных сигналов x_i и x_j вид линейного члена разложения (в пределе $\Delta t \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$) будет следующим:

$$y_{\text{квадр}}(t) = \int_0^t \int_0^t h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (5)$$

Таким образом, получим, что

$$\bar{y}(t) = y_{\text{лин}}(t) + y_{\text{квадр}}(t). \quad (6)$$

В формулу (6) выражения для слагаемых подставляются из уравнений (4) и (5) соответственно.

Следовательно, разложение в ряд Вольтерра является непосредственным обобщением модели линейного объекта в форме интеграла свертки. Весовая функция $h(\tau)$ линейной системы заменяется весовыми функциями (ядрами) [4].

Таким образом, главной задачей является определение аналитического вида ядер $h_1(\tau)$ и $h_2(\tau_1, \tau_2)$, а также параметризация $\bar{y}(t)$ относительно $y(t)$.

В качестве ядер интегралов будем использовать весовые функции основных динамических

звеньев: интегрирующего, дифференцирующего, апериодического звена второго порядка, усиленного, интегрирующего.

Оценку точности выбранного для аппроксимации выражения будем проводить исходя из условия

$$\overline{(y(t) - y(t))^2} \rightarrow \min. \quad (7)$$

Другими словами, квадрат разности между экспериментально полученными значениями точек и значениями, полученными аналитическим путем, должен стремиться к минимуму (обозначим данное выражение через φ).

Наиболее точная аппроксимация ($\varphi = 0,93$) осуществляется, когда в качестве ядра интеграла Вольтерра принято апериодическое звено второго порядка. Исследуем также и произведение интегралов Вольтерра первого рода и при этом учтем, что данное произведение является интегралом Вольтерра второго рода [1].

На рис. 5 представлена аппроксимация выходной величины рядом Вольтерра второго порядка, в качестве ядра которого принято произведение апериодического звена первого порядка и апериодического звена второго порядка.

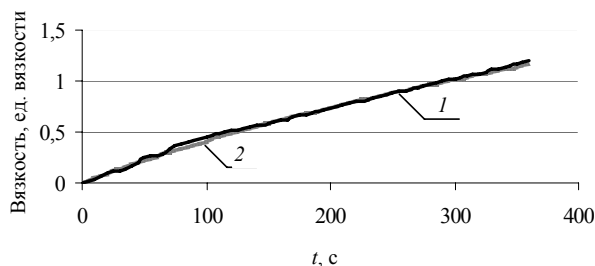


Рис. 5. Аппроксимация выходных данных рядом Вольтерра второго порядка по каналу «давление – вязкость»:
1 – зависимость, полученная опытным путем;
2 – зависимость, полученная аналитически

Точность аппроксимации $\varphi = 0,033$.

Распределенность параметров будем компенсировать введением звена чистого запаздывания. Таким образом, функция, которой осуществляется аппроксимация выходных данных, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \overline{y_1(t)} = & \int_0^t \delta(t-22)x_1(\tau)d\tau + 0,98 \int_0^t \int_0^t e^{-33t} \times \\ & \times (1,94e^{-0,0022t} - 2,8e^{-0,0035t})x_1(t-\tau_1) \times \\ & \times x_1(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогичным образом проводится аппроксимация данных и по каналу «температура –

вязкость» (рис. 6). Ядром ряда Вольтерра является произведение апериодического звена второго порядка на интегрирующее звено. Данный вид ядра выбран потому, что установленная точность аппроксимации $\varphi = 1,144$ при его использовании является наиболее высокой.

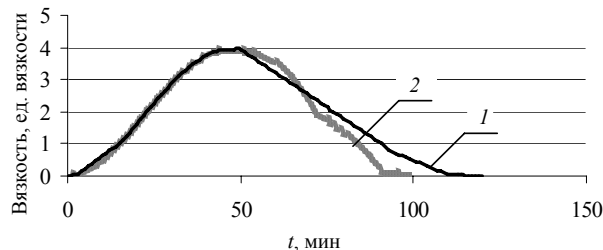


Рис. 6. Аппроксимация выходных данных рядом Вольтерра второго порядка по каналу «температура – вязкость»:
1 – зависимость, полученная опытным путем;
2 – зависимость, полученная аналитически

Вид ряда Вольтерра следующий:

$$\begin{aligned} \overline{y_2(t)} = & \int_0^t \delta(t-14)x_2(\tau)d\tau + 1,104 \times \\ & \times \int_0^t \int_0^t (e^{-0,002t} - e^{-0,003t})x_2(t-\tau_3) \times \\ & \times x_2(t-\tau_4)d\tau_3d\tau_4. \end{aligned} \quad (9)$$

Заключение. Таким образом, при использовании вышеуказанной методики были определены с высокой точностью аналитические зависимости (8) и (9). Данные зависимости являются математической интерпретацией динамических характеристик процесса поликонденсации по каналам управления «давление – вязкость» и «температура – вязкость».

Литература

1. Построение математических моделей химико-технологических объектов / Е. Г. Дудников [и др.]. – СПб.: Химия, 1970. – 312 с.
2. Эйкхофф, П. Основы идентификации систем управления / П. Эйкхофф. – М.: Мир, 1975. – 684 с.
3. Zadeh, L. A. Output properties of Volterra systems (nonlinear systems with memory) / L. A. Zadeh // Time-Varying Networks. – 1961. – № 4. – P. 1488–1503.
4. Bedrosian, E. Output properties of Volterra systems (nonlinear systems with memory) driven by harmonic and Gaussian inputs / E. Bedrosian, S. O. Rice // Time-Varying Networks. – 1971. – № 2. – P. 1688–1707.

АНАЛИЗ КОТЕЛЬНОЙ НА ДРЕВЕСНЫХ ОТХОДАХ КАК ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ С РАЗМЫТЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

In article the boiler-house on a wood waste from the point of view of automatic control is considered. The basic information variables of object are defined: temperature and structure of top internal gases, temperature warmed up in boiler waters. Influence on them of time-personal of revolting influences is considered, among them: humidity and air temperature, humidity and the size of particles of fuel, and also temperature and the expense of return water. It is noticed that the water-heating boiler-house on a wood waste is object of management with dim parametres. The analysis and criticism of existing systems automatic control is carried out by the considered object. On the basis of the analysis it is decided that the control system of boiler-house on a wood waste requires improvement.

Введение. В настоящее время важной задачей промышленности является повышение энергоэффективности и экологической чистоты производств. Одним из путей ее решения считается применение альтернативных источников энергии. Для деревообрабатывающих предприятий таким источником являются древесные отходы, сжигаемые в водогрейных котельных установках. Получаемая таким образом тепловая энергия может быть использована в технологических целях.

Несомненно, важной задачей ставится повышение эффективности работы таких установок, заключающейся в стабилизации их работы, интенсификации процессов горения и теплопередачи и наиболее полном задействовании полученной энергии. Один из путей решения этих задач – улучшение качества работы систем автоматического управления котлами.

Основная часть. Чтобы гарантировать оптимальный процесс горения древесных отходов с минимальными выбросами от неполного сгорания топлива, необходимо обеспечить поддержание высокой температуры процесса, достаточно длительное время пребывания топлива в топке и оптимальное смешение топочных газов с воздухом, а также соответствующее регулирование этих параметров при изменении тепловой мощности. Эти показатели частично определяются технологией сжигания топлива и конструкцией топки, а также условиями процесса горения. Для оптимизации процесса горения существует ряд систем управления процессом сжигания топлива.

Автоматизированная система управления котлом предназначена для управления отдельными параметрами объекта в соответствии с заданным режимом. Основным назначением контроллера в системе установки, работающей на древесном топливе, является регулирование выработки тепла в зависимости от его потребления. Также система управления может программироваться для выполнения одновременной оптимизации параметров процесса горения с целью минимизации выбросов и максимизации теплового КПД.

При сжигании биомассы типичными характеристиками технологического процесса, которые могут применяться в качестве параметров технологического контроля, являются концентрации CO , C_xH_y и O_2 в топочном газе, температура в топочной камере и температура котла.

Регулирующими параметрами технологического процесса являются, как правило, количество топлива, подаваемого в топку, и количество подаваемого первичного и вторичного воздуха [1].

Проведем анализ технологической схемы установки (рис. 1).

Первичное накопление топлива (опилок, щепы) происходит в бункере 1, откуда оно подается в другой бункер 3 при помощи шнекового дозатора 2. Вращение двигателя дозатора регулируется частотным приводом, что позволяет плавно изменять расход топлива в топку. Из второго бункера опилки поступают в систему пневмотранспорта 4, где они смешиваются с воздухом и по касательной вдуваются в топку котла циклонного типа 6, где сгорают. Для улучшения горения и регулирования температуры топочных газов через задвижку 5 поступает вторичный воздух. Он попадает в котел между топкой и камерой сгорания котла.

Горение дерева осуществляется в три четкие фазы:

1) пиролиз (коксование, газификация) происходит при 280–450°C. При нагреве с поверхности древесины начинает испаряться влага. В большом количестве образуются летучие вещества, которые, смешиваясь с воздухом и сгорая, выделяют тепло. Часть его тратится на распространение пиролиза внутрь частицы топлива, которое постепенно превращается в углистый остаток – древесный уголь [2];

2) горение выделившихся в процессе пиролиза, смешавшихся с вторичным воздухом и поступивших в камеру сгорания летучих веществ;

3) догорание древесного угля в топке с образованием золы (пепла).

Образовавшиеся при горении топочные газы втягиваются вентилятором в дымосос, проходят очистку и выбрасываются в атмосферу.

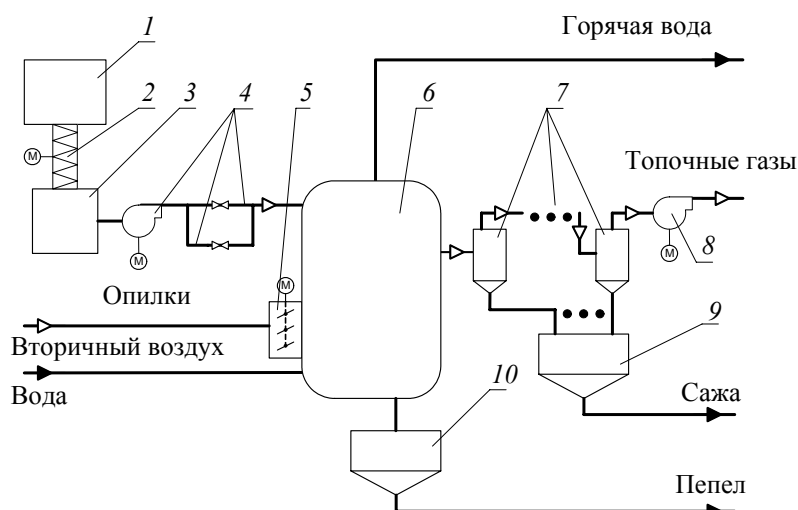


Рис. 1. Технологическая схема котельной:

1, 3 – бункеры опилок; 2 – шнековый дозатор; 4 – пневмотранспорт;
5 – задвижка; 6 – котел циклонного типа; 7 – дымофильтр; 8 – дымосос;
9 – бункер для сажи; 10 – бункер для пепла

Поступающая в котел из теплосети обратная вода протекает по теплообменнику, состоящему из трех потоков. В первом проходит через камеру сгорания газов, где теплообмен осуществляется в основном за счет теплоизлучения. В двух других газы проходят по пучкам вертикальных труб, что позволяет улучшить теплообмен и избежать оседания на них взвешенных частиц.

Подогретая в котле горячая вода поступает в тепловую систему предприятия и используется следующим образом:

- сушка пиломатериалов;
- горячее прессование щитов;
- отопление помещений предприятия [2].

В связи с тем, что деревообрабатывающее производство не является непрерывным, нагрузка на тепловую сеть в течение дня носит переменный характер. А значит, температура и расход обратной воды никогда не бывают постоянными. В свою очередь эти показатели влияют на теплообмен в котле (меняется движущая сила, коэффициент теплопередачи) и являются как структурными, так и параметрическими возмущениями.

Поступающее в топку топливо – отходы деревообрабатывающего производства (древесные опилки или щепа) – также характеризуется нестабильностью своих параметров.

Большое значение имеет размер топлива. Чем крупнее его частицы, тем более продолжительным будет процесс сжигания. В случае малого размера между топливом и воздухом устанавливается хороший контакт, так как маленькие частицы быстро сохнут, выделяют газы и сгорают, приводя к высокой интенсивности горения. Размер частиц зависит от характера производственных процессов и не может

быть постоянным, а значит, вносит возмущение в процесс.

Влажность топлива уменьшает количество содержащейся в нем энергии, выраженное в виде теплотворной способности, так как часть энергии будет использована для испарения влаги. Следовательно, ее изменение также будет вносить возмущение.

Топливо содержит различные примеси в виде частей негорючих компонентов – золы. Образование золы является нежелательным, так как при этом требуется очистка топочных газов от частиц с последующим захоронением золы и шлака. Зола древесины в основном формируется из частиц почвы и песка, которые поглощаются корой. Меньшая доля также попадает с солями, поглощенными в период роста деревьев. Особая характеристика золы – ее свойство сохранения тепла. В древесных печах слой золы формирует греющую поверхность на дне печи, которая передает тепло для догорания древесного угля. Зольность древесного топлива меняется в зависимости от породы сжигаемой древесины и влияет на его теплотворную способность.

Важными параметрами также являются температура и влажность поступающего в котел вторичного воздуха. Их изменение оказывает воздействие на горение летучих веществ, а значит, и на температуру газов в топке.

На основании вышесказанного можно заявить, что водогрейный котел на древесных отходах с циклонной топкой представляет собой сложный объект с взаимосвязанными управляемыми величинами, находящийся под влиянием большого количества структурных и параметрических возмущений (рис. 2). При этом параметры, описывающие работу объекта, являются размытыми.

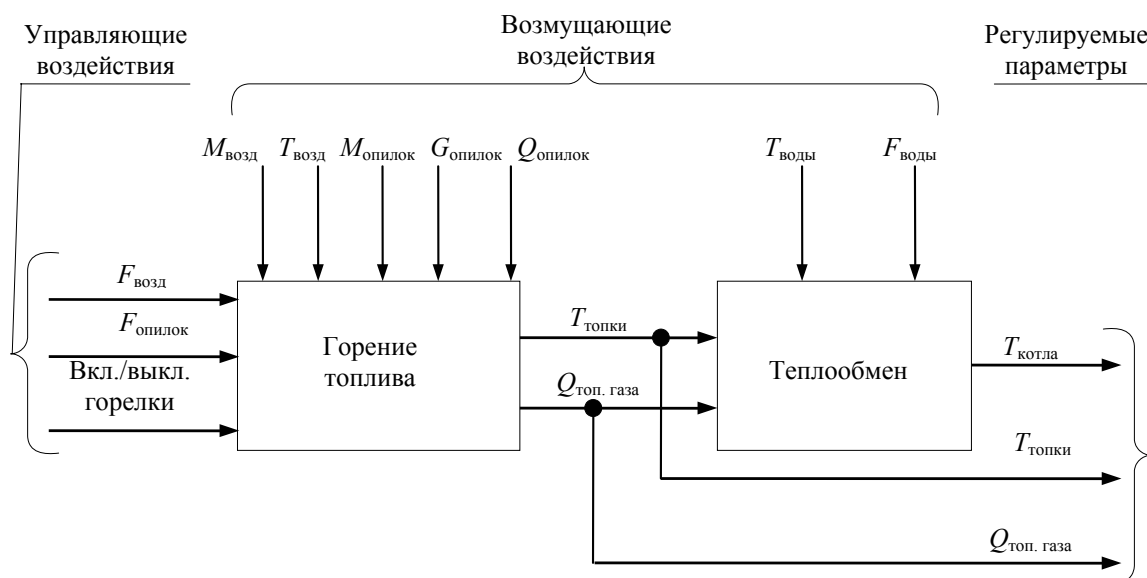


Рис. 2. Информационные переменные объекта

Регулируемыми параметрами, отражающими качество работы установки, являются температура газов в топке, температура нагреваемой в котле воды и концентрации CO , C_xH_y и O_2 в топочном газе.

Температура воды в котле зависит от количества тепла, полученного при сжигании топлива, и условий теплообмена. Также она находится под воздействием возмущений со стороны тепловой сети предприятия: температуры и расхода обратной воды. Поддержание этого показателя на заданном (установленном потребителем тепла) уровне стабилизирует теплообменные процессы в котельной и улучшает качество получаемой тепловой энергии.

Важным регулируемым параметром, говорящим об эффективности работы объекта, является состав газа в камере сгорания котельной. Известно, что снижение содержания избыточного кислорода в топочном газе является действенной мерой повышения эффективности установки, предназначенной для сжигания древесных отходов. Уменьшение концентрации O_2 на один объемный процент потенциально увеличивает тепловой КПД котельной на 0,9%. Также важна концентрация оксида углерода (II) в выбрасываемых в атмосферу газах, так как она подвергается экологическому контролю. На содержание кислорода и угарного газа в камере сгорания оказывает влияние расход подаваемого в установку вторичного воздуха.

Температуру топочного газа можно назвать основной регулируемой переменной анализируемого объекта. Ее исключительность проявляется в том, что значение температуры в топке косвенно характеризует и влияет на все остальные параметры котельной и определяет ее состояние в целом. Но у этой универсальности есть свои минусы: чувствительность к воздействию

большого числа возмущений и отсутствие простой и явной модели по управляющим и возмущающим каналам значительно усложняют стабилизацию этой переменной, а значит, и поддержание оптимального режима работы объекта.

Среди наиболее значительных возмущений можно отметить: температуру и влажность подаваемого в топку воздуха, влажность сжигаемого топлива, его размер и зольность, а также температуру и расход подаваемой в котельную из тепловой сети обратной воды.

Управляющие воздействия реализуются изменением расхода подаваемых в топку топлива и воздуха, а также включением и выключением горелки, пуском и остановкой пневмотранспорта опилок и дымососа.

Регулирование расхода топлива происходит изменением скорости вращения шнекового дозатора, подающего опилки в систему пневмотранспорта.

Изменение количества подаваемого в топку вторичного воздуха осуществляется путем варьирования степени открытия заслонки на входе в камеру сгорания.

В настоящее время управление котельными на древесных отходах с циклонными топками происходит по таким алгоритмам, которые не позволяют достигнуть стабильной и оптимальной работы объекта (рис. 3).

В зависимости от значений температур топочного газа и воды, нагреваемой в котельной, работа установки разделена на несколько режимов.

При температуре воды ниже заданного значения (как правило, 80–90°C) котельная запускается. При этом последовательно осуществляется:

- 1) запуск дымососа;
- 2) запуск пневмотранспорта.

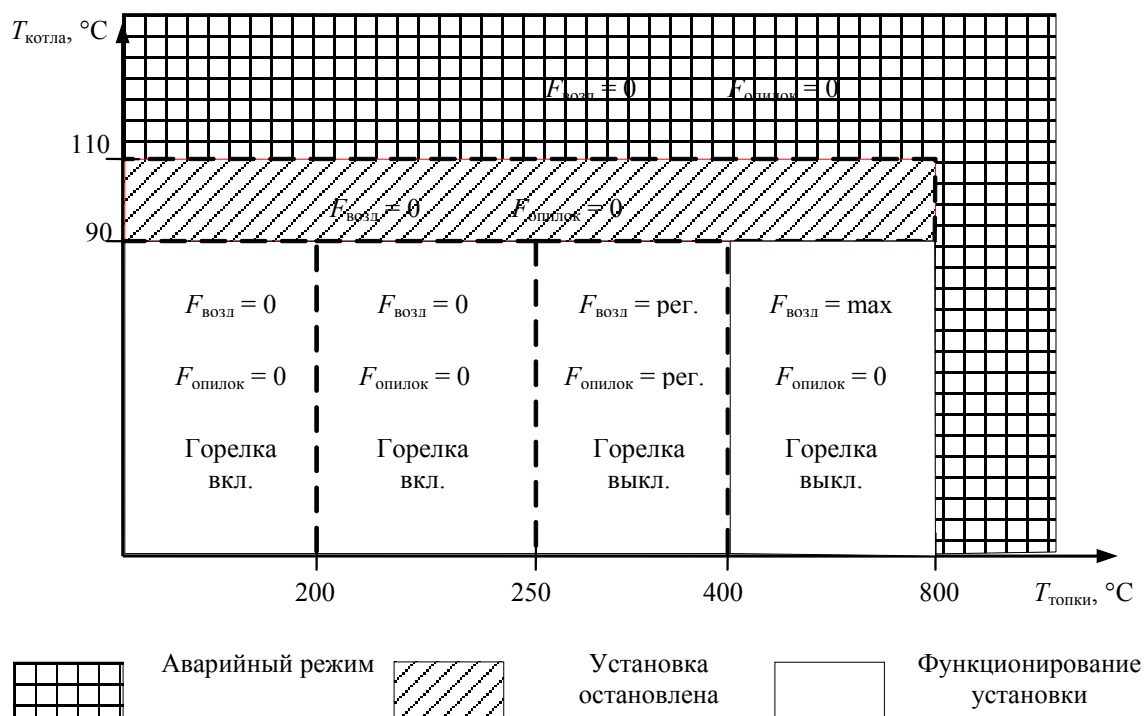


Рис. 3. Режимы работы объекта

Управление топкой происходит по температуре топочного газа. При ее значении меньше 200°C включается горелка и работает, пока температура топки не достигнет 250°C . При 200°C начинается подача топлива, а при 250°C – вторичного воздуха. Непрерывное управление температурой топки продолжается до 400°C . В этот момент подача топлива полностью прекращается, а заслонка вторичного воздуха полностью открывается.

Если в любой момент работы котельной температура воды станет больше задания, происходит последовательная остановка котельной:

- остановка шнекового дозатора;
- остановка пневмотранспорта;
- остановка дымососа;
- закрытие воздушного клапана.

Выход температур воды и топки за пределы 110 и 800°C соответственно означает переход установки в аварийный режим, об этом дополнительно сигнализируется.

Понятно, что такой алгоритм не может стабилизировать работу объекта, он лишь позволяет ему балансировать между аварийным состоянием и полной остановкой. Поэтому

важной задачей представляется поиск такой структуры и алгоритма системы регулирования, которые позволят достигнуть лучшего качества управления.

Закключение. Подытоживая вышесказанное, необходимо отметить, что водогрейная котельная на древесных отходах является объектом управления с размытыми параметрами, т. е. находится под воздействием многочисленных параметрических и структурных возмущений. Существующие системы управления котлами не учитывают этой размытости, а значит, имеется необходимость в их совершенствовании.

Литература

1. Передовой опыт в использовании энергии биомассы / Программа развития ООН. Глобальный экологический фонд. Комитет по энергоэффективности при Совете Министров Республики Беларусь; сост. Дж. Воз. – Минск, 2006. – 197 с.

2. Котломонтажсервис [Электронный ресурс]. – 2008. – Режим доступа: http://www.kotel.ru/articles/text_814_7.html. – Дата доступа: 02.02.2009.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БЛОКА УПРАВЛЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫМИ КАНАЛАМИ

The paper considers the issue of unification of the basic algorithm of synthesis of real-time computation structures. The said algorithm suggests multiple execution of a significant number of its blocks because the optimum structure is selected according to this algorithm from an aggregate of viable options at the final stage of algorithm execution. Thus one of key tasks to be solved in designing complex technical objects, the real-time systems being a part of them, is the shooting for labor and time saving solutions. Suggested is the method based on the combinatory logic in selecting optimum structures out of an aggregate of correct options.

Введение. Решение проблемы синхронизации вычислительной структуры предполагает формирование последовательности управляющих сигналов в соответствии с координатами вектора временной развертки с периодичностью, обусловленной условиями цикличности реализации вычислительного процесса.

Основным требованием к средствам решения этой проблемы является высокая точность формирования временных интервалов, от которой зависит, будет ли удовлетворять синтезируемая вычислительная структура условию организации вычислительного процесса в реальном времени. До сегодняшнего дня для решения проблемы формирования управляющих сигналов использовались два подхода: применение цифровых автоматов и микропрограммное управление.

Цифровые автоматы (устройства управления на основе схемной логики) способны обеспечить наивысшее быстродействие при заданном типе технологии элементов. Основные недостатки этих управляющих устройств: отсутствие возможности применения последних достижений микроэлектроники – больших интегральных схем и сверхбольших интегральных схем.

Принципиальная непригодность для формирования вектора временной развертки обусловлена ориентацией цифровых автоматов на формирование управляющих сигналов в соответствии с логическими выражениями без учета временной зависимости между этими сигналами.

Использование микропрограммного принципа построения устройств управления, широко распространенного в ЭВМ малой и средней производительности, устройствах управления периферией, некоторых типах микропроцессоров, является нецелесообразным для решения поставленной проблемы по следующим причинам:

- потребность в большом формате микрокоманды, возрастающем с ростом сложности проектируемой вычислительной системы (ВС);
- чрезвычайно нерациональное применение управляющей памяти из-за низкой вероятности одновременного включения нескольких

функциональных устройств (ФУ) и возможности широкой разбежки между значениями координат вектора временной развертки (это предполагает использование определенной последовательности «пустых» микрокоманд);

- потребность в быстродействующей управляющей памяти независимо от уровней временной иерархии;

- низкая точность формирования временных интервалов и, как следствие, повышение вероятности потери возможности реализации вычислительного процесса в реальном времени.

Данные особенности известных принципов построения управляющих устройств обусловили необходимость разработки принципиально нового подхода к решению задачи формирования управляющих сигналов для параллельно-конвейерных ВС реального времени.

Ниже предлагается метод синтеза блоков управления, которые ориентированы на реализацию последовательностей сигналов в соответствии с заданным вектором временной развертки, основанным на преобразовании исходного графа алгоритма, реализующего математическую модель функционала временной развертки [1].

Основная часть. Совокупность исходных данных для синтеза блоков управления разделим на две группы.

К первой группе отнесем ряд результатов, полученных при реализации процедур синтеза вычислительных структур [2]. К их числу относятся следующие:

1. Функционал временной развертки

$$\Phi(t(j, q))_{j=\overline{1, J}} = \begin{cases} (t(1, 1), t(1, 2), \dots, t(1, Q)) + \Delta t_1 k_1; \\ \vdots \\ (t(j, 1), t(j, 2), \dots, t(j, Q)) + \Delta t_j k_j; \\ \vdots \\ (t(J, 1), t(J, 2), \dots, t(J, Q)) + \Delta t_J k_J; \end{cases}$$

где

$$k_{j/j=\overline{1, J}} = 0, 1, 2, 3, \dots, t(j, 1), t(j, 2), \dots, t(j, Q) -$$

моменты включения j -го ФУ на первом цикле функционирования вычислительной структуры, равном

$$\Delta t_j = \Delta t(\gamma): v_j \in V(\gamma).$$

2. Такт вычислительной структуры τ_c .

3. Множества вершин γ -х уровней временной иерархии

$$V(\gamma) = \{v_\gamma\}, \gamma = \overline{1, \Gamma}.$$

4. Вектор шагов дискретизации

$$\vec{\delta t} = (\Delta t(1), \Delta t(2), \dots, \Delta t(\Gamma)).$$

5. Вектора усеченных путей

$$\vec{L}_k = (v(1)^{(k)}, v(2)^{(k)}, \dots, v(n_k)^{(k)}), k = \overline{1, K_c},$$

где K_c – множество усеченных путей вершин графа алгоритма (ВГА).

6. Множества вершин, образующих ступени конвейеров

$$V(L, \mu) = \{v^{(k)}(L, \mu)\},$$

где $\mu = \overline{1, \rho_L}$ – номер ступени конвейера пути L ;

ρ_L – количество ступеней конвейера пути L ;

$k = \overline{1, K_\mu}$ – номер вершины μ -й ступени пути L ;

K_μ – количество вершин μ -й ступени пути L .

7. Вектор вершин, которым назначено ФУ типа мультиплексор

$$\vec{V}_{MX} = (v_1^{(MX)}, v_2^{(MX)}, \dots, v_s^{(MX)}),$$

где s – количество вершин, которым назначено ФУ типа «мультиплексор».

8. Количество информационных входов мультиплексоров в виде вектора

$$\vec{K}_{MX} = (k_1^{(MX)}, k_2^{(MX)}, \dots, k_s^{(MX)}).$$

9. Требования к синхронизации ФУ вычислительной структуры

$$\{\vec{c}_j\} = \{(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, c_3^{(j)}, c_4^{(j)})\},$$

где

$$c_1^{(j)} \Big|_{j=\overline{1, J}} = \begin{cases} 0, & \text{если ФУ} \\ & \text{не требует} \\ & \text{синхронизации;} \\ 1, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$c_2^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{при синхронизации} \\ & \text{по фронту;} \\ 1 & \text{при синхронизации} \\ & \text{потенциалом или импульсом;} \end{cases}$$

$$c_3^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{при синхронизации высоким} \\ & \text{потенциалом или переключением} \\ & \text{синхросигнала с высокого на низкий;} \\ 1 & \text{при синхронизации высоким} \\ & \text{потенциалом или переключением} \\ & \text{синхросигнала с низкого на высокий;} \end{cases}$$

$$c_4^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{при синхронизации фронтом;} \\ 1 & \text{при синхронизации импульсом,} \end{cases}$$

где τ_0 – минимально допустимая продолжительность управляющего импульса при синхронизации импульсом или требуемая продолжительность действия потенциала.

Ко второй группе относятся параметры ФУ для реализации блоков управления. Это, в первую очередь, параметры основных ФУ:

1. Частота переключения для ФУ, реализующих функции

$$X_3(\cdot), X_D(\cdot), X_K(\cdot), X_B(\cdot).$$

2. Признак типа ФУ для этих ФУ

$$d_j = \begin{cases} 0 & \text{для ФУ} \\ & \text{с программным управлением,} \\ 1 & \text{для ФУ с жесткой аппаратной} \\ & \text{реализацией.} \end{cases}$$

3. Максимальное значение коэффициента деления ФУ, реализующих функцию $X_D(\cdot)$ при

$d_j = 0 - K_{D_{\max}}^{(j)}$, коэффициент деления $K_D^{(j)}$ при $d_j = 1$.

4. Параметры задержки ФУ, реализующих функцию $X_3(\cdot)$.

5. Максимальное значение формируемого временного интервала $\tau_{\text{инт max}}$ для дуг, реализующих функцию $X_B(\cdot)$.

6. Длительность задержки распространения $\tau_{з \text{ рас}}$ для логических элементов дизъюнкции, ввода, вывода $t(i)$.

7. Время доступа для ФУ ввода параметров $K_3, K_D - \tau_d$.

Для служебных ФУ задается ряд следующих параметров:

1. Полоса частоты генерации (f_{r1}, f_{r2}) для генератора тактовых импульсов.

2. Длительность задержки распространения τ_α для инверторов, частота переключения $f_{\text{пер}}$, количество состояний $K_{\text{сост}}$ для устройств управления мультиплексорами.

3. Диапазон изменения длительности выходного импульса для формирователей импульсов.

4. Частота переключения для ФУ управления мультиплексорами $f_{\text{пер}}$.

Задача синтеза блоков управления систем контроля параметров технологических процессов с учетом совокупности приведенных исходных данных и введенных понятий формулируется следующим образом.

Известен функционал временной развертки графа вычислительной структуры, способы отображения его путей на вычислительные архитектуры, требования по организации синхронизации функциональных устройств, назначенных вершинам графа, набор функциональных устройств для формирования и преобразования временных интервалов. Далее выбирается состав функциональных устройств, строится граф блока управления, позволяющий организовать циклический вычислительный процесс в реальном времени, согласно программе, определяемой функционалом временной развертки [1].

В данном случае в качестве модели системы контроля параметров технологических процессов выбрали регистратор многоканальный РМ-2201, выпускаемый серийно ОАО «МНИПИ». В разработанном приборе имеется 16 измерительных каналов, к которым подключаются датчики, выполняющие определенные измерения и обеспечивающие достижение заданных результатов системы контроля [3].

Управление осуществляется группой объектов, т. е. каналами. Их виртуальная структура представляется в виде совокупности bitmap-карт, каждая из которых имеет свою программу управления (алгоритм). При управлении сложным объектом процессор по очереди обслуживает, опрашивает измерительные каналы. Эта очередь может осуществляться по жесткой программе или по мере поступления заявок от отдельных каналов с возможностью использования в последнем случае приоритетного обслуживания.

В системе реализованы несколько алгоритмов управления АУ1, АУ2, ..., АУ l , каждый из которых выбирается в зависимости от результата оценивания корреляционной функции входного воздействия $g(o)[nT]$ блоками выборки данных и коммутации выхода.

Переключение между каналами осуществляется в реальном масштабе времени на программном уровне. На систему управления в данном случае возлагается функция распознавания образов, записанных в bitmap-картах, соответствующих определенным запросам по подключению того или иного канала.

В основной состав блока управления системы контроля параметров технологических процессов входят ПЭВМ, аналого-цифровой преобразователь (АЦП), дисплей для отображения результатов и запросов, клавиатура, преобразователь команд управления. В памяти ПЭВМ хранится программа с готовыми решениями – bitmap-картами для измерительных каналов.

Модификация решений может производиться через клавиатуру, что позволяет видоизменять систему без аппаратурной перестройки. В режиме управления каналами на вход АЦП поступают сигналы от датчиков температуры. Цифровые сигналы от контактов переключателей и клавиатуры поступают в ПЭВМ напрямую через 16 входов интегральной схемы интерфейса. Для проведения нужных измерений система генерирует синусоидальный сигнал модуляции и вырабатывает последовательность синхроимпульсов. Генерируемый синусоидальный сигнал состоит из определенного количества ступенек, формируемых табличным bitmap-способом. При каждом прерывании от таймера ПЭВМ переходит к программе выборки очередного значения синусоиды. Полученное фазовое слово, характеризующее частоту и фазу синусоиды, и синхроимпульс передаются в ПЭВМ.

Получив синхроимпульс, ПЭВМ запрашивает отсчет у быстродействующего АЦП и принимает фазовую информацию от ПЭВМ. Отсчет, выданный АЦП, записывается в ячейку ассоциативной памяти, номер которой отвечает фазовому слову. Отсчеты, соответствующие одному периоду сигнала, образуют группу. Каждая последующая группа отсчетов записывается в те же ячейки памяти, добавляясь к уже имеющемуся содержимому этих ячеек. Этот процесс повторяется до завершения заданного количества периодов модуляции.

Результатом работы программы являются сигналы, которые представляют собой цифровые данные о температуре и выводятся на дисплей системы. Здесь также предусмотрена возможность применения программ обработки прерываний для планирования критически важных задач с управлением по неожиданным событиям. Ускорение передачи данных достигается согласованием в цикле чтения данных времени преобразования аналоговой величины в цифровую с временем выполнения команд программы быстрой передачи данных. Цикл ожидания исключается. В частности, после инициализации (первичного запуска) системы программа входит в цикл чтения данных с карт. При каждом обращении программы к некоторому адресу bitmap-карты происходит формирование сигнала, запускающего АЦП в новый цикл преобразования. Пока система выполняет очередные команды программы передачи данных, цикл преобразования завершается и данные могут быть введены в память.

Система прерывания позволяет с помощью определенного сигнала внешнего устройства прервать программу, выполняемую обработкой канала, и вызвать для исполнения программу с более высоким приоритетом канала. После окончания программы с более высоким

приоритетом ПЭВМ автоматически возвращается к прерванной программе. Прерывания при вводе-выводе могут быть обусловлены следующими условиями:

- 1) готовность внешних устройств по вводу-выводу данных;
- 2) появление ошибок при вводе-выводе;
- 3) возникновение особого условия во внешних устройствах, например аварийной ситуации.

Возможны также и другие причины возникновения прерываний.

При наличии режима прерывания система не ожидает готовности внешних устройств к обмену данными, а выполняет основную программу до тех пор, пока от внешнего устройства не поступит запрос на прерывание. В результате повышается производительность системы.

Схема управления регистратором многоканальным с 16 измерительными каналами работает следующим образом. Каждое из шестнадцати внешних устройств (каналов) может в любой момент времени запросить прерывание, формируя сигнал на своей линии запроса. Запрос запоминается в регистре запросов прерывания.

Когда система воспринимает сигнал ЗАПРОС ПРЕРЫВАНИЯ, ее логика управления генерирует сигнал ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ПРЕРЫВАНИЯ, указывающий на то, что система готова приступить к обслуживанию прерывания. Тогда содержимое выходного буферного регистра поступает на линию данных, и система начинает обслуживать прерывание с другой ячейкой памяти.

Для эффективного формирования вариантов маршрутов по комплексу или приоритетному показателю используется метод оптимизации, разработанный на базе теории и базового алгоритма синтеза вычислительных структур реального времени [4].

При реализации метода усекается дерево поиска структурных решений, которые представляют собой набор готовых алгоритмов, реализованных в bitmap-картах. Применение данного метода позволило снизить трудоемкость при выборе алгоритма, соответствующего запросу и определению опрашиваемого канала. При уменьшении трудоемкости снизилось количество операций, требуемых для определе-

ния оптимального варианта выбора измерительного канала, соответствующего запросу. При этом увеличилась надежность расчетов и скорость обработки информации, освободились другие не менее важные машинные ресурсы.

Заключение. Разработанный метод оптимизации базового алгоритма проектирования позволяет осуществлять поиск снижения трудоемкости при проектировании систем контроля параметров технологических процессов. Также сокращен требуемый объем памяти для хранения исходных данных и промежуточных результатов.

Математическая модель и алгоритм синтеза параллельно-конвейерных вычислительных структур блока управления позволили:

– представить эту модель графом вычислительного алгоритма, что обуславливает удобство его преобразования рядом несложных процедур с целью уменьшения его размерности;

– отображать вершины графа на простые функциональные устройства для реализации временных преобразований.

При адаптации метода синтеза блоков управления измерительными каналами была решена проблема формирования управляющих сигналов для систем контроля в соответствии с функционалом временной развертки.

Литература

1. Кобайло, А. С. Основы теории синтеза вычислительных структур реального времени / А. С. Кобайло. – Минск: БГУИР, 2001. – 236 с.
2. Жилияк, Н. А. Базовый алгоритм синтеза вычислительных структур реального времени / Н. А. Жилияк, А. С. Кобайло // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2007. – Вып. XV. – С. 147–150.
3. Жилияк, Н. А. Разработка блоков управления систем реального времени / Н. А. Жилияк // НИРС – 2005: сб. тез. докл. X Респ. науч. конф. студентов и аспирантов вузов Респ. Беларусь. – Минск: БГУИР, 2006. – С. 146.
4. Жилияк, Н. А. Математические основы синтеза блоков управления вычислительных систем реального времени / Н. А. Жилияк // Материалы IX Респ. науч. конф. студентов и аспирантов. – Гомель: ГГУ, 2006. – С. 218–219.

ОРГАНИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ЭЛЕКТРОННОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ С АКТИВНЫМ КОНТРОЛЕМ ПРИОБРЕТАЕМЫХ ЗНАНИЙ

It is proposed learning content model with continuous control of learning knowledge. The learning content divided into sense pages with learning objects. Learning objects and sense pages have different weights, which take into knowledge control with programming interface. By them control learning knowledge in ELS is developed by standard testing and permanently by analysis of student work with learning materials on base of programming interactivity of multimedia user interface. That learning content model provides active learning knowledge and conception of virtual tutor.

Введение. В работе предлагается структура электронной обучающей системы (ЭОС), основанная на концепции объектной модели SCORM, в которой весь учебный материал линии, кроме традиционной разбивки на темы, которые в свою очередь могут иметь несколько уровней вложенности разбивок на подтемы, разбивается далее на смысловые страницы и учебные объекты. При этом контроль знаний в ЭОС осуществляется как посредством традиционных тестовых заданий, функционально привязанных к разноуровневым темам и объектам, так и непрерывно на основе анализа действий обучаемого при прохождении им учебного материала с использованием программируемой интерактивности.

Основная часть. В объектной модели SCORM [1] учебный контент состоит из исходных активов в виде разного рода учебных объектов (текст, изображения, звук, анимация, видео), которые при помощи метаданных на основе языка XML объединяются затем в различные множества компоновок: учебные курсы, учебники, учебные фильмы [2]. В связи с предлагаемой структурой ЭОС мы уточняем понятие смысловой страницы и учебного объекта [3]. Под *учебным объектом* мы понимаем минимальную неделимую единицу учебного материала, которая передает содержащееся в ней знание и связана с другими учебными объектами, тестовыми заданиями и потенциально с реакциями виртуального преподавателя. *Смысловая страница* – это блок учебного материала, состоящий из учебных объектов, образующий законченный по смысловому содержанию учебный модуль, который требует усвоения и занимает в ЭОС один экран.

Предлагаемая иерархическая структура организации учебной информации может быть представлена в виде раскрашенного направленного графа. На рисунке вершины графа обозначают следующие элементы: Д – учебная дисциплина, Т – тема, С – смысловая страница, О – учебный объект, ТЗ – тестовое задание. В предлагаемой структуре организации учебного контента выделены три уровня вложенности учебного материала, первый из которых является традиционным (тема – учебная дисциплина), а два других (учебный объект – смысловая

страница – тема) используются для организации активного и непрерывного контроля знаний, реализующего функции виртуального преподавателя. При этом все вершины графа, вообще говоря, неравноценны, что определяется присвоением каждой вершине специальной характеристики – *веса*.

Для третьего уровня вложенности – уровня объектов – на приведенном графе частично показаны тестовые задания ТЗ₁–ТЗ₄ разных типов, которые связываются с вершинами графа на объектном и на более высоких уровнях. При этом контроль знаний в ЭОС на уровне объектов показывает знание обучаемым исходного учебного материала, вложенного в объекты, в то время как контроль со связями на более высоких уровнях определяет способность студента логически связывать учебные объекты и понимать закономерности их взаимодействия.

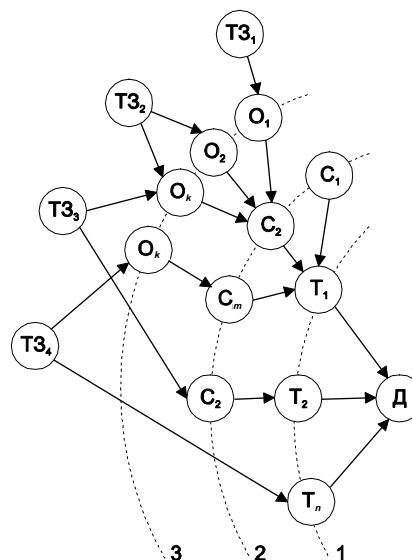


Рисунок. Схема построения контроля знаний в ЭОС с активным контролем знаний

В связи с предложенной выше схемой организации учебного материала возникает потребность в соответствующей методике формирования вопросов для контроля. В зависимости от того, какую область учебного материала контролируют тестовые задания, их можно ранжировать по следующим уровням:

- *объектные* (для учебного объекта);
- *страничные* (для смысловой страницы);
- *тематические* (для темы дисциплины);
- *дисциплинарные* (для дисциплины в целом).

В данной структуре разделения учебного материала появляется возможность проведения точечного перманентного контроля знаний по различным учебным блокам курса, начиная с их минимальных представителей – учебных объектов. При этом учитывается наличие связей между учебными объектами и их весами на смысловой странице, между смысловыми страницами и их весами в теме и, наконец, между темами и их весами в изучаемой дисциплине. В такой структуре ЭОС в полной мере возможна реализация концепции *виртуального преподавателя* с адекватной реакцией на выполняемые обучаемым действия на основе соответствующего экранного интерфейса, что в целом обеспечивает *активный контроль знаний*.

Для случая, когда для одного учебного объекта O_k задается только одно тестовое задание ТЗ *объектного* уровня, легко вычислить *объектный коэффициент знаний* с учетом разных *весов* учебных объектов на смысловой странице. *Вес* учебного объекта, смысловой страницы, темы – это степень важности выбранного учебного объекта, смысловой страницы, темы по отношению к объемлющему блоку и задается экспертами (авторами учебного курса). При этом сумма всех весов каждого уровня внутри каждого учебного блока должна быть равна 1, что соответствует полному знанию о содержащемся в данном блоке учебном материале.

Исходя из вышесказанного, формула расчета *объектного коэффициента* уровня знаний в целом по дисциплине имеет следующий вид:

$$КД = \frac{1}{nmr} \sum_{i=1}^n w_i \left(\sum_{j=1}^m v_j \left(\sum_{k=1}^l \mu_k KO_k \right) \right),$$

где n, m, r – количество предлагаемых тестовых заданий соответственно на дисциплинарном, тематическом и страничном уровнях.

$$\text{Коэффициент знания объекта } KO_k = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases},$$

где 1 – правильный ответ, 0 – неправильный ответ.

При этом, например, суммарный коэффициент знания смысловой страницы вычисляется по формуле

$$КС_j = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \mu_k KO_k.$$

По аналогичным выражениям рассчитаны и включены в первую общую формулу суммарные коэффициенты знания темы и всей дисциплины.

Для весов объекта, страницы и темы должно выполняться следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^r \mu_k = \sum_{j=1}^m v_j = \sum_{i=1}^n w_i = 1,$$

где μ_k, v_j, w_i – соответственно вес учебного объекта, смысловой страницы, темы.

В случае, если для одного объекта предусмотрено несколько тестовых заданий с разным весом, суммарный коэффициент знания объекта должен рассчитываться по формуле

$$KO_k = \frac{1}{u} \sum_{l=1}^u \alpha_l q_l^k,$$

где u – количество тестовых заданий к учебному объекту; α_l – вес тестового задания, при этом сумма весов всех заданий должна быть равна 1 ($q_l = 1$ за правильный ответ или $q_l = 0$ за неправильный ответ).

Таким образом, общая оценка КД определяется уровнем тестового задания, весом учебного объекта в ЭОС и весом тестового задания. КД является накопительным коэффициентом, при этом его значение, равное 1, соответствует уровню знаний автора данного учебного курса. Обучаемому, который практически не сможет правильно выполнить все тестовые задания по дисциплине, например, для получения отличной оценки необходимо получить коэффициент КД, равный 0,9–1,0, или другой, соответствующий оценке «отлично» по общей шкале оценок, принятой в данном учебном учреждении.

Из предложенной схемы расчета контроля знаний в ЭОС вытекает естественное разделение способов расчета оценки знаний при подсчете уровня знаний по учебным объектам, согласно приведенным выше формулам, которую назовем *объектной*, и при подсчете уровня знаний при выполнении тестовых заданий с учетом объектов более высокого уровня – страничного, тематического, дисциплинарного, которую назовем *рейтинговой*, поскольку она характеризует знания обучаемого о логических связях и взаимодействиях объектов учебного материала.

Активный контроль знаний или интерактивная помощь, инициируемая системой, реализованы программным образом и основываются на следующих принципах. Если пользователь достаточно долгое время «не сходит» с текущей страницы, то система предлагает ему ответить на ряд вопросов, связанных с текущей страницей, на основании ответов на которые система определяет «пробелы» в знаниях. Если пользователь не знает ответа на вопрос, выдается страница, где помещен ответ на данный вопрос. Каждый вопрос идентифицируется в программном коде с именем вопроса и именем ответа, при этом ответ рассматривается как имя закладки на странице, где содержится текст ответа. По

этим именам можно определить настоящий текст вопроса и ответа с помощью кодировочной матрицы.

Система контроля знаний ЭОС отслеживает ситуацию, в которой пользователь просматривает снова ранее пройденную страницу, причем тратит на ее просмотр достаточно много времени. В этом случае система предлагает помощь в форме блиц-опросника. При подтверждении пользователю предоставляется соответствующее окно помощи.

Выделим следующие группы задач виртуального преподавателя:

А. Отслеживание процесса обучения.

Б. Оказание помощи обучаемому.

В. Контроль знаний и выявление недоработок учащегося.

Отслеживание процесса обучения связано с выявлением следующих ситуаций:

А1. Учащийся бессистемно перемещается по учебнику.

А2. Учащийся возвращается к ранее пройденным фрагментам учебника.

А3. Учащийся «остановился» на некотором вопросе.

Ситуация А1 бессистемного просмотра учебника требует «напоминания» учащемуся о его обязанностях. Ситуация А2 возврата на ранее пройденные разделы требует, возможно, оказания помощи. Аналогичным образом, ситуация А3, когда учащийся «тормозит» на некотором вопросе, требует выявления варианта помощи в конкретном случае.

Для выявления указанных ситуаций система ведет «историю» процесса изучения учащимся учебного материала. История представляет последовательность номеров страниц, просматриваемых в ходе обучения учащимся, числа их посещений и времени, затраченном на просмотр страниц.

Таким образом, ситуация А1 сводится к следующей статистической задаче. Имеется последовательность номеров страниц. Требуется проверить гипотезу о случайном характере этой последовательности. Для решения этой задачи может быть использован статистический критерий серий [4], суть которого состоит в следующем. В последовательности S будем отмечать знаком «+» наблюдение, с которого, как предполагается, либо начинается новая серия, либо продолжается старая серия. В противном случае ставим знак «-». Пусть, для примера, учащийся просмотрел следующие страницы: 2, 3, 4, 7, 11, 12, 15, 2, 4, 8. Этой последовательности сопоставляется следующая последовательность знаков: «+, +, +, -, +, +, -, +, -, +». Здесь первые три знака «+» определяют серию последовательно просматриваемых страниц (2, 3, 4). Затем серия обрывается (7). Следующее число 11, судя по всему, открывает

новую серию (11, 12). Число 15 обрывает серию, а 2, как видно, открывает новую серию и т. д. Согласно критерию серий, подсчитываем число появлений знака «+» и «-» (соответственно n_+ , n_-). Вычисляем число серий (повторяющихся последовательностей из «+» и «-») – $R = 7$. Далее рассчитываем число z :

$$z = \frac{R - \left(1 + \frac{2n_+n_-}{n_+ + n_-}\right)}{\sqrt{\frac{2n_+n_-(2n_+n_- - n_+ - n_-)}{(n_+ + n_-)^2(n_+ + n_- - 1)}}}$$

Число z считается нормально распределенной нормированной случайной величиной, что легко проверить, например, с помощью критерия Стьюдента.

Ситуация Б проверяется просто выделением повторяющихся подпоследовательностей.

Для проверки ситуации В необходимо выяснить, что время, проводимое учащимся за чтением данной страницы, значимо отличается от среднестатистического времени, затрачиваемого на изучение предыдущих страниц. Пусть последовательность времен, затрачиваемых на чтение страницы учебника, составило T_1, T_2, \dots, T_m . Обозначим через T_{\max} – максимальное среди этих значений и через T_{\min} – минимальное. Рассмотрим случайную величину

$$V = \frac{T_{\max} - \bar{T}}{\sqrt{\frac{m-1}{m} \Delta T}},$$

где $\bar{T} = \frac{1}{m} \sum T_i$ и $\Delta T = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_1^m (T_i - \bar{T})^2}$.

Рассчитанное значение V нужно сравнить с табличным значением максимально возможного отклонения нормально распределенной нормированной случайной величины, заданной значением m и вероятностью ошибки, например, 0,05 [5].

Оказание помощи реализуется путем выполнения вопросника, ассоциированного с изучаемым материалом. Вопросник представляет собой набор вопросов с указанием вариантов ответов. Материал вопросника связан с семантической структурой учебного пособия, которая представляет собой семантическую сеть понятий, ассоциированных по принципу «родитель – потомок». Например, понятие электрохимического потенциала является родительским по отношению к понятию гальвани-потенциала и т. д. В результате проведения опроса устанавливается набор понятий, которые учащийся знает недостаточно хорошо. Учащемуся рекомендуется обратиться к темам, связанным с этими понятиями.

Контроль знаний и выявление недоработок реализуется как в форме текущего опроса

знаний, так и в форме тестов на усвоение материала. Текущий опрос напоминает опрос с места учащегося, что позволяет преподавателю оценить готовность учащегося к дальнейшему «продвижению» по учебному материалу. Текущий опрос в ЭОС представляет собой элемент программного интерфейса в виде интерактивного «опросника» для оказания помощи студенту и текущего контроля его знаний. При этом такой «опросник» контекстно зависим и запускается при переходе к каждому новому параграфу или разделу с соответствующим содержанием.

Тестирование знаний выполняется в форме глобального теста по теме (разделу) после прохождения учебного материала и требуется для выставления общей оценки по изучаемому предмету. Данная информация помещается в централизованную базу на сервере и оценивает степень усвоения предмета учащимся.

Предложенная система активного контроля знаний в ЭОС программно реализуется на языках Java, XML и базируется на платформе PHP/MySQL. Алгоритм программы разделен на область пользователя (студента) и область администратора (преподавателя). Администратор загружает контент в базу данных MySQL последовательно учебными объектами, задавая для каждого объекта стиль и вес. Контроль знаний в программной реализации заключается в том, что в базе данных ЭОС к учебным объектам добавляются соответствующие тестовые задания, вес тестовых заданий и уровень тестовых заданий, которые затем участвуют в расчетах коэффициентов знаний на разных уровнях в структуре ЭОС.

Структуру всего приложения в целом содержит навигационный файл nav.xml. Каждый созданный текстовый документ сохраняется как html-документ и описывается в элементе `<item> ... </item>` данного навигационного

файла. Для каждого html-документа затем строится файл ассоциированных понятий. Этот файл содержит основные понятия, их обозначения и соотношения между ними. Файл ассоциированных понятий, вообще говоря, должен давать раскрытие каждого понятия, а также содержать ссылки на связанные понятиями темы. При этом для каждого из выбираемых понятий создается собственный html-документ.

Заключение. Таким образом, предложенная структура организации учебного материала в ЭОС обеспечивает *активный контроль знаний*, при котором реализуются направленные адекватные реакции виртуального преподавателя и проводится непрерывное контекстно зависимое тестирование по предъявляемому учебному материалу.

Литература

1. Официальный сайт ADL. SCORM® 2004. 3rd Edition (Content Aggregation Model). Version 1.0. November 16, 2006 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.adlnet.gov. – Дата доступа: 12.02.2008.

2. Making Sense of Learning Specifications & Standards. A Decision Maker's Guide to their Adoption. 2nd Edition [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.masie.com/standards/S3. – Дата доступа: 12.02.2008.

3. Гурин, Н. И. Активный контроль знаний в электронной обучающей системе / Н. И. Гурин, Т. В. Мицкевич // Технологии электронного обучения в современном ВУЗе: материалы Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 13–15 мая 2008 г. – Минск, 2008. – С. 129–130.

4. Большев, Л. Н. Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – М.: Наука, 1983. – 416 с.

5. Герман, О. В. Теория информационных процессов и систем / О. В. Герман, Н. Н. Дорожкина. – Минск: БГТУ, 2007. – 222 с.

ОСОБЕННОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

The article of design the methods of presentation and minimization of mathematical models of calculable process, allowing to automates a planning process difficult to shorten time of planning of the real-time systems, optimize the designed systems on the row of technical descriptions are considered. A method for optimizing the base on the algorithm design, allows you to implement the search of reducing the labor required for the design of control systems of parameters of technological processes. It also reduced the required amount of memory to store the outcome-governmental data and intermediate results.

Введение. Применение формальных методов синтеза вычислительных систем, ориентированных на автоматизацию проектирования [1], предусматривает разработку специальных способов представления математических моделей вычислительных процессов для синтезируемых систем. Среди проблем, связанных с автоматизацией проектирования вычислительных систем реального времени, выделим три основных:

– ввод и обработка математических моделей, зависящих от временных параметров или содержащих временные преобразования;

– потребность в больших объемах памяти для сохранения промежуточных результатов и исходных данных при обработке графов, соответствующих моделям процессов, заданных дискретными отсчетами временных параметров;

– сложности, возникающие при вводе таких моделей.

В настоящей статье исследуются методы решения указанных проблем, один из которых базируется на применении предложенных автором специальных функций для представления временных преобразований, второй – на положениях, позволяющих минимизировать математические модели дискретных циклических процессов.

Основная часть. Рассмотрим несколько характерных случаев временных преобразований процессов.

1. Задание области определения функции времени. Традиционное представление такой зависимости от временных параметров вида

$$y(t) = \begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n, t), & t \in (t_1, t_2), \\ 0, & t \notin (t_1, t_2), \end{cases} \quad (1)$$

где $f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ – непрерывная функция времени, усложняющая процедуры синтеза, ориентированные на обработку математической модели, все параметры которой задаются едиными аналитическими выражениями. Кроме того, данная функция при автоматизации синтеза обуславливает повышение трудоемко-

сти алгоритмов, а в конечном итоге ведет к усложнению вычислительных структур и снижает точность формирования временных параметров по причине необходимости наличия служебных функциональных устройств для анализа попадания функции $f(\cdot)$ в требуемый временной интервал и в связи с потерей времени на эти служебные функции.

2. Преобразование типа «временная задержка процесса» имеет вид

$$y(t) = f(t - \tau_3), \quad (2)$$

где τ_3 – фиксированный интервал задержки.

Очевидно, что такое преобразование требует представления, которое позволяло бы в аналитическом выражении учитывать операции задержки, реализуемые простыми функциональными устройствами.

3. Формирование из непрерывной функции кусочно-непрерывной

$$f(t) \xrightarrow{t_i + \tau_i} y(t), \quad (3)$$

где $t_i + \tau_i$ – верхняя граница интервала существования функции $y(t)$. Вероятно, что данный случай является более общим случаем 1.

4. Временная задержка функции $f(x)$ с растяжением:

$$y(t) = f\left(\frac{t - \tau_3}{K_p}\right), \quad (4)$$

где K_p – коэффициент растяжения.

5. Временная задержка функции $f(x)$ со сжатием (частный случай предыдущего при $K_p < 1$):

$$y(t) = f((t - \tau_3)K_c), \quad (5)$$

где K_c – коэффициент сжатия.

Выражения (4), (5) так же, как и (3), требуют представления, удобного для преобразования соответствующего графа и реализации доступными техническими средствами.

Ряд других математических моделей, зависящих от временных параметров, сводится в конечном итоге к комбинации рассмотренных.

Графовое отображение моделей (1)–(5), используемое при автоматизации проектирования,

которая основана на методах теории синтеза вычислительных систем реального времени [1], целесообразно представлять в виде

$$y(t) = f(t)q(t), \quad (6)$$

где $q(t)$ – оператор преобразования.

Предлагается в качестве оператора $q(t)$ применять ряд функций на базе разностной единичной функции.

Так, преобразование (1) связано с формированием временного интервала. Для него введем понятие единичной разностной функции.

Определение 1. Единичной разностной функцией называется функция $\chi_p(t_0, \tau)$, которая рассчитывается следующим образом:

$$\chi_p(t_0, \tau) = 1(t - t_0) - 1(t - (t_0 + \tau)), \quad (7)$$

где $1(\cdot)$ – единичная функция Хевисайда.

При формировании процессов, зависящих от временных параметров, полезной может быть функция, характеризующая момент окончания формирования интервала.

Определение 2. Параметром разностной единичной функции $t^*(t_0, \tau_p)$ будем называть параметр, определяемый как момент окончания временного интервала:

$$t^*(\chi_p) = t^*(t_0, \tau_p) = 1(t - (t_0 + \tau_p)) - 1(t - (t_0 + \tau_p + \tau')), \quad (8)$$

при $\tau' \rightarrow 0$.

Определение 3. Функцией задержки называется функция

$$\chi_3(\tau_3) = 1(t - \tau_3). \quad (9)$$

Определение 4. Модифицированной функцией задержки называется функция

$$\chi'_3(t_0, \tau_3) = 1(t - (t_0 + \tau_3)). \quad (10)$$

Определение 5. Функцией задержки с растяжением называется функция

$$\chi_{3,p}(\tau_3, K_p) = 1\left(\frac{t - \tau_3}{K_p}\right). \quad (11)$$

Определение 6. Функцией задержки со сжатием называется функция вида

$$\chi_{3,c}(\tau_3, K_c) = 1((t - \tau_3)K_c). \quad (12)$$

Отметим, что более сложные временные преобразования сводятся к разнообразным комбинациям выражений (7)–(12).

Преобразованиям (1)–(5) при введенных обозначениях соответствуют выражения

$$y(t) = f(t)\chi_p(t_1, \tau),$$

где

$$\tau = t_2 - t_1,$$

$$y(t) = f(t - \tau_3)\chi_3(\tau_3),$$

$$y(t) = f(t) \sum_{i=1}^l \chi_p(t_i, \tau_i),$$

$$y(t) = f\left(\frac{t - \tau_3}{K_p}\right) \chi_{3,p}(\tau_3, K_p),$$

$$y(t) = f((t - \tau_3)K_c) \chi_{3,c}(\tau_3, K_c).$$

Рассмотрим еще несколько типовых преобразований.

Случайная флуктуация задержки имеет вид

$$y(t) = f(t - \tau_3 - \tau_b)\chi_3(\tau_3 + \tau_b),$$

где τ_b – случайная составляющая задержки.

Аналогичным образом можно найти случайную флуктуацию длительности импульсов и пауз импульсного процесса

$$y(t) = f(t) \sum_{i=1}^l \chi'_p\left(\left(t_n^{(i)}, \tau_n^{(i)}, \tau_{nb}^{(i)}\right), \tau_n^{(i)} + \tau_{nb}^{(i)}\right),$$

где $t_n^{(i)}$ – момент начала формирования i -й паузы, рассчитанный следующим образом:

$$t_n^{(i)} = \begin{cases} t_0, & i=1, \\ t_i^{(i-1)}, & i>1, \end{cases}$$

где $t_i^{(i-1)}$ – момент окончания формирования i -го импульса; $\tau_n^{(i)}$ и $\tau_{nb}^{(i)}$ – заданная длительность i -й паузы и i -го импульса соответственно; $\tau_{nb}^{(i)}$ и $\tau_{nb}^{(i)}$ – случайная составляющая длительности i -й паузы и i -го импульса соответственно.

Применение рассмотренных функций при представлении математических моделей полипараметрических процессов облегчает ввод исходных данных при автоматизации проектирования, упрощает алгоритмы проектирования, снижает их трудоемкость, позволяет синтезировать вычислительные структуры с использованием простых функциональных устройств, а в ряде случаев представляет собой единственную возможность представления математических моделей (например, математическая модель формирования вектора временной развертки).

Вторая проблема при представлении математических моделей связана с потребностью в больших объемах памяти для сохранения промежуточных результатов и исходных данных при обработке графов, соответствующих моделям процессов, заданных дискретными отсчетами временных параметров. Рассмотрим два положения, позволяющие решить эти проблемы.

Утверждение 1. Над любым количеством вершин, которые могут быть реализованы одним и тем же функциональным устройством

(ФУ) на взаимно непересекающихся интервалах времени, может быть выполнена операция элементарного гомоморфизма.

Вероятно, что условием возможности начала выполнения произвольным ФУ очередной j -й операции является окончание выполнения этим ФУ предыдущей i -й операции, или

$$t_j^k \geq t_i^k + \tau_i^k, \quad (13)$$

где t_i^k и t_j^k – моменты начала выполнения k -м ФУ i -й и j -й операций соответственно; τ_i^k – время выполнения k -м ФУ i -й операции.

Тогда некоторое количество вершин графа исходного алгоритма, каждая из которых может быть реализована одним и тем же ФУ, в соответствии с определением графа вычислительной структуры может являться прообразом одной вершины из множества вершин графа вычислительной структуры, если выполняется соотношение (13).

Утверждение 2. Граф вычислительной структуры, синтезированной на базе исходной математической модели, представленной аналитическим выражением общего вида

$$y = F_1 \left(x_1, x_2, \dots, x_n \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{j_i} \dots \dots \sum_{L=1}^{l_{i,j,\dots,l}} \sum_{m=1}^{M_{i,j,\dots,l}} F_2 \left(Z_1^{(i,j,\dots,l,m)}, Z_2^{(i,j,\dots,l,m)}, \dots, Z_k^{(i,j,\dots,l,m)}, t \right) \right), \quad (14)$$

изоморфен графу вычислительной структуры, полученному из исходной математической модели

$$y' = F_1 \left(x_1, x_2, \dots, x_n, F_2 \left(Z_1, Z_2, \dots, Z_k, t \right) \right), \quad (15)$$

где i, j, \dots, l, m – последовательные отсчеты времени; x_1, x_2, \dots, x_n – независимые от времени параметры; $Z_1^{(i,j,\dots,l,m)}, Z_2^{(i,j,\dots,l,m)}, \dots, Z_k^{(i,j,\dots,l,m)}$ – отсчеты временно зависимых параметров в дискретные моменты времени; $F_1(\cdot)$ и $F_2(\cdot)$ – аналитические выражения, связывающие параметры $\{X\}$ и $\{Z\}$.

Доказательство данного утверждения не приводится ввиду его громоздкости.

Следствие. При синтезе вычислительных структур вместо математических моделей вида (14) может быть применена математическая модель вида (15).

Третья особенность представления математических моделей для синтеза вычислительных структур связана с тем, что в ряде случаев цель использования вычислительной структуры может быть достигнута с применением бо-

лее простых и дешевых технических средств, чем вычислительная структура, реализующая обобщенную (базовую) математическую модель соответствующего процесса. Примером являются исследования, в частности испытания технических подсистем или контроль их отдельных функций, не требующих наличия данных обо всей системе, в состав которой входит данная подсистема. Решение проблемы создания технических средств для задач такого типа связано с формированием математических моделей с требуемыми свойствами.

Под задачей синтеза математических моделей вычислительных процессов с требуемыми свойствами будем понимать задачу, заключающуюся в формировании множества усеченных моделей, полученных из базовой модели вычислительного процесса путем выделения ее параметров, которые могут обеспечить требуемые свойства.

Для решения данной задачи предлагается метод, основанный на использовании характеристических логических функций (ХЛФ), связывающих булевы переменные, отождествленные с параметрами модели, и элементов логико-комбинаторного подхода. Наличие набора параметров математической модели, гарантирующих соответствие модели требуемым свойствам, дает основание получить искомую модель путем преобразования графа вычислительного алгоритма реализации базовой модели. Данные преобразования базируются на следующих положениях.

Утверждение 3. Для формирования графа алгоритма реализации математической модели $F(x)$ с требуемыми свойствами над вершинами u и v графа алгоритма реализации базовой математической модели

$$G = (V, E) : e_0 = (u, v), \quad u \leftrightarrow \text{Ввод } x,$$

$$x_u \notin X_r(N_r),$$

где $X_r(N_r)$ – множество элементов вектора параметров требуемых свойств $X_r(N_r)$, необходимо над парой вершин u и v выполнить операцию простого элементарного гомоморфизма. Доказательство данного положения приведено в [1].

Заключение. Использование предложенных автором единичных функций (8)–(12) для представления математических моделей вычислительных процессов позволяет:

– представлять единым аналитическим выражением модели, содержащие временные параметры или операции временных преобразований (задержка, сжатие, растяжение и т. д.), что упрощает процедуры синтеза вычислительных структур и средств их управления, а также позволяет экономить память для хранения исходных данных и промежуточных результатов;

– описывать аналитическими выражениями формирование управляющих сигналов в требуемые моменты времени;

– автоматизировать синтез вычислительных структур для моделей с временными параметрами и преобразованиями и блоков управления вычислительных систем реального времени;

– реализовывать операции временных преобразований на наборе известных функциональных устройств [2, 3].

Способ представления математических моделей процессов, заданных дискретными отсчетами параметров времени (утверждения 1 и 2, следствие), при автоматизации проектирования вычислительных систем позволит облегчить ввод исходных данных, упростить проектируемые вычислительные системы, уменьшить их аппаратные затраты, снизить временные затраты на синтез вычислительных структур, а также потребность в памяти и трудоемкость алгоритмов автоматизации синтеза приблизительно в N раз, где

$$N = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{J_i} \dots \sum_{l=1}^{L_{i,j,\dots}} M_{i,j,\dots,l}.$$

Метод синтеза математических моделей с требуемыми свойствами дает возможность

уменьшить стоимость и сократить сроки проектирования и изготовления вычислительных структур, создавать вычислительные устройства, отличающиеся от структур, построенных на основе базовой модели, меньшими аппаратными затратами, стоимостью, габаритами, энергопотреблением при обеспечении требуемых функциональных возможностей, на начальной стадии проектирования сделать вывод о принципиальной возможности обеспечения требуемых свойств.

Литература

1. Кобайло, А. С. Основы теории синтеза вычислительных структур реального времени / А. С. Кобайло. – Минск: БГУИР, 2001. – 236 с.

2. Устройство задержки импульсов: а. с. 1154733 СССР, МКИ³ Н 03 К 5/13 / А. С. Кобайло, С. Ф. Костюк, А. И. Кузьмич, А. Г. Якубенко. – № 3349297/18-21; заявл. 23.10.81; опубл. 28.02.83 // Афіцыйны бюл. – № 8. – 6 с.

3. Преобразователь двоичного кода во временной интервал: а. с. 1154733 СССР, МКИ³ Н 03 К 13/03 / А. С. Кобайло, А. И. Кузьмич, А. Г. Якубенко, А. И. Волошаненко. – № 10355793/18-21; заявл. 25.12.82; опубл. 15.08.83 // Афіцыйны бюл. – № 30. – 12 с.

ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

The article is devoted to a consideration of an information model of a knowledge control process. This model is an extended version of the model, which is offered by an international e-learning standard IMS. The model focuses on the computer-aided procedures of educational content designing and promotes the decision of problems of simplification of program processing of an educational content and creation of program tool of the computer tutoring system design. Special attention in this article is given to a designing of a test structure and Test Tree building. Test Tree data allows to control and organize the knowledge control process. To solve the problem of e-learning content portability the concept of portable content package (PCP) which represents a special way organized directory containing content, its components and metadata is proposed. We consider, that the account of basic provisions of IMS will promote introduction of software products of the educational appointment focused first of all on functional compatibility and portability.

Введение. Контроль знаний – одно из основных преимуществ и важная часть работы с обучаемыми в рамках автоматизированной обучающей системы (АОС) [1, 2].

Целью процесса контроля знаний является обеспечение эффективной обратной связи с обучаемым, диагностика его знаний для организации адаптивного управления обучением, оценка качества проводимого управления и обучения.

Согласно [1, 2], выделяют два основных подхода, используемых в АОС для организации контроля знаний.

Оценка действий обучаемого (функциональная диагностика) предполагает, что компьютерная (экспертная) система, располагая сведениями о предметной области и правилах оценки действий обучаемого, собирает необходимую информацию о его состоянии путем наблюдения и фиксации параметров рабочих воздействий и соответствующих реакций.

Стандартизированный контроль знаний (тестовая диагностика) позволяет определять уровень знаний обучаемого с помощью специальных тестовых заданий и анализа полученных ответов.

При разработке компьютерных тестов для обеспечения их эффективности необходимо соблюдать следующие основные требования: обеспечение открытости системы тестирования, переносимость тестов на уровне исходных текстов, учет различных типов тестовых заданий, использование различных методов оценки ответов тестируемого.

Кроме того, тесты, тестовые задания, как и любые другие учебные объекты, должны разрабатываться в соответствии с принципами модульности, интероперабельности, возможности оперативной актуализации и многократного повторного использования, совместимости, интегрируемости в различные компьютерные системы обучения и тестирования. Достижение поставленных целей предполагает учет международных стандартов, спецификаций и рекомендаций, существующих в области электронного обучения,

таких как SCORM, IMS, DCMI, LOM и др., а также применение новых информационных технологий, передового опыта в области разработки специального программного обеспечения.

Следует также отметить, что для организации эффективного управления процессом контроля знаний компьютерная система должна располагать сведениями о структуре и содержании учебного теста.

Таким образом, актуальной является проблема разработки четкой информационной модели процесса контроля знаний, которая предоставляет возможность введения в тест различных параметров, позволяющих разработчику теста реализовать свои представления об организации процесса тестирования. Значит, модель системы контроля знаний должна состоять из двух взаимосвязанных слоев. Первый слой должен обеспечить отображение на экране компьютера структуры теста и содержимого тестовых заданий, а второй (скрытый) – хранение набора параметров и их значений, используемых компьютерной системой для организации процесса контроля знаний.

Данная статья посвящена рассмотрению информационной модели системы контроля знаний, основанной на понятии дерева теста, и метода структурирования и обмена тестами (тестовыми заданиями) между различными системами тестирования, основанного на понятии переносимого пакета контента (ППК).

Основная часть. Разработка информационной модели системы контроля знаний осуществлялась с учетом основных положений спецификации IMS QTI [3].

Преимуществом такого выбора является отсутствие ограничений в спецификации с точки зрения пользовательского интерфейса, применяемых педагогических парадигм, образовательных и информационных технологий. Все это позволяет обеспечить поддержку нововведений, существующих в области педагогики, единый способ структурирования и обмена учебно-методическими (тестовыми)

материалами, их совместимость и возможность повторного использования.

В общем виде структура любого теста может быть представлена в виде дерева, которое назовем деревом теста (ДТ). Заметим, что идея построения дерева теста во многом схожа с идеей построения дерева деятельности, предложенной в [4]. Основные различия заключаются в используемых типах вершин ДТ и наборе их атрибутов.

Дерево теста представляет собой связный размеченный граф $DT = (T, L)$, где L – множество ребер; $T = (T^1, T^2)$ – множество вершин ДТ, которые в свою очередь делятся на $T^1 = \{t^1_1, \dots, t^1_n\}$ – множество вершин-секций; n – количество вершин-секций; $T^2 = \{t^2_1, \dots, t^2_m\}$ – множество вершин-пунктов; m – количество вершин-пунктов в ДТ.

Пример дерева теста показан на рис. 1. На множестве T вершин дерева теста определено отношение логической зависимости. *Отношение логической зависимости* δ в общем случае означает, что если вершины $t_1, t_2 \in T$ и $(t_1, t_2) \in \delta$, то перейти к вершине t_2 можно будет только после того, как завершена работа с вершиной t_1 (пройдено соответствующее тестовое задание).

Разделение вершин ДТ по типам обусловлено их различиями в функционировании и в наборе хранимых параметров, т. е. каждая вершина ДТ, кроме заголовка, хранит дополнительную информацию, используемую компьютерной системой при управлении процессом контроля знаний.

Особое назначение в структуре дерева теста имеет вершина-корень (t_0), которая отвечает за хранение значений глобальных переменных (параметров) теста.

Под *вершиной-секцией* будем понимать поддерево DT_K исходного дерева $DT = (T, L)$, в которое входит лишь часть вершин ДТ, образующих множество K , вместе с ребрами их соединяющими,

причем начальной точкой поддерева (корнем) DT_K является вершина с пометкой «секция». Отсюда следует, что секция характеризуется возможностью обладать сложной иерархической структурой и представляет собой узел ветвления в дереве теста. При этом вершина-секция может иметь неограниченное число потомков обоих из названных типов. Будем использовать тип вершины «секция» для изменения порядка обхода вершин ДТ, которые являются непосредственными потомками вершины-секции.

Выделим для вершин ДТ два режима обхода:

1) линейный – переход только в направлении вперед, соблюдая порядок обхода от предыдущего элемента к следующему;

2) нелинейный – произвольный порядок обхода непосредственных потомков вершины в любом из направлений; в данном случае недопустимо определение строгого порядка обхода вершин-секций.

Отметим также, что вершина-секция может быть использована, если в структуре ДТ присутствуют вершины-пункты, требующие выполнения определенных условий, и эти условия являются общими для данной совокупности вершин-пунктов.

Все условия можно разделить на предусловия и постусловия. Под *условием* будем понимать некоторое логическое выражение, проверяемое системой контроля знаний. *Предусловием* назовем условие, оцениваемое системой при входе в вершину ДТ, *постусловием* – условие, оцениваемое при выходе из вершины. При этом каждому условию может быть поставлено в соответствие некоторое «действие» – операция, выполняемая в случае положительного результата оценки соответствующего условия. Связная пара «условие – действие» представляет собой правило, определенное на ДТ.

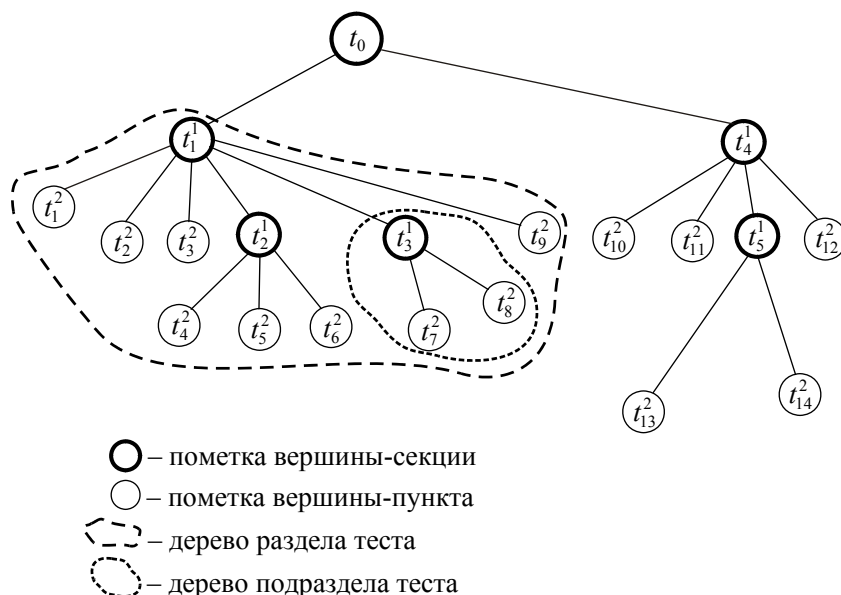


Рис. 1. Представление структуры компьютерного теста в виде дерева теста

В зависимости от количества условий можно выделить следующие типы правил: *простое* – одно условие и одно действие, *фиксирующее* – много условий и одно действие. Действия, например, могут разрешать или запрещать выполнение тестового задания, направлять тестируемого на повторное прохождение испытания и т. д. Основная идея использования условий может быть связана с анализом среднего балла успеваемости тестируемого или результата, полученного тестируемым в течение сессии (сеанса) отдельного тестового задания, секции или всего теста.

Под *вершиной-пунктом* будем понимать конечную вершину ДТ, хранящую ссылку на физический файл тестового вопроса (задания). Одной из наиболее важных характеристик вершины-пункта является ее функционирование в контексте родительского элемента.

Список общих атрибутов вершин ДТ различного типа представим с помощью кортежа:

$$\langle Id, Tit, D, Obj, Nm, C, Res, Fb \rangle, \quad (1)$$

где *Id* – уникальный идентификатор; *Tit* – заголовок вершины; *D* – время, отводимое на выполнение всех тестовых заданий вершины (включая задания, определенные для непосредственных потомков вершины); *Obj* – учебная цель; *Nm* – значение балла успеваемости, при котором тестируемому разрешено приступить к выполнению задания; *C* – условия, установленные для вершины; *Res* – результаты тестирования; *Fb* – текст обратной связи.

В общем случае [3] выделяются два типа обратной связи: *интегральная* и *модальная*, различие между которыми заключается в моменте их вызова, а также в возможности оперативного влияния на результаты тестирования. При этом не определяются возможные различия в структуре обратной связи. Так, например, для вершины-корня и вершины-секции дерева теста при организации обратной связи может формироваться итоговый отчет о результатах

тестирования. Для вершины-пункта в структуру обратной связи могут входить: информационные сообщения для случаев верного и неверного ответов, правильное решение, предъявляемое в текстовой форме, набор подсказок и соответствующая им система баллов, которая будет влиять на результаты тестирования.

Список дополнительных атрибутов вершины-корня ДТ представим следующим кортежем:

$$\langle Des, Ath, Date, RqN, Sr, Ea, S, T^1, T^2 \rangle, \quad (2)$$

где *Des* – краткое описание теста; *Ath* – автор теста; *Date* – дата создания (редактирования) теста; *RqN* – флаг запроса имени тестируемого до начала процесса тестирования; *Sr* – флаг, определяющий необходимость передачи результатов тестирования по электронной почте, используя для этого адрес, хранимый атрибутом *Ea*; *S* – порядок обхода потомков вершины; *T¹* и *T²* – соответственно секции и тестовые задания, являющиеся непосредственными потомками корня дерева теста.

Кортеж (3) описывает дополнительные атрибуты вершины-секции:

$$\langle T^2, O \rangle. \quad (3)$$

Здесь атрибут *O* позволяет устанавливать для вершины-секции признак случайного порядка предъявления вариантов ответов на текст вопроса задания (рис. 2). Использование этого признака предотвратит возможность запоминания правильного порядка ответов тестового задания в случае его повторного выполнения в контексте вершины-секции.

Совокупность дополнительных атрибутов вершины-пункта представим кортежем:

$$\langle Ac, Al, Ib, Sh \rangle, \quad (4)$$

где *Ac* – флаг контроля над количеством попыток тестирования; *Al* – максимальное количество попыток тестирования; *Ib* – тело тестового вопроса; *Sh* – флаг изменения порядка предъявления вариантов ответов.

$$Z:T^2 \longrightarrow \{0, 1\}$$

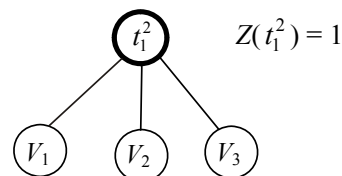
$$t_1^2 \in T^2$$

$$Z(t_1^2) = \begin{cases} 0 & \text{– порядок по умолчанию} \\ 1 & \text{– случайный порядок} \end{cases}$$

V – множество вариантов ответа тестового задания *t₁²*

N = |*V*| – количество элементов множества *V*

N! – количество комбинаций элементов множества *V*



Список всех возможных неповторяющихся комбинаций вариантов ответов:

$$N = 3$$

$$N! = 6$$

$$V_1 - V_2 - V_3$$

$$V_1 - V_3 - V_2$$

$$V_2 - V_1 - V_3$$

$$V_2 - V_3 - V_1$$

$$V_3 - V_1 - V_2$$

$$V_3 - V_2 - V_1$$

Рис. 2. Использование признака случайного порядка предъявления вариантов ответов

Отметим, что в зависимости от типа тестового задания список атрибутов, определяющих тело вершины-пункта, может сильно отличаться. Однако постоянными составляющими будут являться заголовок, текст задания, инструкции по его выполнению.

Также сделаем акцент на том, что основной идеей оценки ответов на тестовые задания, согласно предлагаемой модели, является возможность применения различных методов оценки. Целесообразность использования того или иного метода может быть оценена разработчиком теста, а не жестко определяться системой тестирования.

После того, как структура и содержимое учебного теста определены, может быть сформирован переносимый пакет контента [5].

Переносимый пакет контента – пакет, который состоит из совокупности тестовых заданий и их метаданных, включает манифест-файл старшего уровня и совокупность физических файлов, идентифицированных в манифесте. ППК может содержать вложенные директории. *Файл-манифест* – это XML-документ, непосредственно описывающий учебный тест. Переносимый пакет контента представляет собой единый способ структурирования и обмена учебными и учебно-методическими материалами.

Решение задачи совместимости, интегрируемости и переносимости учебных и учебно-методических материалов также обеспечивает метод их создания и использования, отличительной особенностью которого является разделение операций над контентом на независимые составляющие: создание, представление (визуализация) и определение правил функционирования.

Немаловажное значение также имеет использование средств новых информационных технологий, применяемых в области электронного обучения. В настоящее время все большее распространение получают так называемые «X-технологии»: XML, XSL, XSLT, XPath, XSL Formatting Object (XSL FO), XHTML, RDF, XML Schema, XLink, XPointer, XInclude, MathML, CML и др. Использование перечис-

ленных технологий предоставляет возможность разработчику тестов осуществлять их оперативную актуализацию, создает предпосылки для сокращения времени управления разработками и увеличения количества работ, результаты которых можно применять повторно.

Заключение. В статье рассмотрены основные аспекты создания компьютерной системы тестирования, сформулированы требования, предъявляемые к подобному классу систем. Особое внимание уделено вопросам совместимости и интегрируемости компьютерных тестов и тестовых заданий. Более подробно исследована информационная модель системы контроля знаний, основанная на понятии дерева теста, включающая средства для визуализации структуры и содержимого тестов, гибкого управления процессом контроля знаний с помощью средств вычислительной техники.

Литература

1. Савельев, А. Я. Подготовка информации для автоматизированных обучающих систем: метод. пособие для преподавателей и студентов вузов / А. Я. Савельев, В. А. Новиков, Ю. И. Лобанов. – М.: Высшая школа, 1986. – С. 176.

2. Карпова, И. П. Исследование и разработка подсистемы контроля знаний в распределенных автоматизированных обучающих системах: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.13 / И. П. Карпова. – М., 2002. – 200 л.

3. IMS Question and Test Interoperability Assessment Test, Section, and Item Information Model: Public Draft (revision 2) Specification / IMS Global Learning Consortium [Electronic resource]. – Version 2.1. – 8 June 2006. – Mode of access: <http://www.imsglobal.org>.

4. Кабак, Е. В. Информационная модель организации учебного контента системы автоматизированного создания и модификации компьютерных средств обучения / Е. В. Кабак // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2008. – Вып. XVI. – С. 141–144.

5. SCORM Content Aggregation Model, Version 1.3.1 [Electronic resource]. – 22 July 2004. – Mode of access: <http://www.adlnet.org>.

МАЖОРИТАРНОЕ ДЕКОДИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИТЕРАТИВНЫХ КОДОВ С ОБЪЕДИНЕННЫМИ ДИАГОНАЛЬНЫМИ ПРОВЕРКАМИ

The article are considered the results of the decoding new types of iterative codes: line two-dimensional iterative codes with double incorporated diagonal checks. The necessary of using for majority decoding four line-independent checks is proved. Also error corrections up to 2 multiplicity by using majority decoder is analyzed.

Введение. Наблюдаемое в последние годы резкое увеличение информационных потоков и ужесточение требований к целостности передаваемой и обрабатываемой информации обострили проблему надежного хранения и передачи двоичной информации. Один из способов решения такой проблемы заключается в использовании помехоустойчивого кодирования данных с помощью избыточных кодов.

Основная часть. Двумерные итеративные коды, широко применяемые на практике и более известные как HV-коды, являются простейшим примером использования методов комбинирования известных кодов для построения новых и представляют собой прямое произведение кодов простой проверки на четность. Поступательное развитие в данном направлении избыточного кодирования привело к появлению двумерных линейных итеративных кодов с объединенными диагональными проверками [1, 2], которые характеризуются минимальным кодовым расстоянием, равным 6, следовательно, могут исправлять все одиночные и двойные ошибки.

Принцип формирования проверочных символов и порождающая матрица для такого кода при $k = 16$ бит представлены на рис. 1 и 2 соответственно [3–5].

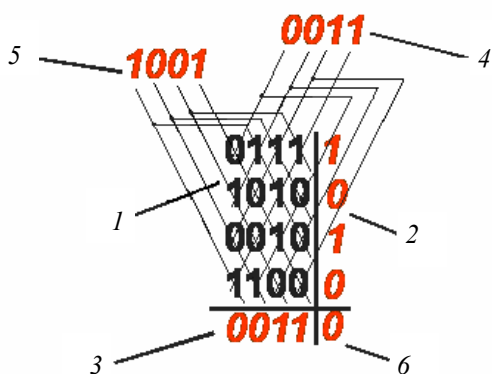


Рис. 1. Принцип формирования проверочных бит:

- 1 – информационные биты;
- 2 – горизонтальные паритеты;
- 3 – вертикальные паритеты;
- 4, 5 – первые и вторые объединенные диагональные паритеты соответственно;
- 6 – контрольная сумма

$$H = [P | I] = \begin{bmatrix} 11110000000000 & 1000000000000000 \\ 0000111100000000 & 0100000000000000 \\ 0000000011110000 & 0010000000000000 \\ 0000000000001111 & 0001000000000000 \\ 1000100010001000 & 0000100000000000 \\ 0100010001000100 & 0000010000000000 \\ 0010001000100010 & 0000001000000000 \\ 0001000100010001 & 0000000100000000 \\ 1000000100100100 & 0000000010000000 \\ 0100100000010010 & 0000000001000000 \\ 0010010010000001 & 0000000000100000 \\ 0001001001001000 & 0000000000010000 \\ 0100001000011000 & 0000000000001000 \\ 0010000110000100 & 0000000000000100 \\ 0001100001000010 & 0000000000000010 \\ 1000010000100001 & 0000000000000001 \\ 1111111111111111 & 1111111111111111 \end{bmatrix}$$

Рис. 2. Проверочная матрица двумерного линейного итеративного кода с объединенными диагональными проверками

Таким образом, согласно порождающей матрице, проверочные символы R_{1-17} могут быть рассчитаны по следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} R_1 &= X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4, \\ R_2 &= X_5 \oplus X_6 \oplus X_7 \oplus X_8, \\ &\vdots \\ R_5 &= X_1 \oplus X_5 \oplus X_9 \oplus X_{13}, \\ &\vdots \\ R_{14} &= X_3 \oplus X_8 \oplus X_9 \oplus X_{14}, \\ &\vdots \\ R_{16} &= X_1 \oplus X_6 \oplus X_{11} \oplus X_{16}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ключевую роль в использовании избыточных кодов играет процесс декодирования. Одним из самых быстродействующих является мажоритарное декодирование – декодирование по принципу «большинства». Проанализируем целесообразность использования таких декодеров для приведенного выше кода с точки зрения возможности исправления ошибок различной кратности.

В двумерных итеративных кодах (рис. 1) с двойными диагональными проверками правильность каждого бита информационного слова l контролируется пятью проверочными символами: горизонтальным паритетом 2, вертикальным 3, первым объединенным диагональным 4, вторым объединенным диагональным 5 и контрольной суммой 6. Необходимо отметить, что контрольная сумма является линейно зависимой проверкой (может быть получена суммированием по модулю два всех проверок одного типа, например горизонтальных) и, следовательно, ее при мажоритарном декодировании использовать нельзя.

Обычно при мажоритарном декодировании применяется нечетное количество проверок. Анализ показал, что если бы для декодирования использовались три любых паритета (например, горизонтальные, вертикальные и первые диагональные), то лишь одиночные ошибки могли бы быть исправлены. Появление любых двойных ошибок приводило бы к необратимому искажению информации. Поэтому далее рассмотрим пример мажоритарного декодирования с применением всех четырех паритетов.

Пусть закодированы 16 бит ($k = 16$) информации $X = 0111\ 1010\ 0010\ 1100$, другими словами, согласно порождающей матрице (рис. 2), формируются проверочные символы:

$$\begin{aligned} R_{1-4} &= 1010, \\ R_{5-8} &= 0011, \\ R_{9-12} &= 0011, \\ R_{13-16} &= 1001. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть при хранении (или передаче) во 2-м и 4-м битах информационной последовательности X возникла ошибка (инверсия бита). Тогда $X' = 0010\ 1010\ 0010\ 1100$, а новые проверочные символы будут равны:

$$\begin{aligned} R_{1-4} &= 1010, \\ R_{5-8} &= 0110, \\ R_{9-12} &= 0110, \\ R_{13-16} &= 0011. \end{aligned} \quad (3)$$

При мажоритарном декодировании каждый информационный бит декодируется (проверяется) отдельно. Например, при проверке 8-го информационного бита будут сравниваться R_2 и R'_2 , R_8 и R'_8 , R_9 и R'_9 , R_{14} и R'_{14} . Иными словами, будут выполнены следующие операции суммирования по модулю два (результат суммирования, равный 1, свидетельствует о том, что ошибка произошла в данном бите, 0 – ошибки нет):

$$\begin{aligned} R_2 \oplus R'_2 &= 0 \oplus 0 = 0, \\ R_8 \oplus R'_8 &= 1 \oplus 0 = 1, \\ R_9 \oplus R'_9 &= 0 \oplus 0 = 0, \\ R_{14} \oplus R'_{14} &= 0 \oplus 0 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

По результатам суммирования, согласно мажоритарному принципу, делается вывод, что ошибки в данном информационном бите нет. При проверке 2-го и 4-го информационных битов в результате выполнения аналогичных операций сравнения получим:

– для 2-го бита:

$$\begin{aligned} R_1 \oplus R'_1 &= 1 \oplus 1 = 0, \\ R_6 \oplus R'_6 &= 0 \oplus 1 = 1, \\ R_{10} \oplus R'_{10} &= 0 \oplus 1 = 1, \\ R_{13} \oplus R'_{13} &= 1 \oplus 0 = 1; \end{aligned} \quad (5)$$

– для 4-го бита:

$$\begin{aligned} R_1 \oplus R'_1 &= 1 \oplus 1 = 0, \\ R_8 \oplus R'_8 &= 1 \oplus 0 = 1, \\ R_{12} \oplus R'_{12} &= 1 \oplus 0 = 1, \\ R_{15} \oplus R'_{15} &= 0 \oplus 1 = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, при считывании информации данные биты необходимо инвертировать (три паритета из четырех (большинство) показали о наличии ошибок). Аналогичные операции осуществляются для всех считываемых информационных битов.

Отметим, что при использовании всех четырех паритетов (горизонтальные, вертикальные, первые и вторые объединенные диагональные) возможно появление «мажоритарного равенства» (при декодировании бита два проверочных символа показывают на наличие ошибки, два других – нет) – в таком случае должен делаться вывод об отсутствии ошибки.

Очевидно, возможны ситуации, когда двойная ошибка не будет исправлена либо другие биты при декодировании будут приняты за ошибочные. Первая ситуация может быть следствием комбинации двух одиночных ошибок в 5-м и 15-м информационных битах (при декодировании данных битов будет наблюдаться «мажоритарное равенство»). Иначе говоря, в соответствии с кодовой последовательностью (информационные и проверочные биты), представленной на рис. 1, получим $X' = 0111\ 0010\ 0010\ 1110$. При декодировании 5-го бита будем иметь:

$$\begin{aligned} R_2 \oplus R'_2 &= 0 \oplus 1 = 1, \\ R_5 \oplus R'_5 &= 0 \oplus 1 = 1, \\ R_{10} \oplus R'_{10} &= 0 \oplus 0 = 0, \\ R_{15} \oplus R'_{15} &= 0 \oplus 0 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В этой ситуации, как говорилось выше, принимается решение об отсутствии ошибки в данном бите.

Вторая же ситуация наблюдается при возникновении ошибок в 1-м и 3-м битах. В этом случае информационная последовательность примет вид $X' = 1101\ 1010\ 0010\ 1100$. При де-

кодировании 1-й и 3-й биты будут инвертированы (ошибки в них будут исправлены):

– для 1-го бита:

$$\begin{aligned} R_1 \oplus R'_1 &= 1 \oplus 1 = 0, \\ R_5 \oplus R'_5 &= 0 \oplus 1 = 1, \\ R_9 \oplus R'_9 &= 0 \oplus 1 = 1, \\ R_{16} \oplus R'_{16} &= 1 \oplus 0 = 1, \end{aligned} \quad (8)$$

– для 3-го бита:

$$\begin{aligned} R_1 \oplus R'_1 &= 1 \oplus 1 = 0, \\ R_7 \oplus R'_7 &= 1 \oplus 0 = 1, \\ R_{11} \oplus R'_{11} &= 1 \oplus 0 = 1, \\ R_{14} \oplus R'_{14} &= 0 \oplus 1 = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Но при декодировании, например, 9-го бита, в котором ошибки не было, получим:

$$\begin{aligned} R_3 \oplus R'_3 &= 1 \oplus 1 = 0, \\ R_5 \oplus R'_5 &= 0 \oplus 1 = 1, \\ R_{11} \oplus R'_{11} &= 1 \oplus 0 = 1, \\ R_{14} \oplus R'_{14} &= 0 \oplus 1 = 1, \end{aligned} \quad (10)$$

т. е. принимается решение, что данный бит необходимо инвертировать.

Аналогичным образом будет принято решение о необходимости инвертирования 11-го бита:

$$\begin{aligned} R_3 \oplus R'_3 &= 1 \oplus 1 = 0, \\ R_7 \oplus R'_7 &= 1 \oplus 0 = 1, \\ R_9 \oplus R'_9 &= 0 \oplus 1 = 1, \\ R_{16} \oplus R'_{16} &= 1 \oplus 0 = 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Анализ процесса мажоритарного декодирования двумерного линейного итеративного кода с объединенными диагональными проверками показал, что все одиночные и большая часть двойных ошибок могут быть исправлены. Так, при длине информационного слова $k = 64$ бит приблизительно 76% ошибок кратностью два будут исправлены.

Заключение. Таким образом, для мажоритарного декодирования двумерного линейного итеративного кода с двойными диагональными проверками целесообразно использовать все четыре типа линейно независимых паритетов (контрольная сумма исключается). При этом все одиночные и большая часть двойных ошибок могут быть нейтрализованы. Также можно отметить, что с ростом длины информационной последовательности доля исправляемых ошибок будет увеличиваться.

Литература

1. Шиман, Д. В. Свойства и параметры линейных итеративных кодов с двойными диагональными проверками / Д. В. Шиман, Д. М. Романенко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2007. – Вып. XV. – С. 151–154.
2. Multilevel turbocoding schemes on the basis of twodimensional linear iterative codes with diagonal checks / D. V. Shiman [et al.] // Przegląd elektrotechniczny. – 2008. – № 3. – P. 152–154.
3. Шиман, Д. В. Двумерный линейный итеративный код с объединенными диагональными проверками / Д. В. Шиман, Д. М. Романенко // Информационные технологии управления в экономике – 2007: Респ. науч.-практ. конф., Брест, 24–25 апр. 2007 г. / БрГУ им. А. С. Пушкина. – Брест, 2007. – С. 81–84.
4. Multilevel turbocoding schemes on the basis of twodimensional linear iterative codes with diagonal checks / D. V. Shiman [et al.] // News electrical and electronic technologies and their industrial implementation: V International Conference NEET'2007. – Zakopane, Poland, 2007. – P. 97.
5. Шиман, Д. В. Метод преобразования цифровой информации на основе псевдослучайного перемежения и линейного итеративного кодирования с объединенными диагональными проверками / Д. В. Шиман, Д. М. Романенко // Информационные системы и технологии (IST'2008): IV Междунар. конф., Минск, 4–6 нояб. 2008 г. / БГУ. – Минск, 2008. – С. 95–100.

А. А. Дятко, доцент; С. М. Костромицкий, профессор (КБ «Радар»);
П. Н. Шумский, доцент (КБ «Радар»)

АЛГОРИТМЫ ПРИВЕДЕНИЯ ОТМЕТОК ОБЪЕКТОВ РАДИОЛОКАЦИОННОГО НАБЛЮДЕНИЯ К ЕДИНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

In article algorithms of transformation of coordinates of objects of the radar-tracking supervision received in systems of coordinates local RLS, in system of coordinates of the uniform centre of processing of the information on air conditions are considered. The developed algorithms can be used at designing of the automated systems of processing of the radar-tracking information. The presented algorithms are realised in the form of a package of the applied programs, realising above described matrix transformations, for application at a stage by tertiary processing of the information in systems of radar-tracking supervision over air conditions.

Введение. На этапе первичной и вторичной обработки радиолокационной информации осуществляется ее обработка только от одной радиолокационной станции (РЛС). Для радиолокационного контроля воздушной обстановки над большой территорией необходимо иметь информацию о воздушных объектах в пределах достаточно большого пространства, что не может быть обеспечено одной РЛС. Получение информации возможно только путем создания единого радиолокационного поля с помощью нескольких РЛС. Поэтому возникает задача обработки радиолокационной информации, полученной от нескольких РЛС, с целью формирования общей картины воздушной обстановки. Обработка радиолокационной информации, поступающей от нескольких РЛС, называется третичной обработкой информации [1, 2].

Для выполнения своих задач РЛС располагаются на местности в определенном порядке. Зоны видимости РЛС образуют радиолокационное поле. При этом РЛС могут быть расставлены так, что их зоны видимости будут перекрываться полностью, частично или не перекрываться совсем. Радиолокационные поля с перекрытием зон видимостей обеспечивают лучшие условия для наблюдения за воздушными объектами, однако требуют большего количества радиолокационных средств. При этом сведения об одном и том же объекте могут поступать одновременно от нескольких станций. В идеальном случае такие отметки целей должны накладываться одна на другую. Однако практически совпадения не наблюдаются из-за систематических и случайных ошибок в измерении координат объектов, различного времени локации, а также из-за ошибок, возникающих при учете параллакса между точками стояния РЛС и пунктом третичной обработки при приведении координат целей к единой системе. Последнее является обязательным условием третичной обработки, так как все РЛС определяют координаты целей в своих системах координат, что не позволяет производить объединение информации. В общем случае несовпадение отметок траектории может быть или по причи-

не ошибок измерения координат объектов и различного времени локации, или же потому, что имеется несколько объектов, создающих эти отметки и траектории. Раскрытие этой неопределенности, т. е. решение вопроса, сколько объектов находится в действительности в контролируемой зоне, является главным вопросом третичной обработки.

Для решения задач третичной обработки информации необходим определенный набор сведений, которые предоставляются отдельными РЛС, формирующими радиолокационное поле (локальными РЛС), в распоряжение некоторой системы обработки информации (СОИ), место расположения которой в общем случае имеет географические координаты, отличные от географических координат локальных РЛС. Система обработки информации предназначена для решения вышеупомянутых задач третичной обработки и представления необходимых данных конечному потребителю.

В данной статье рассматривается алгоритм приведения отметок объектов, полученных от различных РЛС наблюдения, к единой системе координат центра обработки информации о воздушной обстановке.

Основная часть. Будем полагать, что для каждой из РЛС, формирующей радиолокационное поле, известны ее географические координаты (широта и долгота), а также географические координаты точки расположения системы обработки информации.

Примем в качестве единой системы координат декартову систему, связанную с местоположением центра обработки информации, и получим выражения для вычисления координат воздушного объекта в ней по данным локальных РЛС. При этом для определения точек расположения локальных РЛС и пункта СОИ будем использовать их геодезические координаты, что позволит учесть кривизну земной поверхности.

Для решения поставленной задачи введем на поверхности Земли две правые декартовы системы координат $X^1Y^1Z^1$ и $X^2Y^2Z^2$ (рис. 1), начала которых имеют географические координаты

наты (широта, долгота) соответственно $(\varphi_1, \varepsilon_1)$ и $(\varphi_2, \varepsilon_2)$. Оси X^1, Y^1 (X^2, Y^2) лежат в плоскостях, касательных к земной поверхности в точках расположения начала координат. Оси Y^1 и Y^2 ориентированы вдоль соответствующих меридианов на север. Оси Z^1 и Z^2 перпендикулярны к соответствующим касательным плоскостям.

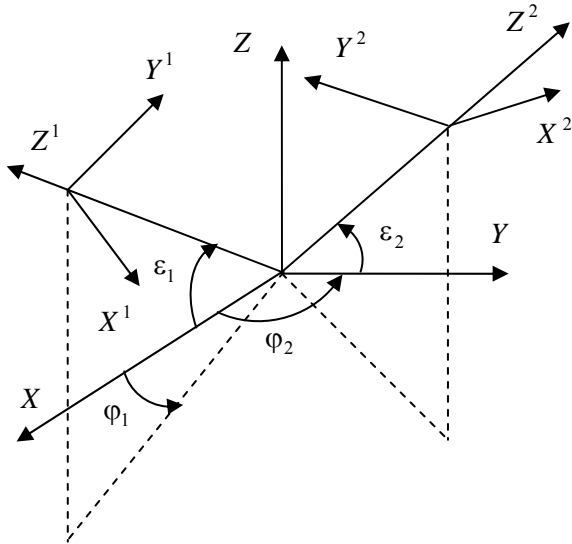


Рис. 1

Введем также декартову систему координат XYZ с началом в центре Земли, как показано на рис. 1, где ось X лежит в плоскости нулевого меридиана, а ось Z указывает на северный полюс.

Свяжем систему координат $X^1Y^1Z^1$ с местом расположения некоторой локальной РЛС, а $X^2Y^2Z^2$ – с точкой, где располагается система обработки информации.

Пусть (x_1, y_1, z_1) – координаты объекта в системе $X^1Y^1Z^1$, а (x_2, y_2, z_2) – координаты того же объекта в системе $X^2Y^2Z^2$. Операция приведения отметок цели к единой системе координат требует пересчета координат цели из одной системы в другую. Для этой цели удобным является подход, когда объект представляется вектором в четырехмерном пространстве с равной единице четвертой координатой [3]. Такая методика будет использована ниже при выводе соответствующих выражений для преобразования координат.

Пусть

$$V_1 = (x_1, y_1, z_1, 1)^T \quad (1)$$

вектор координат объекта в системе $X^1Y^1Z^1$, а

$$V_2 = (x_2, y_2, z_2, 1)^T \quad (2)$$

вектор координат того же объекта в системе $X^2Y^2Z^2$.

Задача заключается в отыскании такого оператора $P = P(\varphi_1, \varepsilon_1, \varphi_2, \varepsilon_2, R)$, что $V_2 = PV_1$, здесь R – эквивалентный радиус Земли.

Очевидно, что оператор P должен представлять собой матрицу, элементы которой зависят от географических координат систем $X^1Y^1Z^1, X^2Y^2Z^2$ и радиуса Земли.

Рассмотрим методику получения матрицы P .

1. Сместим систему координат $X^1Y^1Z^1$ на $\Delta x = 0, \Delta y = 0$ и $\Delta z = -R$ относительно исходного положения (рис. 2).

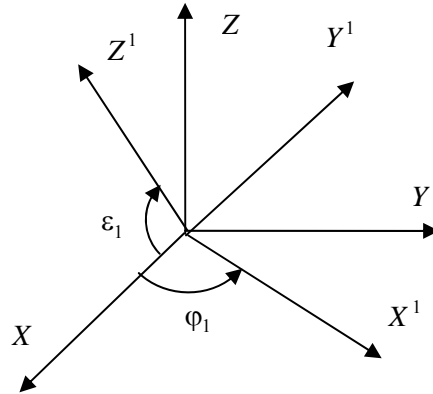


Рис. 2

Вектор координат (1) преобразуется к виду

$$W_1 = T^1 V_1, \quad (3)$$

где матрица преобразования координат T^1 имеет следующий вид [3]:

$$T^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\Delta x \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta y \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

2. Совместим оси Z^1 и Z .

Для этой цели повернем систему координат $X^1Y^1Z^1$ вокруг оси X^1 по часовой стрелке (в отрицательном направлении) на угол $\varphi = -\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1\right)$ (рис. 3).

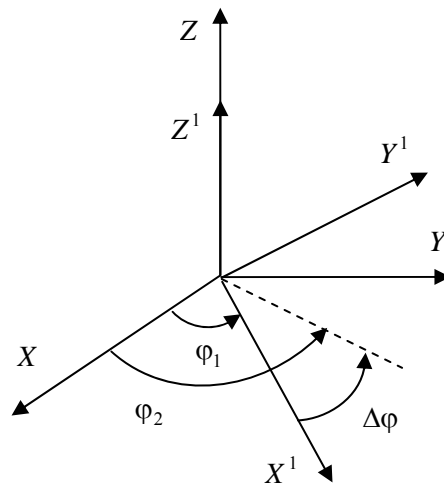


Рис. 3

Вектор координат (3) преобразуется к виду

$$W_2 = R_{X^1}^1 W_1 = R_{X^1}^1 T^1 V_1, \quad (5)$$

где матрица преобразования координат $R_{X^1}^1$ имеет следующий вид [3]:

$$R_{X^1}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \left[-\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1 \right) \right] & \sin \left[-\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1 \right) \right] & 0 \\ 0 & -\sin \left[-\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1 \right) \right] & \cos \left[-\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1 \right) \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

3. Совместим долготу φ_1 и φ_2 .

Для этого повернем систему координат $X^1 Y^1 Z^1$ вокруг оси Z^1 на угол $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ (рис. 4).

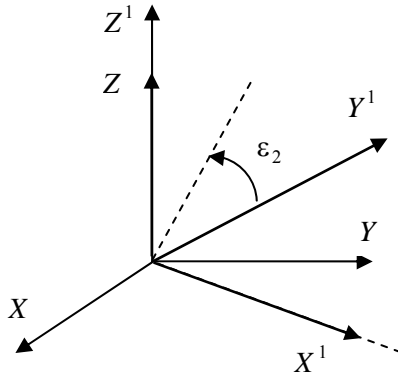


Рис. 4

Вектор координат (5) преобразуется к виду

$$W_3 = R_{Z^1} W_2 = R_{Z^1} R_{X^1}^1 T^1 V_1, \quad (7)$$

где матрица преобразования координат R_{Z^1} имеет следующий вид [3]:

$$R_{Z^1} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\varphi & \sin \Delta\varphi & 0 & 0 \\ -\sin \Delta\varphi & \cos \Delta\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi_2 - \varphi_1) & \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

4. Совместим широту ε_1 и ε_2 .

Для этого повернем систему координат $X^1 Y^1 Z^1$ вокруг оси X^1 на угол $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_2$ (рис. 5).

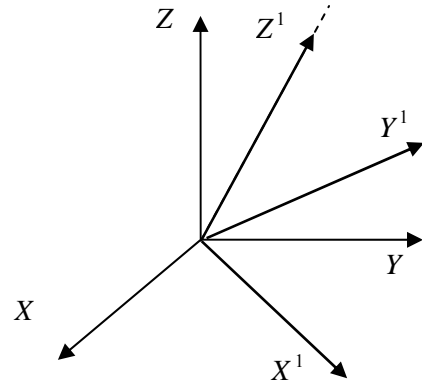


Рис. 5

Вектор координат (7) преобразуется к виду

$$W_4 = R_{X^1}^2 W_3 = R_{X^1}^2 R_{Z^1} R_{X^1}^1 T^1 V_1, \quad (9)$$

где матрица преобразования координат $R_{X^1}^2$ имеет следующий вид [3]:

$$R_{X^1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_2 \right) & \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_2 \right) & 0 \\ 0 & -\sin \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_2 \right) & \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

5. Совместим системы координат $X^1 Y^1 Z^1$ и $X^2 Y^2 Z^2$.

Для этой цели сместим систему координат $X^1 Y^1 Z^1$ на $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ и $\Delta z = R$ относительно текущего положения (рис. 6).

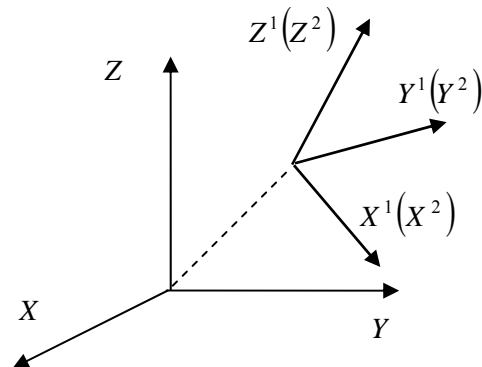


Рис. 6

Вектор координат (9) преобразуется к виду

$$V_2 = T^2 W_4 = T^2 R_{X^1}^2 R_{Z^1} R_{X^1}^1 T^1 V_1 = P V_1, \quad (11)$$

где матрица преобразования координат T^2 имеет следующий вид [3]:

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\Delta x \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta y \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Из (11) следует, что искомая матрица

$$P = T^2 R_{X^1}^2 R_{Z^1} R_{X^1}^1 T^1. \quad (13)$$

Поскольку оператор P найден, то можно пересчитать из системы координат $X^1 Y^1 Z^1$ в $X^2 Y^2 Z^2$ и вектор скорости наблюдаемого объекта.

Пусть

$$V_1^v = (v_x^1, v_y^1, v_z^1, 1)^T - \quad (14)$$

вектор скорости некоторого объекта в системе координат $X^1 Y^1 Z^1$, а

$$V_2^v = (v_x^2, v_y^2, v_z^2, 1)^T - \quad (15)$$

вектор скорости этого же объекта в системе координат $X^2 Y^2 Z^2$. При этом полагаем, что начало вектора скорости (14) находится в начале системы координат $X^1 Y^1 Z^1$, т. е. имеет координаты

$$V_{10}^v = (0, 0, 0, 1)^T, \quad (16)$$

а начало вектора скорости (15) находится в начале системы координат $X^2 Y^2 Z^2$, т. е. имеет координаты

$$V_{20}^v = (0, 0, 0, 1)^T. \quad (17)$$

Тогда преобразование координат вектора (14) из системы координат $X^1 Y^1 Z^1$ в $X^2 Y^2 Z^2$ выполняется в соответствии с соотношением

$$V_2^v = P V_1^v - P V_{10}^v = P(V_1^v - V_{10}^v). \quad (18)$$

Заключение. В работе получены алгоритмы преобразования координат объектов радиолокационного наблюдения, полученных в системах координат локальных РЛС, в систему координат единого центра обработки информации о воздушной обстановке. Разработанные алгоритмы могут быть использованы при проектировании автоматизированных систем обработки радиолокационной информации.

Авторами разработан пакет прикладных программ, реализующий вышеописанные алгоритмы, для применения на этапе третичной обработки информации в системах радиолокационного наблюдения за воздушной обстановкой.

Литература

1. Крылович, А. П. Теория обработки радиолокационной информации в АСУ: учеб. пособие / А. П. Крылович, А. П. Янцев. – Минск: МВИЗРУ ПВО, 1974. – 216 с.

2. Сколник, М. Справочник по радиолокации: в 3 т. / М. Сколник; пер. с англ.; под ред. К. Н. Трофимова. – М.: Сов. радио, 1976. – Т. 1. – 456 с.

3. Порев В. Н. Компьютерная графика / В. Н. Порев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 428 с.

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Modern information system is an element global information space, in which she interacts with the other system. The most important state problems costing is a building of the system of the rules of the interaction of the information systems in common information space. The complex of rules and systems providing central to information safety infrastructure is identified in country to national information safety. The article is dedicated to analysis of the infrastructure to national information safety of the Republic Belarus. It is considered legislative and normative base to information safety, principles of management, government regulation and licensing, administrative and criminal responsibility in sphere of protection to information. They are analyzed main standards to information safety of the Republic Belarus and is fixed their relationship with international standard. Infrastructure to national information safety formulates new requirements for information systems and requires new methodology of the building of the modern information systems.

Введение. Глубина и размах технологических и социальных последствий компьютеризации и информатизации различных сфер общественной жизни дали основание говорить об информационной революции. Западная общественно-политическая мысль выдвинула концепцию «информационного общества», основное назначение которой является объяснение явлений, порожденных этим этапом научно-технического прогресса. В условиях информационного общества *практически любая автоматизированная система (АС) становится элементом глобального информационного пространства.*

Отражением этих общих тенденций является действующая с 2003 г. в Республике Беларусь государственная программа поэтапного перехода к информационному обществу «Электронная Беларусь», которая предполагает создание в нашей стране единой инфраструктуры с широким использованием информационных технологий в государственном управлении, народном хозяйстве, образовании, медицине, торговле и других сторонах жизни общества. В настоящий момент программа состоит из девяти направлений и включает порядка 100 проектов.

Обратной стороной информатизации общества является проблема защиты информации. Утечка, искажение или разрушение информации может негативно отразиться на деятельности государственных органов управления, предприятий и организаций, нарушить права физических лиц и т. п. В условиях информационного общества одной из основных задач, стоящих перед государством, является построение инфраструктуры национальной информационной безопасности.

Инфраструктура национальной информационной безопасности. Инфраструктура национальной информационной безопасности (ИНИБ) представляет собой комплекс взаимосвязанных обслуживающих систем различ-

ной природы (организационных, правовых, информационных и т. п.), обеспечивающих основу для решения задачи информационной безопасности (ИБ) в масштабах страны. ИНИБ является составной частью общей системы национальной безопасности государства. На рисунке представлена обобщенная схема ИНИБ, исторически сложившаяся в большинстве развитых стран. Здесь изображены основные элементы ИНИБ (замкнутые фигуры различной геометрии) и подписанные стрелки, указывающие тип взаимоотношений между парами элементов.

Основой любой ИНИБ является законодательная и нормативно-правовая база обеспечения информационной безопасности (ЗБИБ), выражающая государственную политику в этой сфере. Государство исходит из того, что информационные ресурсы являются объектами собственности, участвующими в хозяйственном обороте. Законы и правовые акты ЗБИБ наделяют определенные органы государственной власти полномочиями осуществлять государственное регулирование, контроль (мониторинг) и управление в сфере информационной защиты, а также определяют взаимоотношение субъектов информационной деятельности. Технические нормативные акты представляют собой стандарты и технические регламенты, которые могут (или обязаны) использовать субъекты информационной деятельности. Ответственность субъектов информационной деятельности за нарушение законов в сфере информационной безопасности определяется Уголовным и Административным кодексами.

Условно субъекты в сфере информационной безопасности можно разбить на три группы: государственные учреждения, осуществляющие государственное регулирование в этой сфере (группа Г); разработчики технических средств защиты информации (группа Р) и пользователи (группа П). Очевидно, что все эти группы пересекаются.

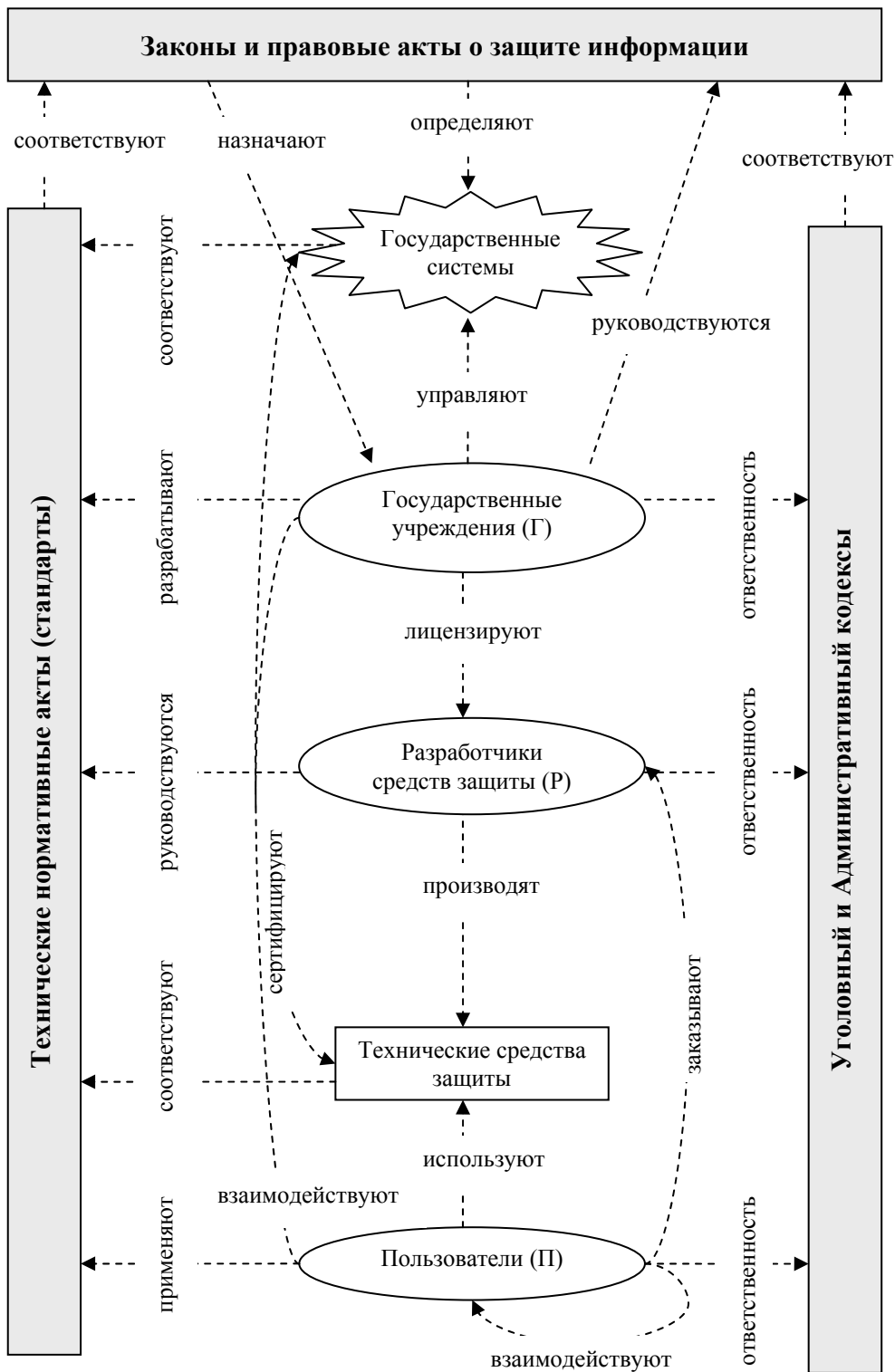


Рисунок. Инфраструктура информационной безопасности

Полномочия и деятельность субъектов группы Г определены законом или специальными положениями. Группа Г координирует и лицензирует всю деятельность по технической защите информации, разрабатывает (или участвует в подготовке) нормативные правовые акты, осуществляет экспертизу (сертификацию) технических средств информационной безопасности. Кроме того, субъекты этой группы управляют государственными информацион-

ными системами, связанными с информационной безопасностью (например, удостоверяющие и регистрационные центры).

Основной деятельностью субъектов группы Р является разработка технических средств защиты информации. Свою деятельность они осуществляют на основе лицензии, а все созданные ими средства защиты должны пройти сертификацию, прежде чем они будут применяться пользователями. Сертификация – это

процедура подтверждения соответствия продукции определенным техническим нормативным документам (стандартам).

Пользователи информационных систем (группа П) представляют самую многочисленную группу субъектов в сфере информационной безопасности. Субъекты этой группы применяют средства технической защиты информации для защиты собственных информационных ресурсов и взаимодействуют с системами защиты других субъектов. В своей деятельности они могут использовать государственные автоматизированные системы, обеспечивающие сервисные услуги в области технической защиты информации.

Исторически первой ИНИБ сложилась в США. Первый закон о защите информации датируется 1906 г., а на сегодняшний день ЗБИБ США насчитывает их более 500 [3].

Появление глобальных информационных систем привело к необходимости выработки единого подхода к проблемам информационной безопасности на международном уровне. Первым важным шагом, сделанным в этом направлении, стала разработка международных стандартов по информационной безопасности.

По понятным причинам за основу для международных стандартов по информационной безопасности были взяты стандарты, разработанные стандартизирующими организациями ведущих индустриальных стран (прежде всего США и Великобритании). Нормативная документация национальной ЗБИБ, как правило,

является гармонизированными международными стандартами.

Международные стандарты по информационной безопасности. Основой для большинства международных стандартов информационной безопасности (таблица) служат нормативные документы, разработанные национальными стандартизирующими организациями ведущих индустриальных стран, профессиональными техническими организациями, международными консорциумами или ведущими в области информационных технологий компаниями.

Исторически первым (1983 г.) стандартом, сформулировавшим критерии безопасности и получившим широкое распространение, стал стандарт Министерства обороны и Национального комитета компьютерной безопасности США «Критерии оценки доверенных компьютерных систем» (Trusted Computer System Evaluation, TCSEC), чаще всего называемый по цвету обложки «Оранжевой книгой». Стандарт определяет четыре «уровня доверия» к компьютерным системам: D, C, B, A (перечислены в порядке усиления требований). Уровни C и B подразделяются на классы: C1, C2 и B1, B2, B3. Европейской переработкой этого стандарта является документ «Гармонизированные критерии европейских стран» (Information Technology Security Evaluation Criteria, ITSEC), опубликованный в 1991 г. от имени соответствующих органов четырех стран: Франции, Германии, Нидерландов и Великобритании.

Таблица

Основные международные стандарты информационной безопасности

Группы стандартов	ISO/IEC	СТБ
Терминология, общие понятия	2383-8; 10164-7; 10164-8; 10181-1; 10181-2; 10181-3; 10181-4; 10181-5; 10181-6; 10181-7; 10745; 24767-1; 15443-1; 15443-2; 15443-3; 9798-1; 15292; 15816; 18014-1; 18014-2; 18014-3	34.101.27; 34.101.30
Требования безопасности, критерии и методологии оценки, методики испытаний	15408-1; 15408-2; 15408-3; 19791; 15446; 18045; 19790; 18045; 24759; 15446	34.101.1; 34.101.2; 34.101.3; 34.101.8; 34.101.9; 34.101.10; 34.101.12; 34.101.13; 34.101.15
Методы и алгоритмы шифрования, цифровая подпись	9797-1; 9797-2; 10116; 10118-1; 10118-2; 10118-3; 10118-4; 13888-2; 13888-3; 15946-1; 18031; 18032; 18033-1; 18033-2; 18033-3; 18033-4; 9796-2; 9796-3; 9798-2; 9798-3; 9798-4; 9798-5; 14888-1; 14888-2; 14888-3; 15945; 9594-8	П 34.101.27; П 34.101.27.31; П ISO/IEC 10118-3; П ISO/IEC 18033-1; П ISO/IEC 18033-3; 34.101.24; 34.101.25; 34.101.26; 34.101.31; 1176-1; 1176-2; ГОСТ 28147-89
Управление ключами	11770-1; 11770-2; 11770-3; 11770-4	
Защита сетевых технологий	18028-1; 18028-2; 18028-3; 18028-4; 18028-5	
Организация информационной безопасности, управление безопасностью, рисками и защитой информации	13335-1; 27001; 27002; 27005; 27006; 18043; 18044; 21827; 24762; 14516; 15447	П ISO/IEC 27001
Специализированные стандарты	9579(SQL); 14762; 29341-13-10; 29341-13-11(UPnP); 15067-4(HES)	

Часто в литературе упоминается федеральный стандарт США FIPS 140-2 «Требования для безопасности криптографических модулей» (Security requirements for cryptographic modules), который был опубликован в 2001 г. и заменил действовавший с 1994 г. аналогичный стандарт FIPS 140-1.

Для оценки уровня безопасности стандарт использует специальную модель – криптографический модуль, представляющий собой набор программных и (или) аппаратных средств, заключенных в пределах явно определенного и непрерывного периметра.

Наиболее известным международным проектом в области оценки безопасности, результаты которого послужили основой международного стандарта ISO/IEC 15408, является проект «Общие критерии оценки безопасности информационных технологий» (Common Criteria IT Security Evaluation, CC), более известный под коротким наименованием «Общие критерии» [2]. Проект стартовал в 1993 г. по инициативе правительственных организаций шести стран: Канады, США, Великобритании, Германии, Нидерландов и Франции. Первоисточниками для проекта авторы называют документы, перечисленные выше. Стандарт предусматривает семь уровней безопасности. Все требования к информационной безопасности разбиты на два вида: функциональные и требования доверия. Модель требований представляется в виде иерархии: класс – семейство – компонент – элемент. Требования безопасности оформляются в виде специальных документов «Профиль безопасности» (для семейства информационных систем) или «Задание по безопасности» для конкретной системы.

Международный стандарт ISO/IEC 15408:1999 фактически совпадает с версией 2.1 отчета «Общие критерии».

Стандарты менеджмента, аудита и сертификации информационной безопасности излагаются в международных стандартах ISO/IEC 27001, ISO/IEC 27002, ISO/IEC 27005 и ISO/IEC 27006. Все они являются развитием британского национального стандарта BS 7799. Важным считается то, что эти стандарты совместимы с известными стандартами ISO 9000, ISO 9001 и ISO 14001, регламентирующими менеджмент качества на предприятии.

Большое влияние на стандарты безопасности оказывают рекомендации одной из старейших стандартизирующих организаций в области телекоммуникаций и радио – Международного союза электросвязи (International Telecommunication Union, ITU). Рекомендации X.800 («Архитектура безопасности для взаимодействия открытых систем»), серия X.500 («Служба директориев») лежат в основе стандартов безопасности распределенных систем.

Стандарты безопасности Интернет разрабатываются группой IETF (Internet Engineering Task Force) сообщества Интернет (ISOC). Наиболее применяемыми являются следующие спецификации:

- IKE/IPSec (RFC 2401–2412, 2451) для протокола IP версий 4 и 6;
- TLS (RFC 2246) для протокола транспортного уровня;
- GSS-API (RFC 2744) – обобщенный прикладной интерфейс службы безопасности;
- протокол Kerberos (RFC 1510, 1964) для аутентификации в разнородной распределенной среде.

Международные стандарты представляют собой исчерпывающую основу для построения систем информационной безопасности. Национальные стандартизирующие организации в основном идут по пути гармонизации (адаптации) международных стандартов. Процесс гармонизации определяется руководством ISO/IEC 2 и, как правило, сводится к переводу, изменению шифра и (или) формы.

Инфраструктура национальной информационной безопасности Республики Беларусь. Инфраструктура национальной информационной безопасности Республики Беларусь соответствует схеме, приведенной на рисунке, но имеет собственное наполнение.

Законы и правовые акты о защите информации в Республике Беларусь. ЗБИБ Беларуси основывается на двух законах: «Об информатизации» и «Об электронном документе».

Закон «Об информатизации» был принят 6 сентября 1995 г., а 9 октября 2008 г. Палатой представителей Национального собрания Республики Беларусь был утвержден проект закона Республики Беларусь «Об информации, информатизации и защите информации», внесенный Советом Министров Республики Беларусь и предполагающий отмену закона 1995 г. Закон определяет процедуры управления и регулирования в сфере защиты информации.

Закон «Об электронном документе» был принят 10 января 2000 г., а 10 сентября 2008 г. в Совет Министров Республики Беларусь был представлен проект закона «Об электронном документе и электронной цифровой подписи». Этот закон «устанавливает правовые основы применения электронных документов, определяет основные требования, предъявляемые к электронным документам, а также права, обязанности и ответственность участников правоотношений, возникающих в сфере обращения электронных документов». Кроме того, закон определяет понятие электронной подписи как неотъемлемую часть электронного документа.

Государственное регулирование и управление в сфере защиты информации. Согласно

статье 8 нового закона, «государственное регулирование и управление в сфере информации, информатизации и защиты информации осуществляется Президентом Республики Беларусь, Советом Министров Республики Беларусь, Оперативно-аналитическим центром при Президенте Республики Беларусь, Министерством связи и информатизации Республики Беларусь, Национальной академией наук Беларуси и иными государственными органами в соответствии с компетенцией, определенной настоящим Законом и иными актами законодательства Республики Беларусь».

Статьи 9–14 разграничивают полномочия перечисленных государственных органов управления.

Координация и лицензирование деятельности по защите информации, а также организация и проведение работ по технической защите информации в национальном сегменте (ВУ) возложена на Оперативно-аналитический центр при Президенте Республики Беларусь (ОАЦ).

В соответствии с Указом Президента от 28.11.2000 г., № 639 головной научно-исследовательской организацией Республики Беларусь в области защиты информации является Научно-производственное республиканское предприятие «Научно-исследовательский институт технической защиты информации» (НИИ ТЗИ) [1]. Эта организация обеспечивает координацию в области научных, исследовательских, методических и практических работ по технической защите информационных систем в интересах министерств, ведомств и организаций Республики Беларусь.

Государственное научное учреждение «Объединенный институт проблем информатики» Национальной академии наук Беларуси привлекается ОАЦ и НИИ ТЗИ для выполнения работ по разработке проектов нормативных актов в сфере защиты информации, а также исследовательских работ в области методологии и оценки эффективности защиты информации.

Лицензирование в сфере технической защиты информации в Республике Беларусь. Порядок лицензирования и виды лицензируемой деятельности в сфере защиты информации определяется «Положением о лицензировании деятельности по технической защите информации, в том числе криптографическим методам, включая применение электронной подписи», утвержденным постановлением Совета Министров Республики Беларусь от 20.10.2003 г. № 1374.

В соответствии с этим Положением выдачу и учет лицензий на осуществление деятельности по технической защите информации осуществляет ОАЦ. Лицензируемой является

практически любая деятельность, связанная с проектированием, разработкой, установкой и оказанием услуг в области технической защиты информации.

Административная ответственность в сфере защиты информации в Республике Беларусь. Административный кодекс Республики Беларусь предусматривает ответственность за следующие правонарушения в сфере защиты информации (глава 22 Административного кодекса Республики Беларусь):

- 1) самовольное использование сетей электросвязи;
- 2) несанкционированный доступ к компьютерной информации;
- 3) нарушение правил защиты информации;
- 4) незаконная деятельность в области защиты информации.

Уголовная ответственность в сфере защиты информации в Республике Беларусь. Уголовный кодекс Республики Беларусь предусматривает уголовную ответственность за следующие преступления против информационной безопасности (раздел XII Уголовного кодекса Республики Беларусь):

- несанкционированный доступ к компьютерной информации;
- модификация компьютерной информации;
- компьютерный саботаж;
- неправомерное завладение компьютерной информацией;
- изготовление либо сбыт специальных средств для получения неправомерного доступа к компьютерной системе или сети;
- разработка, использование либо распространение вредоносных программ;
- нарушение правил эксплуатации компьютерной системы или сети.

Анализ определения и сущности понятия «информационная безопасность» с точки зрения уголовного права рассматривается в [5, 6].

Технические нормативные акты в сфере защиты информации в Республике Беларусь. Основные стандарты в сфере защиты информации являются гармонизированными международными стандартами (таблица), и, судя по всему, эта тенденция будет продолжаться. Исключением является ГОСТ 28147-89 «Система обработки информации. Защита криптографическая. Алгоритм криптографический», успешно применяемый с 1989 г.

Закключение. В Республике Беларусь планомерно ведется работа, направленная на создание условий информатизации общественной жизни [4].

Важнейшим этапом на этом пути является создание инфраструктуры национальной информационной безопасности. В основном сформирована законодательная основа, определены органы управления и регулирования, созданы

механизмы контроля. Ясно, что существующая на сегодняшний день инфраструктура совершенна, но предпосылки для ее развития есть.

Значительным тормозом развития информационных технологий является отсутствие национальных стандартов. Но и здесь в последнее время наметился существенный прогресс. Гармонизация международных стандартов в области защиты информации будет способствовать интеграции Республики Беларусь в мировое информационное пространство.

Построение инфраструктуры национальной информационной безопасности формулирует ряд новых требований для автоматизированных систем и, по сути, создает новую среду для их функционирования. Все это потребует переосмысления методологии построения новых автоматизированных систем и реинжиниринга уже работающих.

Литература

1. Официальный сайт Научно-производственного республиканского предприятия «Научно-исследовательский институт технической защиты информации» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.niitzi.by>. – Дата доступа: 20.03.2009.
2. Официальный сайт проекта Common Criteria [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.commoncriteriaportal.org>. – Дата доступа: 20.03.2009.
3. Беззубцев, О. А. ФАПСИ: Законодательное регулирование в области защиты информации / О. А. Беззубцев, А. Н. Ковалев // *Технология и средства связи*. – 1997. – № 1. – С. 94–96.
4. Макаров, О. С. Концепция правового регулирования электронного документооборота / О. С. Макаров, А. В. Орлов, А. А. Тепляков // *Управление защитой информации*. – 2008. – Т. 12, № 2. – С. 238–240.
5. Савицкая, Н. А. Объект компьютерных преступлений в УК Беларуси / Н. А. Савицкая // *Управление защитой информации*. – 2008. – Т. 12, № 3. – С. 362–366.
6. Ахраменка, Н. Ф. Уголовно-правовая и криминологическая характеристика преступлений против информационной безопасности (УК Республики Беларусь) / Н. Ф. Ахраменка // *Управление защитой информации*. – 2008. – Т. 12, № 1. – С. 104–108.

О. Ф. Зирко, лаборант; В. И. Кудрявцев, д-р техн. наук

РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ТРЕБОВАНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ СТРУКТУРНОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

In the article it is the estimation of probability in complex structures of Queuing systems. The analyze look unconcerned that complex probabilities of Queuing systems transgress the bounds of common valuations. Most of all the complex probabilities are not formed the complex structures of Queuing systems. The gave problem of that probabilities were the receipts of real probability in complex model. The great purpose of the work was the definition of probability in real form by complex stream of statistics. As instrument of estimations were created the new classification of catastrophes for control models. Catastrophes decide the estimation of probability in space of Queuing models. At Queuing systems with complex stream the probability received the real function. The results helped to analyze the effective quality and to create the complex queuing models in real spaces.

Введение. В работе [1] показано, что при использовании в системах массового обслуживания (СМО) требований с комплексным показателем вероятность реализации, которая рассчитана с применением традиционного подхода, описанного, например, в [2, 3], также имеет комплексную форму. Представление комплексной вероятности реализации требований, с одной стороны, выходит за пределы общепринятых оценок СМО и является неопределенной. С другой стороны, структурообразующим в комплексной модели СМО [4] считается комплексный показатель реализации требований, представляющий собой набор координат СМО, связанных в единый комплекс. Однако комплексная форма вероятности реализации не является структурообразующей, что ограничивает возможности применения.

Для сохранения преемственности анализа СМО существует необходимость расчета вероятности реализации требований в вещественной форме при комплексном показателе требований СМО. Основная цель данной статьи – вывести полную вещественную вероятность реализации требований при комплексном представлении показателя реализации требований.

Основная часть. Полную вероятность реализации $P\{A\}$ множества случайных событий $\{A\}$ в СМО можно представить в следующем виде:

$$P\{A\} = 1 - \sum_{k=0}^{\eta(t)} \sum_{m=1}^N R_k^m(t, Q), \quad (1)$$

где $R_k^m(t, Q)$ – вероятность катастроф k требований ($k = 1 \dots$) m -го типа ($m = 1 - N$), набор которых составляет исследуемое пространство Q в момент времени t . Учитывая комплексность пространства, введем отраженную на рисунке следующую классификацию катастроф:

1) агрегационные катастрофы требований – катастрофы требований, связанные с выходом агрегации компонентов показателей требований очереди за пределы ограничений, наложенных на данный тип агрегации в данной оче-

реди (например, на сумму по какой-либо из компонент показателей требований в данной очереди);

2) индивидуальные катастрофы требований – катастрофы требований, связанные с выходом показателя требования за пределы ограничений, наложенных на каждый показатель требования в данной СМО.

Последние в свою очередь могут быть подразделены на следующие:

– индивидуальные катастрофы неполноты требований – катастрофы требований, показатели которых выходят за пределы области допустимых неопределенностей, т. е. содержат недопустимые сочетания пустых значений в показателях требований;

– индивидуальные катастрофы требований по отдельным компонентам показателя требований – индивидуальные катастрофы, связанные с выходом показателей требований за пределы ограничений, наложенных на отдельные компоненты показателя требований;

– индивидуальные катастрофы требований по агрегациям компонентов показателей требований – индивидуальные катастрофы, связанные с выходом агрегаций компонентов показателей требований за пределы соответствующих ограничений.



Рисунок. Классификация катастроф требований

Поскольку данное разнообразие катастроф определяется посредством сопоставления пока-

зателя требования с системой ограничений, налагаемой на данный показатель, то система анализа катастроф может быть представлена в виде СМО, требования которой отображают показатели требований анализируемой СМО. Количество обслуживающих приборов n в СМО совпадает с максимально возможным появлением катастроф в момент времени t . При этом в момент времени t может произойти только одна катастрофа, таким образом, СМО однолинейна ($n = 1$).

Система разделяется на k -е число требований на периоде занятости (ПЗ) основной СМО. При этом вещественная часть показателя требования равна $T_k(t)$. В систему поступают $m = N(t)$ заявок – катастроф. Если рассматривать вероятности переходов из состояний m в состояние j на ПЗ относительно катастроф, то можно считать, что представленный выше процесс близок к описанию процесса с «нетерпеливыми» требованиями, который достаточно часто используется при анализе классических систем. Однако в отличие от классических систем ПЗ заключаются в пространство размером $Q(t)$, функция распределения (ФР) которого равна $L(Q)$:

$$L(Q) = P\{Q(t) < Q\}. \quad (2)$$

Функция распределения на выбранном периоде занятости СМО совпадает со значением ФР входного пространства СМО, что приводит к упрощению структуры и позволяет пренебрегать незначимыми для анализа факторами. Поскольку проводится исследование вероятности появления катастроф требований, поэтому интенсивность поступления требований сопряженной СМО должна совпадать с λ интенсивностью поступления k -го требования основной СМО.

Функция распределения катастроф $G(t)$ по времени в зависимости от начального определения может быть фиксирована либо произвольна.

Процесс определяется следующим образом:

– при фиксированном $G(t)$

$$(N(t), Q(t), G(t)); R_k^i(t, Q, T_k); \quad (3)$$

– при произвольном $G(t)$:

$$(N(t), Q(t)); R_k^i(t, Q, T_k). \quad (4)$$

Обслужить требование в такой системе значит определить вероятность $R_k^m(t, Q, T_k)$ того, что на периоде занятости $T_k(t)$ с k -м требованием, поступившим в систему с временем t и занимающим пространство $Q(t)$, произойдет катастрофа m -го типа.

Определим вероятность $R_k^m(t, Q, T_k)$. При наступлении катастрофы m с требованием k , поступившим в СМО в момент t , на периоде $T_k(t)$ за время Δt произойдут изменения про-

странства на ΔQ единиц, которые вызовут переход в состояние $J(t + \Delta t, Q + \Delta Q) = j$, если в момент $t = 0$ система находилась в состоянии $J(0, Q) = m$.

Процесс (3), (4) описывается следующим образом:

1) показатель требования $Z(t)$ представим в виде

$$Z(t) = T_k + iQ(t), \quad (5)$$

где T_k, t, Q – характеристики комплексного показателя k -го требования; i – мнимая единица;

2) плотность распределения вероятности появления m катастроф:

$$m = 1 - N,$$

$$\begin{aligned} r_k^m(t, Q, T_k) dt dQ &= P\{N(t) = m, t < T_k(t) < t + \Delta t, \\ Q^m < Q < Q^m + \Delta Q, J(t + \Delta t, Q + \Delta Q) = \\ &= j / J(0, Q) = m\}; \end{aligned} \quad (6)$$

3) плотность функции распределения пространства:

$$l(Q) dQ = P\{Q < q < Q + \Delta Q\}; \quad (7)$$

4) плотность функции распределения действующих катастроф:

$$g^m(t) dt = P\{t < g^m < t + \Delta t\}; \quad (8)$$

5) совместная плотность распределения величин t и Q :

$$\begin{aligned} f(t, Q) dt dQ &= P\{t \leq g^m(t) \leq t + \Delta t, \\ &Q < q < Q + \Delta Q\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Необходимо отметить, что совместная плотность распределения задает только предполагаемые связи между текущим временем «обслуживания» катастроф и окружающим пространством, поэтому при выборе зависимостей желательно ссылаться не на статистические данные, а на элементы прогноза. При отсутствии таковых в исследуемом процессе можно пренебречь наличием тех или иных катастроф и свести закон распределения к простейшему либо нормальному [5].

Вероятность того, что m катастрофа произошла с k -м требованием в пространстве $(Q, Q + dQ)$ при изменении времени $(t, t + dt)$:

$$\begin{aligned} \eta_k^m(t, Q) &= \\ &= r_k^m(t, Q, T_k) \left(1 - \int_{Q_1}^{Q_2} \int_0^t r_k^m(t, Q, T_k) l(Q) g^m(t) dt dQ \right) \end{aligned}$$

или обратная формула

$$\begin{aligned} r_k^m(t, Q) &= \\ &= \eta_k^m(t, Q) \exp \left(- \int_{Q_1}^{Q_2} \int_0^t \eta_k^m(t, Q, T_k) l(Q) g^m(t) dt dQ \right). \end{aligned}$$

Определим вероятности появления катастрофических требований через их плотности $r_k^m(t, Q, T_k)$, для нахождения которых составим систему дифференциальных уравнений. Для чего рассмотрим плотности вероятностей, с которыми объекты будут переходить из состояния m в состояние j за интервал времени $(t, t + \Delta t)$. Для любых связанных с катастрофами СМО должен существовать процесс ухода поступивших в систему требований, который можно характеризовать следующими плотностями вероятности.

1. Плотность вероятности $r_k^m(t, Q, T_k)$ изменения пространства ΔQ за промежуток времени Δt :

$$r_k^m(t + \Delta t, Q, T_k) \Delta Q,$$

либо

$$\lambda(N - m) r_k^m(t, Q, T_k) \Delta t \Delta Q.$$

2. Плотность вероятности $r_k^m(t, Q, T_k)$ находящихся во время Δt $m(\lambda + \mu)$ количества катастроф при изменении пространства на ΔQ :

$$m(\lambda + \mu) r_k^m(t, Q + \Delta Q, T_k),$$

или

$$-\eta_k^m(t, Q) \Delta t \Delta Q r_k^m(t, Q, T_k).$$

3. Плотность вероятности $r_k^m(t, Q, T_k)$ изменения времени Δt и пространства ΔQ :

$$r_k^m(t + \Delta t, Q + \Delta Q, T_k),$$

либо

$$-\lambda(N - m + 1)(1 - \delta^{m,0}) r_k^{m-1}(t, Q, T_k).$$

Суммируя плотности вероятности, получим для любого $m = 1 - N$ следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & r_k^m(t, Q_k, T_k) \Delta Q_k + m(\lambda + \mu) r_k^m(t, Q_k, T_k) \Delta t + \\ & + r_k^m(t, Q_k, T_k) = r_k^m(t + \Delta t, Q_k, T_k) \Delta Q_k + \\ & + \lambda(N - m) r_k^m(t, Q_k, T_k) \Delta Q_k \Delta t + \\ & + m(\lambda + \mu) r_k^m(t, Q_k + \Delta Q_k, T_k) + \\ & + \eta_k^m(t, Q_k) \Delta t \Delta Q_k r_k^m(t, Q_k, T_k) + \\ & + r_k^m(t + \Delta t, Q_k + \Delta Q_k, T_k) - \lambda(N - m + 1) \times \\ & \times (1 - \delta^{m,0}) r_k^{m-1}(t, Q_k, T_k) \Delta t \Delta Q_k. \end{aligned} \quad (10)$$

Выводы системы дифференциальных уравнений и других формул, указанных ниже, вследствие их объемности в данной статье не приводятся полностью. Для вывода авторы используют стандартные методы высшей математики. С целью получения системы дифференциальных уравнений функции плотности вероятности появления m катастроф для k -го требования в системе уравнений (10) компонуются по переменным времени t и пространства Q , делятся на значения Δt и ΔQ , а затем устрем-

ляются к их предельным значениям ($t \rightarrow \infty$, $Q \rightarrow \infty$). В результате для любого $m = 1 - N$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} r_k^m(t, Q, T_k) + m(\lambda + \mu) \frac{d}{dQ} r_k^m(t, Q, T_k) + \\ & + \frac{d^2}{dt dQ} r_k^m(t, Q, T_k) = \\ & = -\lambda(N - m) r_k^m(t, Q, T_k) - \eta_k^m(t, Q) r_k^m(t, Q, T_k) + \\ & + \lambda(N - m + 1)(1 - \delta^{m,0}) r_k^{m-1}(t, Q, T_k). \end{aligned} \quad (11)$$

Причем при $t = 0$

$$r_k^m(0, Q, T_k) = \delta^{m,0} \delta(T_k) l(Q). \quad (12)$$

Определим граничные условия.

Вероятность того, что катастрофа произойдет сразу со всеми требованиями, равна нулю, т. е.

$$r_k^0(0, Q, T_k) = 0.$$

Поскольку в момент катастрофы требование покидает систему, то плотность закона распределения действующих катастроф и плотность распределения пространства выражаются через плотность распределения вероятности отсутствия катастроф $r_k^0(t, Q, T_k)$.

Если учитывать, что $b(T_k)$ представляет плотность вероятности обслуживания требований на периоде занятости T_k без катастроф, то

$$\begin{aligned} & r_k^m(t, 0, T_k) = b(T_k) \times \\ & \times \int_0^t \int_{Q_1}^{Q_2} r_k^m(t, Q, T_k) \eta_k^m(t, Q) dQ dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Наличие переменных коэффициентов $\lambda(N - m)$ и $\eta_k^m(t, Q)$ на периоде занятости $T_k(t)$ усложняет применение метода производящих функций, который, как правило, используется при анализе классических СМО. Одним из методов решения данных уравнений являются «дискретные преобразования» [4], согласно которым можно предположить, что существует множество переменных $u_k^m(t, Q, T_k)$ таких, что для $0 \leq m \leq N$, $0 \leq k \leq n(t)$

$$u_k^m(t, Q, T_k) = \sum_{j=0}^N \binom{j}{m} r_k^{N-j}(t, Q, T_k), \quad (14)$$

где $\binom{j}{m}$ – биномиальные коэффициенты, равные 0 при $j < m$.

Уравнения представляют систему совместных уравнений от N неизвестных, для которых существуют обратные преобразования

$$\begin{aligned} & r_k^m(t, Q, T_k) = \\ & = \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l \binom{N-m+l}{l} u_k^{N-m+l}(t, Q, T_k). \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда система уравнений (11) примет вид

$$\left(\frac{d}{dt} + m(\lambda + \mu) \frac{d}{dQ} + \frac{d^2}{dt dQ} \right) u_k^{N-m+1}(t, Q, T_k) + \eta_k^m(t, Q) u_k^m(t, Q, T_k) = 0. \quad (16)$$

Решение уравнения (16) представимо в виде

$$u_k^m(t, Q, T_k) = \left(u_k^m(t, 0, T_k) + \binom{N-j}{m} g^m(t) l(Q) \right) \times \exp(-m\lambda + T_k)t - (m\mu - T_k)mQ \times \exp\left(-\int_0^t \int_0^{Q_2} \eta_k^m(t, Q) l(Q) dQ dt \right), \quad (17)$$

где $u_k^m(t, 0, T_k)$ определяется с помощью граничного условия $Q = 0$ и начального условия (12).

Совместная плотность распределения величин t, Q рассчитывается по формуле

$$f(t, Q) = \int_0^t \int_0^{Q_2} u_k^m(t, Q, T) \eta_k^m(t, Q) dQ dt. \quad (18)$$

Граничные условия могут быть записаны для функции $u_k^m(t, Q, T_k)$ с учетом совместной плотности распределения и плотности вероятности обслуживания требования на периоде занятости T_k :

$$u_k^m(t, 0, T_k) = b(T_k) \int_0^t \int_0^{Q_2} u_k^m(t, Q, T_k) \eta_k^m(t, Q) dQ dt - \binom{N}{m} g^m(t) l(0). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (17), решение примет вид

$$u_k^m(t, Q, T_k) = \left(b(T_k) f(t, 0) - \binom{N}{0} g^0(t) l(0) + \binom{N-j}{m} g^m(t) l(Q) \right) \times \exp(-m\lambda + T_k)t \times \exp(-N\mu + T_k)Q \times \exp\left(-\int_0^t \int_0^{Q_2} \eta_k^m(t, Q) l(Q) dQ dt \right). \quad (20)$$

Положим, что

$$a_k = b(T_k) f(t, 0) - \binom{N}{0} g^0(t) l(0) + \binom{N-j}{m} g^m(t) l(Q), \quad (21)$$

$$C_0 = (-m\lambda + T_k)t - (Nm\mu - T_k)Q - \int_0^t \int_0^{Q_2} \eta_k^m(t, Q) l(Q) dQ dt. \quad (22)$$

Тогда решение (20) запишется в виде

$$u_k^m(t, Q, T_k) = a_k \exp(C_0), \quad (23)$$

где $\exp(C_0)$ – простейший поток.

Подставив решение (23) в уравнение (14), получим значение коэффициента a_k :

$$a_k = -\frac{a_t + (m(\lambda + \mu) + C_0 C_{tQ}) a_Q + a_{tQ} C_Q}{C_t + m(\lambda + \mu) C_Q + \eta_k^i(t, Q)}. \quad (24)$$

Если плотность функции распределения $g^m(t)$ фиксирована для всей системы, формулу (24) можно подставлять в решение (23). Значение $\eta_k^m(t, Q)$ рассчитывается, исходя из предельного значения коэффициента C_Q . Учитывая, что при $t \rightarrow \infty$ исключаются катастрофы в пространстве $(Q_k, Q_k + dQ_k)$, изменения времени и пространства k -го требования на интервале T_k равны нулю

$$\frac{dC_0}{dQ_k} = C_Q = -\mu(-1)^m m + T_k - \int_0^t \eta_k^m(t, Q) l(Q) dt = 0. \quad (25)$$

Вероятность того, что m катастрофа произошла с k -м требованием в пространстве $(Q, Q + dQ)$ при изменении времени $(t, t + dt)$ $\eta_k^m(t, Q)$:

$$\eta_k^m(t, Q) = t[(-1)^m \mu m - T_k] l(Q)^{-1}. \quad (26)$$

Причем

$$b(T_k) = f(T_k, 0)^{-1} g^m(t) \left[\binom{N}{0} l(0) - \binom{N-j}{m} l(Q) \right] - \binom{N}{0} g^0(t) l(0) + \binom{N-j}{i} g^i(t) l(Q). \quad (27)$$

Если плотность функции распределения $g^m(t)$ произвольна, то необходимо учитывать изменения всего пространства с учетом изменений времени. Тогда систему уравнений можно записать в следующем виде:

$$a_k (h_k^m(t, Q) + \eta_k^m(t, Q)) = g^m(t) C_k^m(t, Q) + m(\lambda + \mu) \exp C_0, \quad (28)$$

где $h_k^m(t, Q) + \eta_k^m(t, Q) = f(T_k, Q)$; $C_k^m(t, Q)$ – распределение Фурье по пространству и Лапласа по времени [3].

Для решения систем уравнения вида (28) при моделировании СМО часто [3] вводят функцию $w_k(m, t, Q)$, обладающую следующими свойствами:

- значения $w_k(m, t, Q)$ являются статистическими данными;
- физический смысл – учет изменений всего пространства с учетом изменения времени;
- сумма отношений коэффициента a_k к $w_k(m, t, Q)$:

$$\sum_{l=0}^N \frac{a_k}{w_k(l, t, Q)} = 0. \quad (29)$$

Значения $w_k(m, t, Q_k)$ задавались следующей формулой:

$$w_k(m, t, Q) = \begin{cases} \prod_{l=0}^m \frac{C_k^l(t, Q)}{h_k^l(t, Q) + \eta_k^l(t, Q)}, \\ 1 \text{ при } f(t, Q) = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Подставляя (30) в (28), получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{a_k}{w_k(m, t, Q)} (h_k^m(t, Q) + \eta_k^m(t, Q)) &= \\ &= \frac{g^m(t) C_k^m(t, Q)}{w_k(m-1, t, Q)} + \frac{m(\lambda + \mu) \exp(C_0)}{w_k(m, t, Q)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Суммируя все отношения (31) по m , получим для любого $m = 1 - N$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{m=N(t)} \frac{a_k}{w_k(l, t, Q)} &= g^m(t) \times \\ &\times \sum_{l=0}^{m=N(t)} \frac{C_k^l(t, Q)}{w_k(l-1, t, Q) f_k^l(t, Q)} + \\ &+ \sum_{l=0}^{m=N(t)-1} \frac{l(\lambda + \mu) \exp(C_0)}{w_k(l, t, Q) (h_k^l(t, Q) + \eta_k^l(t, Q))}. \end{aligned} \quad (32)$$

Учитывая условие (29) функции $w_k(m, t, Q)$, получим формулу расчета плотности распределения $g^m(t)$, выраженную через статистические данные $w_k(m, t, Q)$:

$$\begin{aligned} g^m(t) &= \left(\sum_{l=0}^{m=N(t)} \frac{w_k(l, t, Q)}{w_k(l-1, t, Q)} \right)^{-1} \times \\ &\times \sum_{l=0}^{m=N(t)-1} \frac{l(\lambda + \mu) \exp(C_0)}{w_k(l, t, Q) (h_k^l(t, Q) + \eta_k^l(t, Q))}. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставив статистические данные и (33) в (20), используя формулу (17), рассчитаем искомую плотность вероятности появления m катастроф для требования k на одном периоде $T_k(t)$:

$$r_k^m(t, Q) = \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l \binom{N-m+l}{l} u_k^{N-m+1}(t, Q). \quad (34)$$

Заключение. Результатом расчета является значение плотности вероятности m катастроф k требований на выделяемом периоде занятости в ограниченном пространстве. Таким образом, вероятность m катастроф k требований в соответствии с данным расчетом равна

$$\begin{aligned} R_k^m(t, Q, T_k) &= \sum_l^{m-1} (-1)^l \binom{N-m+l}{l} \left(B(T_k) F(t, 0) - \right. \\ &\left. - \binom{N}{0} G^m(t) L(0) + \binom{N-l}{m} G^m(t_k) L(Q_k) \right) \exp(C_0). \end{aligned} \quad (35)$$

Учитывая, что $k = 1 - n$, получим суммарную вероятность появления катастрофических потоков требований:

$$\begin{aligned} R_k^m(t, Q, T_k) &= \sum_{k=1}^n \sum_l^{m-1} (-1)^l \binom{N-m+l}{l} \times \left(B(T_k) F(t, 0) - \right. \\ &\left. - \binom{N}{0} n G^m(t) L(0) + \right. \\ &\left. + \binom{N-l}{m} \sum_{k=1}^n G^m(t_k) L(Q_k) \right) \exp(C_0). \end{aligned} \quad (36)$$

Коэффициенты

$$\binom{N-m+l}{l}, \binom{N}{0}, \binom{N-l}{m}$$

и величины $n, B(T_k), F(t, 0), G^m(t_k), L(Q_k)$ вещественны по условию; $\exp(C_0)$ представляет простейший поток появления m катастроф в k -х требованиях, значение которого вещественно. Таким образом, вероятность появления катастрофических требований $R_k^m(t, Q, T_k)$ представима в виде набора вещественно определенных функций. Подставив (36) в (1), полная вероятность реализации требований в СМО будет иметь вещественную форму при комплексном показателе требований, что и необходимо было получить.

Литература

1. Зирко, О. Ф. Требования с комплексными показателями в системах массового обслуживания / О. Ф. Зирко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2007. – Вып. XV. – С. 130–132.
2. Тихоненко, О. М. Модели массового обслуживания в информационных системах: учеб. пособие / О. М. Тихоненко. – Минск: Технопринт, 2003. – 327 с.
3. Джейсуол, Н. Очереди с приоритетами / Н. Джейсуол. – М.: Мир, 1973. – 277 с.
4. Кудрявцев, В. И. Модель системы массового обслуживания с высокой адаптивностью / В. И. Кудрявцев, О. Ф. Зирко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2008. – Вып. XVI. – С. 149–153.
5. Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М.: Изд-во Рос. ун-та Дружбы Народов, 1995. – 529 с.

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

ВЛАДИМИР МАТВЕЕВИЧ МАРЧЕНКО

Исполнилось 60 лет доктору физико-математических наук, профессору, заведующему кафедрой высшей математики Белорусского государственного технологического университета (БГТУ) **Владимиру Матвеевичу Марченко**, члену ученого совета БГТУ, члену Белорусского математического общества, члену AMS (Американского математического общества), члену SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics).

В. М. Марченко родился 27 апреля 1949 г. в деревне Ходунь Климовичского района Могилевской области. После окончания с золотой медалью Климовичской СШ № 1 в 1966 г. поступил на математический факультет Белорусского государственного университета (БГУ). В 1971 г. с отличием окончил факультет прикладной математики и в том же году по рекомендации ученого совета поступил в аспирантуру этого университета по кафедре методов оптимального управления. После досрочного окончания аспирантуры был направлен на кафедру методов оптимального управления факультета прикладной математики БГУ, где работал ассистентом с февраля 1974 по сентябрь 1975 г. В этот период под руководством профессора Ф. М. Кирилловой подготовил кандидатскую диссертацию «О минимальном числе входов относительно управляемых систем с последствием», которую защитил в июне 1974 г. по специальности 01-01-02 «Дифференциальные и интегральные уравнения».

В связи с необходимостью развития математической теории управления В. М. Марченко в 1975 г. был приглашен в Гомельский государственный университет (ГГУ), где прошел путь от старшего преподавателя кафедры математического анализа до доцента кафедры математических проблем управления.

С октября 1979 г. работает в БГТУ (БТИ им. С. М. Кирова в прошлом) сначала доцентом, а с 1986 г. – заведующим кафедрой высшей математики. С 24 сентября 1980 по 12 июня 1981 г. проходил стажировку в Математическом центре им. Стефана Банаха в Варшаве, где принимал активное участие в семестре по оптимальному управлению, и по возвращении продолжал успешно заниматься математической теорией управления. В январе 1986 г. В. М. Марченко защитил докторскую диссертацию «Математические задачи управления и наблюдения для линейных систем с последствием», в том же

году Высшей аттестационной комиссией при Совете Министров СССР ему присвоена степень доктора физико-математических наук. 23 февраля 1988 г. В. М. Марченко получил ученое звание профессора.

Отличительными чертами нашего юбиляра являются упорство и максимальная самоотдача в достижении цели, трудолюбие, непрерывное стремление к повышению своего профессионального уровня.

В. М. Марченко постоянно участвует в экспертизе проектов (в том числе и международных) в области математической теории управления, в экспертизе, рецензировании и оппонировании кандидатских и докторских диссертаций и работ, подаваемых на различные конкурсы и премии. В течение ряда лет принимал участие в работе Научно-технического совета Министерства образования Республики Беларусь. Является руководителем совместной научной и научно-методической работы с Институтом кибернетики (Нант, Франция) и Белостокской политехникой (Польша). В. М. Марченко был руководителем проектов Фонда фундаментальных исследований, Госкомитета по науке и технологиям и Министерства образования Республики Беларусь, членом оргкомитетов ряда международных конференций по математике и теории управления в сложных системах. Под его руководством защищено несколько кандидатских диссертаций и подготовлена к защите магистр З. Зачкевич в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом. В. М. Марченко награжден почетными грамотами БГУ, ГГУ и БГТУ, Министерства народного образования и Госкомитета по науке и технологиям, ударник X пятилетки, награжден нагрудным знаком «Выдатнік адукацыі Рэспублікі Беларусь».

Его **основные достижения** в области научных исследований: решение проблемы Красовского о полном успокоении системы с последствием (1977 г.); разработка алгебраического подхода к исследованию задач относительноной управляемости систем с отклоняющимся аргументом (1974 г.); разработка общего подхода к исследованию задач управляемости и наблюдаемости систем с последствием на основе метода пространства состояний и построение общей теории двойственности для таких систем (1980–1986 гг.); постановка и решение задачи

модального управления в различных классах линейных регуляторов по типу обратной связи (1978–1993 гг.); разработка нового подхода к исследованию проблемы стабилизации систем с запаздыванием в шкалах регуляторов с отклоняющимся аргументом (1991–1996 гг.), что позволяет упростить известные регуляторы Н. Н. Красовского и Ю. С. Осипова; получение принципа двойственности для задач управления и наблюдения в дескрипторных и гибридных системах (1995–1999 гг.); обобщение формулы Коши, а также разложение решений гибридных систем в ряд по решениям их определяющих уравнений; исследование алгебраических свойств определяющих уравнений, в частности доказательство обобщенной теоремы Гамильтона – Кэлли, что позволяет среди решений определяющих уравнений выделить конечное число образующих (1999–2001 гг.). В последние годы В. М. Марченко были получены существенные результаты по модальному управлению и стабилизации многовходных линейных систем с запаздыванием нейтрального типа, стабилизации систем в шкалах регуляторов, реализации систем с последствием, задачам управляемости, наблюдаемости и устойчивости гибридных систем. Его труды напечатаны в ведущих научных журналах Беларуси, России, Украины, Польши, США. В общей сложности им опубликовано более 280 научных и научно-методических работ.

В. М. Марченко выступал с пленарными докладами на международных и всесоюзных конференциях, читал лекции в Международной школе Perspectives in Control Theory в Польской Народной Республике (1988 г.), участвовал в работе XI конгресса ИФАК (Таллин, 1990 г.) и XIII конгресса ИФАК (Сан-Франциско, 1996 г.) с полной финансовой поддержкой Оргкомитета, а также в Международном математическом конгрессе (Берлин, 1998 г.). В 1994 г. в качестве приглашенного профессора находился с десятидневным рабочим визитом в университете Миннесоты (США). С февраля 2000 г. по настоящее время ежегодно приглашается для проведения совместных научных исследований по качественной теории управления в Ecole Centrale (Нант, Франция). Поддерживает активные научные контакты с Математическим институтом им. В. А. Стеклова (г. Москва), Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова, Институтом математики и механики (Екатеринбург), Иркутским государственным университетом, НАН Украины (Институт кибернетики и Институт космических исследований), Международным математическим центром им. С. Банаха (Варшава), Варшавской и Белостокской политехникой (Польша), Politecnico di Torino (Италия), Холонским техническим университетом (Изра-

иль), Yamagato University (Япония), Texas A&M University, The Ohio State University, University of Minnesota (США) и другими математическими центрами.

В. М. Марченко является номинантом известных мировых биографических изданий: Who's Who in the World (USA), American Biographical Institute, International Biographical Centre (Cambridge, England), «Кто есть кто в Беларуси».

Профессор В. М. Марченко – внимательный и требовательный руководитель и педагог, его лекции отличаются высоким научным уровнем, строгой логикой и четкостью изложения материала. Он много работает со студентами, читает специальные курсы для магистров. Уже упомянутая высокая научная квалификация, энергия и настойчивость в достижении цели, требовательность и доброжелательное отношение к людям снискали Владимиру Матвеевичу заслуженный авторитет и уважение среди коллег, студентов и сотрудников университета. Студенты высоко ценят его профессионализм, требовательность и в то же время открытость и великолепное чувство юмора.

В. М. Марченко активно и плодотворно занимается научно-методической работой. Для эффективной организации преподавания математических дисциплин им разработана и активно внедряется в учебный процесс уровеньная образовательная технология, целью которой является создание условий для включения каждого студента в деятельность, соответствующую зоне его ближайшего развития, обеспечение возможности для самостоятельного (и/или под контролем преподавателя) усвоения программного материала в том размере и с той глубиной, которую позволяют индивидуальные особенности обучаемого, что в конечном счете имеет целью формирование математической культуры студента как части его культуры в целом. Данная методология ориентирована также и на выполнение важнейшей задачи высшей школы – подготовку специалистов, способных творчески мыслить и самостоятельно работать, четко определять возникающие проблемы и находить пути их решения.

Искренне поздравляем Владимира Матвеевича с юбилеем и желаем ему крепкого здоровья, счастья и дальнейших успехов в научной, педагогической и общественной деятельности.

*И. М. Жарский,
А. С. Федоренчик, П. А. Лыцник,
И. К. Асмыкович, И. М. Борковская,
В. В. Игнатенко, В. И. Янович,
И. Ф. Кузьмицкий, В. С. Вихренко,
И. И. Наркевич, С. Е. Орехова*

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.977

Марченко, В. М. **Гибридные дифференциально-разностные системы и их приложения в теории динамических систем** / В. М. Марченко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 3–7.

Предложен унифицированный подход к изучению таких важных в приложениях и различных по природе классов динамических систем, как систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа, а также дискретно-непрерывных систем. Подход основан на сведениях указанных систем к ГДР-системам. Проанализировано современное состояние качественной теории управления и наблюдения (КТУН) в ГДР-системах.

Ил. 1. Библиогр. – 18 назв.

УДК 517.977.1

Борковская, И. М. **Построение стабилизирующих регуляторов типа обратной связи для двумерных динамических систем с запаздыванием** / И. М. Борковская // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 8–10.

В работе затрагивается одна из основных проблем качественной теории управления динамическими системами – проблема стабилизации. Представлены конструктивные алгоритмы построения регуляторов разностного типа для двумерных систем с запаздывающим аргументом. Предлагается интегральный регулятор, решающий проблему стабилизации в случае, когда вопрос о применении разностных регуляторов остается открытым. Рассматривается также задача о стабилизации разностными регуляторами такого важного класса систем, как дескрипторные системы с запаздыванием.

Библиогр. – 2 назв.

УДК 517.929

Копейкина, Т. Б. **Определяющие уравнения в проблеме управляемости стационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием** / Т. Б. Копейкина // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 11–13.

С помощью метода пространства состояний исследуется задача относительной управляемости, x -управляемости, y -управляемости линейных стационарных сингулярно возмущенных систем с постоянным запаздыванием. Такими системами описываются многие процессы, происходящие в биологии, в задачах химической кинетики, в теории автоматического регулирования и др. В работе вводится новый вид определяющих уравнений, отражающий как порядок входящих в исследуемую систему производных, так и наличие малого параметра при них. Дается понятие решения, компонент решения определяющих уравнений, имеющих рекуррентный алгебраический матричный вид. Доказаны критерий, необходимые, достаточные условия относительной управляемости, x -управляемости, y -управляемости, выраженные через компоненты решений определяющих уравнений. Полученные условия являются эффективными, поскольку не связаны с нахождением решения исходной системы дифференциальных уравнений.

Библиогр. – 7 назв.

УДК 517.925.6

О подвижных особых точках решений автономной системы Гамильтона четвертого порядка / В. И. Мататов [и др.] // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 14–16.

Многие задачи естествознания и техники моделируются с помощью систем дифференциальных уравнений Гамильтона. Исследование характера подвижных особых точек решений нелинейных однородных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений является одной из основных задач аналитической теории дифференциальных уравнений. В статье рассмотрены гамильтоновы системы четвертого порядка специального вида. Показано, что при выполнении определенных условий решения указанных систем в качестве подвижных особых точек могут иметь точки ветвления второго порядка или не имеют никаких подвижных особых точек.

Библиогр. – 17 назв.

УДК 514.144

Можей, Н. П. **Почти симплектические однородные пространства** / Н. П. Можей // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 17–20.

Работа посвящена описанию изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой (над полями \mathbb{R} и \mathbb{C}). Известно, что проблема классификации однородных пространств (\bar{G}, M) эквивалентна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли (\bar{G}, G) . Используя линеализацию, задача была сведена к описанию пар алгебр Ли (\bar{g}, g) с точностью до эквивалентности пар. Существенной является возможность рассмотрения только эффективных действий группы \bar{G} на

многообразии M . Классифицированы с точностью до сопряженности все подалгебры g^C алгебры Ли $sp(4, C)$; для каждой подалгебры g^C найдены все изотропно-точные пары (\bar{g}^C, g^C) , у которых изотропное представление сопряжено подалгебре g^C ; для каждой пары (\bar{g}^C, g^C) определены все вещественные формы (\bar{g}, g) . По вещественной форме построена соответствующая пара групп Ли и однородное пространство. Предложенная методика может быть использована для произвольной размерности.

Библиогр. – 2 назв.

УДК 519.624

Соловьева, И. Ф. **Об особенностях решения задачи Троеша** / И. Ф. Соловьева // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 21–23.

В работе для решения нелинейных краевых задач предлагается метод множественной двусторонней пристрелки. Практическая реализация метода рассматривается на примере решения известной краевой задачи Троеша, для которой строятся вычислительные схемы метода множественной двусторонней пристрелки. Они содержат в себе процедуру решения задач Коши в прямом и обратном направлениях на подынтервалах пристрелки. На примере задачи Троеша показано, что выбором числа и длин подынтервалов пристрелки обеспечиваются необходимые свойства и качества задач Коши. В ходе решения данной задачи выявляются и изучаются свойства матриц Якоби для замыкающих систем уравнений. Определяются границы спектра матрицы Якоби и вычисляются их числа обусловленности. Предлагаемая методика позволяет решать широкие классы краевых задач с пограничным слоем.

Библиогр. – 2 назв.

УДК 531.19

Ласовский, Р. Н. **Кинетика фазовых расслоений в решеточных флюидах** / Р. Н. Ласовский, Г. С. Бокун, В. С. Вихренко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 24–26.

Получены расчетные уравнения, описывающие кинетику фазовых расслоений в двух- и трехмерных решеточных флюидах. Исследована эволюция системы, в которой начальное распределение концентрации является ступенчатым. В двухмерной системе показано появление второй конденсированной области, которая со временем исчезает. Установлен критический размер «затравочной» области, ниже которого не наблюдается конденсации. Для трехмерных систем отмечено зарождение нескольких дополнительных конденсированных фаз, количество которых зависит от начальных условий. Однако в отличие от двухмерной системы фазовое расслоение в трехмерном случае происходит при любом размере «затравки».

Ил. 2. Библиогр. – 11 назв.

УДК 533.9

Белов, В. В. **Статистическое описание однокомпонентной плазмы** / В. В. Белов // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 27–29.

Полученное ранее нелинейное интегральное уравнение для простой жидкости применено в модифицированной форме к системе заряженных частиц. Над уравнением проведено эквивалентное преобразование, в результате которого дальнедействующее кулоновское взаимодействие оказалось замененным экранированным потенциалом дебай-хюккелевского типа, что устранило потенциальные расходимости интегралов.

Ил. 4. Библиогр. – 6 назв.

УДК 536.758

Белов, В. В. **Статистическая теория нелинейного упругого деформирования эластомеров** / В. В. Белов, В. Б. Немцов // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 30–32.

Для выяснения эффектов, обусловленных растяжением нематического эластомера, используется статистический подход, в рамках которого рассматривается цепочка, образованная одномерными элементами, каждый из которых может находиться в одном из двух состояний. Конфигурационный интеграл такой двухсортовой системы вычисляется точно, однако одночастичные потенциалы средних сил, через которые он выражается, остаются неизвестными. Они определяются в приближении среднего поля феноменологическими выражениями, связанными с ориентацией элементов и их деформацией, что позволяет рассчитать кривые растяжения эластомера при различных значениях определяющих параметров.

Ил. 1. Библиогр. – 2 назв.

УДК 531.19+539.219.3

Гапанюк, Д. В. **Термодиффузия в двухкомпонентном решеточном флюиде** / Д. В. Гапанюк, В. С. Вихренко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 33–35.

В работе дано статистико-механическое рассмотрение термодиффузии в двухкомпонентных решеточных флюидах. Получены аналитические выражения для коэффициентов термодиффузии для квадратной и кубической решеток. Аналитические выражения удовлетворительно воспроизводят данные моделирования по методу Монте-Карло, что свидетельствует об адекватности теоретических положений, лежащих в основе их вывода, и приемлемости использованных приближений.

Ил. 1. Библиогр. – 18 назв.

УДК 531.19

Грода, Я. Г. **Диффузия ленгмюровского решеточного газа на статически неупорядоченной решетке с экспоненциальным распределением высот барьеров** / Я. Г. Грода, Д. В. Гапанюк // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 36–38.

Рассмотрены системы частиц на плоской треугольной и простой кубической решетках с постоянной глубиной решеточных узлов и экспоненциальным распределением высот межузельных барьеров. Переходы частиц в ближайшие вакантные узлы являются термоактивированными при случайном распределении высот межузельных барьеров. Исследовано интерполяционное выражение для оценки энергии активации кинетической диффузии в области средних температур. Проведено прямое компьютерное моделирование по методу Монте-Карло диффузионных процессов в рассматриваемых статически неупорядоченных системах. На основании результатов моделирования определен характер зависимости энергии активации от температуры. Последующий численный анализ данной зависимости позволяет предложить ее аналитическую аппроксимацию. Результаты применения полученного аналитического выражения сопоставлены с результатами моделирования.

Ил. 4. Библиогр. – 6 назв.

УДК 536.758

Камлюк, А. Н. **Модель локального расплетания ДНК** / А. Н. Камлюк, В. Б. Немцов, А. В. Ширко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 39–41.

С помощью метода Галеркина на базе нелинейной модели Пейрарда – Бишопа для описания колебаний нуклеотидов получена частотная зависимость амплитуд нелинейных поперечных волн в молекуле ДНК. Рассчитаны амплитудно-частотные зависимости при вынужденных колебаниях нуклеотидов молекулы ДНК. Показано, что локальное раскрытие пар оснований в спиральных молекулах типа ДНК объясняется появлением больших амплитуд колебаний, которые могут быть инициированы взаимодействием ДНК с высоко- и низкомолекулярными соединениями природного и антропогенного происхождения, при определенных отношениях частоты собственных колебаний нуклеотидов ДНК с частотой вынуждающей силы.

Ил. 5. Библиогр. – 5 назв.

УДК 539.12

Кленицкий, Д. В. **Гидродинамическое рассмотрение процесса расширения кварк-глюонной плазмы** / Д. В. Кленицкий, В. Н. Чайчиц // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 42–44.

Изучение процесса образования кварк-глюонной плазмы в соударениях тяжелых ионов при высоких энергиях вызывает в последние годы большой интерес. Кварк-глюонная плазма – это то состояние вещества, в котором находилась наша Вселенная в первые мгновения после Большого взрыва. Главная цель эксперимента – создать в лаборатории сгусток кварк-глюонной плазмы, найти ее сигналы и исследовать свойства. Используя гидродинамическую теорию с масштабнo-инвариантными начальными условиями – модель Бьеркена, в работе последовательно рассмотрена эволюция равновесной кварк-глюонной плазмы, созданной в столкновении тяжелых ядер при высоких энергиях. Основное внимание уделено самосогласованности феноменологического описания фазовой эволюции горячей и плотной ядерной материи в ходе ее расширения (охлаждения) до окончательного разлета вторичных частиц. Получено выражение для объема кварк-глюонной плазмы, созданной в столкновении.

Ил. 1. Библиогр. – 9 назв.

УДК 531.19; 539.682

Жаркевич, А. В. **Учет корреляционного вклада в решеточную молекулярную теплоемкость кристалла с вакансиями** / А. В. Жаркевич, Е. В. Фарафонтова, И. И. Наркевич // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 45–47.

Ранее была сформулирована простая статистическая модель конденсированной системы с парным взаимодействием частиц, которая описывается потенциалом Леннард – Джонса. Заполнение частицами пары соседних ячеек, на которые делится весь объем системы, являлось независимым событием. Сформулировав вариационную задачу по минимизации свободной энергии по внутреннему параметру модели, получено аналитическое выражение для потенциальной части теплоемкости молекулярного кристалла с вакансиями. В данной статье рассмотрена уточненная модель, в которой учитывается корреляция в заполнении частицами пар микроячеек, на которые разделяется весь объем системы. Выведено выражение для молекулярной теплоемкости с учетом корреляции, что приводит к появлению малых добавок к молекулярной теплоемкости модели, которая их не учитывает.

Библиогр. – 4 назв.

УДК 550.348.436:539.376

Стеликов, Н. Е. **Применение кинетической теории ползучести для предсказания землетрясений** / Н. Е. Стеликов // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 48–50.

Землетрясения являются внешним проявлением процессов деформирования и разрушения, происходящих в земной коре. Характер этих процессов определяется физико-механическими свойствами земной коры как деформируемого твердого тела, а также ее напряженным состоянием, которое приводит земную кору в движение. В статье показана возможность прогнозирования землетрясений на основе ранее развитой кинетической теории ползучести. Приведенные примеры применения кинетической теории для описания изменения вертикальных перемещений земной коры при землетрясениях в Ниигата и Сан-Фернандо подтверждают, что она достаточно близко отражает развитие физико-механических процессов, происходящих в напряженных телах, в том числе и в земной коре, и может служить основой для разработки методики предсказания землетрясений.

Ил. 3. Библиогр. – 4 назв.

УДК 539.197

Чаевский, В. В. **Влияние компрессионных плазменных потоков на фазовый состав и электрохимическое поведение Mo-покрытий на Ni-основе** / В. В. Чаевский, В. Б. Дроздович, В. В. Углов // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 51–53.

Mo-покрытия, нанесенные методом КИБ с последующей обработкой компрессионными плазменными потоками на никелевую фольгу, образуют отдельную конденсированную фазу α – Mo с ОЦК-структурой. При обработке КПП в определенных режимах на никелевой основе образуется фрагментарно твердый раствор внедрения молибдена в никель со значительным преобладанием Ni-компонентов. В щелочном электролите исследуемые покрытия проявляют высокую электрокаталитическую активность при выделении кислорода и водорода. Полученные ионно-плазменные молибденовые покрытия после электрохимической поляризации в области потенциалов от $-1,3$ до $+0,9$ В в щелочном электролите исключают процессы наводороживания никелевой основы.

Табл. 1. Ил. 5. Библиогр. – 7 назв.

УДК 539.1.06:539.23.234

Тульев, В. В. **Элементный состав, структура и фрикционные характеристики поверхности резины, модифицированной ионно-ассистируемым осаждением покрытий на основе Mo, W** / В. В. Тульев, А. В. Касперович // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 54–56.

На резину марки 7-ИПР-1068 методом ионно-ассистируемого осаждения наносились металлосодержащие покрытия на основе Mo и W. Методами резерфордского обратного рассеяния и рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии установлено, что на поверхности образцов формируются покрытия, содержащие атомы осажденного покрытия (Mo, W), атомы технологических примесей (C, O), атомы из подложки (H, C, N, S, Zn). Создаваемые покрытия содержат металлический W (Mo), углерод в виде графита, соединения углерода и водорода, а также карбиды и оксиды осаждаемых металлов. Сформированные покрытия обладают повышенной износостойкостью по сравнению с поверхностью необработанной резины.

Ил. 7. Библиогр. – 5 назв.

УДК 621.373.8.

Рудик, К. И. **Особенности поляризации излучения жидкостных лазеров** / К. И. Рудик // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 57–59.

В работе проведены всесторонние исследования степени поляризации излучения лазеров на растворах сложных соединений в зависимости от температуры и вязкости раствора. Деполяризующим фактором излучения является отношение температуры T к вязкости η раствора. Полученные результаты установили линейную зависимость $I/P = f(T/\eta)$ для лазерного излучения растворов сложных молекул. Увеличение плотности энергии возбуждающего излучения приводит к сокращению времени жизни возбужденного состояния активных молекул, что обуславливает возрастание степени поляризации излучения. Степень поляризации зависит также от ориентации вектора E электрического поля возбуждающего света к оси резонатора жидкостного лазера. Показано, что величина степени поляризации излучения определяется анизотропией распределения возбужденных молекул к моменту излучения.

Ил. 4. Библиогр. – 4 назв.

УДК 537.633.2

Мадьяров, В. Р. **Холловские СВЧ-измерения в кремнии при комнатной температуре** / В. Р. Мадьяров // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 60–62.

Проанализировано фарадеевское вращение плоскости поляризации СВЧ-волны, зондирующей высокоомный полупроводниковый образец. Показано, что на частотах ~ 10 ГГц и в слабых магнитных полях связь между углом поворота плоскости поляризации и магнитной индукцией можно считать линейной, а вращение плоскости поляризации в этих условиях обусловлено эффектом Холла. Формула для угла поворота экспериментально проверена на образце монокристаллического кремния при значениях магнитной индукции в диапазоне 5–20 мТл. Измеренное значение подвижности согласуется со значением, полученным из холловских измерений на постоянном токе.

Ил. 3. Библиогр. – 6 назв.

УДК 535.373.2

Сапунов, В. В. **Определение энергии триплетного состояния хлорофилла *a* по данным межмолекулярного переноса энергии** / В. В. Сапунов // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 63–65.

На основании метода импульсного фотолиза изучено тушение триплетных состояний для пары хлорофилл *a* – мезо-тетрафенилпорфин в толуоле при 298 К. Предложено, что наблюдаемое тушение происходит путем образования долгоживущих возбужденных комплексов из взаимодействующих молекул. На основе выполненного кинетического анализа такого механизма тушения триплетных состояний молекул разработана методика определения значений разности энергий триплетных состояний двух молекул, между которыми идет перенос энергии. Используя этот способ, найдено, что для ХЛ в толуоле энергия триплетного состояния равна $10\,430\text{ см}^{-1}$. При применении методики, не учитывающей образование указанных комплексов, расчеты показали, что эта энергия составляет $10\,710\text{ см}^{-1}$. Сделан вывод о том, что в толуоле к иону магния ХЛ присоединена одна молекула дополнительного лиганда.

Ил. 2. Библиогр. – 4 назв.

УДК 681.1

Богослав, Н. М. **Анализ адаптивных систем водоподготовки котельных установок** / Н. М. Богослав // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 66–69.

Статья посвящена проблемам современного уровня автоматизации установок водоподготовки для котельного оборудования, рассмотрены основные факторы, оказывающие негативное влияние на состояние системы в целом. Пояснен выбор схемы и способа очистки в зависимости от качества исходной воды и требований, предъявляемых к обработанной воде. Дана классификация систем водоподготовки в соответствии с параметрами поступающих потоков и внешними факторами. Также рассмотрен один из вариантов адаптивной системы управления процессом водоочистки, приведен алгоритм работы схемы. В результате сделаны выводы о том, что контроль и управление водоподготовкой для энергетических систем требуют применения систем адаптивного управления, учитывающих изменение сезонных условий, нестационарность водного потока как по расходу, так и по составу и наличие критических событий.

Ил. 1. Библиогр. – 4 назв.

УДК 621.31

Василенко, Ю. А. **Автоматизированный электропривод тракта подачи руды протяженностью более 6 км** / Ю. А. Василенко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 70–72.

В статье рассматривается автоматизированный двухдвигательный электропривод конвейеров длиной более 6 км на базе преобразователей частоты с векторным типом управления. Выполненные исследования позволили выработать практические рекомендации для управления электроприводами конвейеров подачи руды протяженностью более 6 км.

Библиогр. – 3 назв.

УДК 589.183

Меточный ЯМР-расходомер временного типа с совмещением адаптации системы регистрации к измеряемому расходу и коррекцией измерительной базы по индукции поля анализатора / В. В. Сарока [и др.] // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 73–76.

В статье рассмотрены вопросы построения меточных ЯМР-расходомеров временного типа. В рамках статьи изложены основные теоретические и технические решения, которые могут быть реализованы при создании меточных измерителей расхода на эффекте ЯМР. На основании разработанных теоретических предположений возможно создание ЯМР-расходомера, сочетающего в себе адаптацию системы регистрации к измеряемому расходу и коррекцию измерительной базы по индукции поля анализатора. Использование адаптивной системы регистрации позволяет существенно повысить точность и быстродействие измерения расхода. Коррекция индукции поля анализатора учитывает возможные изменения температуры, состава и времени релаксации измеряемой жидкости.

Ил. 2. Библиогр. – 5 назв.

УДК 589.183

Методика определения информативного параметра меточного ЯМР-расходомера по спектральному разложению намагниченности при движении метки по измерительному участку / В. В. Сарока [и др.] // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 77–81.

В статье затрагиваются вопросы, связанные с актуальными методами анализа информативного параметра меточных расходомеров. Выполненные исследования позволили выработать практические рекомендации для создания методики определения информативного параметра меточного ЯМР-расходомера по спектральному разложению намагниченности при движении метки по измерительному участку. Разработанный способ дает возможность осуществлять определение информативного параметра с минимизацией погрешностей, которые могут вносить такие факторы, как изменение режима течения потока, температуры

измеряемой жидкости, а также времени релаксации. Использование приведенной методики может представлять интерес при создании меточных расходомеров различных типов: тепловых, электромагнитных, индукционных и др.

Ил. 2. Библиогр. – 3 назв.

УДК 663.52-007.5

Ульянов, Н. И. **Способ расчета разделения спиртовых смесей и оценка качества системы управления** / Н. И. Ульянов, И. Ф. Кузьмицкий // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 82–86.

Предложен способ адаптации метода моделирования многокомпонентной ректификации «от тарелки к тарелке» для расчета разделения спиртовых многокомпонентных смесей. Данный способ дает возможность редуцировать аналитические динамические модели моделями аperiodического звена второго порядка и звена запаздывания, что позволило определить передаточные функции для расчета показателей качества процесса ректификации. Проведен анализ полученных передаточных функций для различных веществ, входящих в состав ректифицированного спирта, и различных режимов производительности ректификационной установки, который показал, что наблюдаются существенно отличающиеся коэффициенты передачи. Это обуславливает применение цепи адаптации коэффициента усиления в системе автоматического управления. Для оценки качества управления ректификационной установкой с позиции управления качеством продукта и экономии энергоресурсов введен обобщенный критерий.

Табл. 1. Ил. 2. Библиогр. – 2 назв.

УДК 519.7

Кобринец, В. П. **Исследование тепловых режимов сушки твердых желатиновых капсул в условиях ОАО «Минскинтеркапс»** / В. П. Кобринец, Д. С. Карпович, В. Б. Михайлов // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 87–90.

Проведен анализ процесса сушки твердых желатиновых капсул как объекта контроля температурно-влажностных режимов по всем зонам сушки. Разработана функциональная схема контроля и регистрации температуры и влажности по зонам сушки, а также регистрации изменения параметров воздуха до и после кондиционера К-1600, обеспечивающего забор и подготовку наружного воздуха. Выявлены основные периоды процесса сушки, для каждого из этих периодов разработаны математические модели данного процесса, на основании которых исследованы статические и динамические характеристики. Это позволит определить действительное распределение полей температуры и влажности в зонах сушки и выработать рекомендации по улучшению режимов сушки капсул на отдельных стадиях, что в итоге приведет к снижению количества бракованных изделий при изготовлении твердых желатиновых капсул.

Табл. 1. Ил. 2. Библиогр. – 2 назв.

УДК 678.023.3:519.711.2

Байда, Ю. А. **Нелинейная динамическая модель процесса резиносмещения** / Ю. А. Байда // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 91–94.

В статье изучается нелинейная динамическая модель процесса резиносмещения. Проводится анализ ряда статей, которые описывают математические модели процесса. Исследуется движение смеси в зазоре между ротором и стенкой камеры. Предлагается метод расчета момента, создаваемого деформацией в зазоре. Рассматривается модель момента сопротивления по упрощенной одномерной модели для всего смесителя. Описывается динамическое моделирование важных параметров процесса. Анализируются температуры смеси, роторов, стенки камеры и охлаждающей воды. Процесс резиносмещения предлагается разделить на несколько стадий и для каждой стадии использовать различные уравнения и значения параметров.

Библиогр. – 4 назв.

УДК 004.021:004.942

Алданова, И. В. **Идентификация динамических характеристик процесса поликонденсации** / И. В. Алданова, И. Ф. Кузьмицкий // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 95–98.

В данной работе подробно изучено влияние на процесс поликонденсации основных технологических параметров, выбраны каналы управления, в соответствии с которыми проводились исследования. Разработана методика проведения эксперимента по снятию динамических характеристик, согласно выбранным каналам управления. Определена реакция системы на подачу возмущающего воздействия по всем каналам управления. Для идентификации динамических характеристик процесса был выбран метод, основанный на использовании рядов Вольтерра. Данный метод определяет нелинейные объекты с помощью линейных характеристик, что позволило сохранить все присущие линейным объектам свойства. По найденной структуре ряда Вольтерра была получена структурная схема объекта управления, включающая в себя основные каналы управления по температуре, давлению и вязкости в реакторах предварительной и основной поликонденсации.

Ил. 6. Библиогр. – 4 назв.

УДК 621.182:674.8:681.5

Сырец, М. В. **Анализ котельной на древесных отходах как объекта управления с размытыми параметрами** / М. В. Сырец // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 99–102.

В статье рассмотрена котельная на древесных отходах с точки зрения автоматического управления. Определены основные информационные переменные объекта: температура и состав топочных газов, температура подогреваемой в котельной воды. Установлено влияние на них различных возмущающих воздействий, в их числе: влажность и температура воздуха, влажность, зольность и размер частиц топлива, а также температура и расход обратной воды. Отмечено, что водогрейная котельная на древесных отходах является объектом управления с размытыми параметрами. Проведен анализ и критика существующих систем автоматического управления рассмотренным объектом. На основании полученных данных решено, что система управления котельной на древесных отходах нуждается в усовершенствовании.

Ил. 3. Библиогр. – 2 назв.

УДК 519.6

Жиляк, Н. А. **Математическая модель блока управления измерительными каналами** / Н. А. Жиляк, А. С. Кобайло // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 103–106.

В статье рассматривается математическая модель для построения блока управления измерительными каналами. Управление осуществляется группой объектов, т. е. каналами. Их виртуальная структура представляется в виде совокупности bitmap-карт, каждая из которых имеет свою программу управления (алгоритм). При управлении сложным объектом процессор по очереди обслуживает, опрашивает измерительные каналы. Эта очередь может осуществляться по жесткой программе или по мере поступления заявок от отдельных каналов с возможностью использования в последнем случае приоритетного обслуживания. В системе реализованы несколько алгоритмов управления AU_1, AU_2, \dots, AU_l , каждый из которых выбирается в зависимости от результата оценивания корреляционной функции входного воздействия $g(o)[nT]$ блоками выборки данных и коммутации выхода. Переключение между каналами осуществляется в реальном масштабе времени на программном уровне. На систему управления в данном случае возлагается функция распознавания образов, записанных в bitmap-картах, соответствующих определенным запросам по подключению того или иного канала.

Библиогр. – 4 назв.

Гурин, Н. И. **Организация структуры электронной обучающей системы с активным контролем приобретаемых знаний** / Н. И. Гурин, О. В. Герман // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 107–110.

Предложена структура электронной обучающей системы с активным контролем приобретаемых знаний, в которой весь учебный материал дисциплины, кроме традиционной разбивки на темы, разбивается далее на смысловые страницы и учебные объекты, составляющие семантическую сеть в виде направленного раскрашенного графа. При этом контроль знаний в ЭОС осуществляется как посредством тестовых заданий, функционально привязанных к разноуровневым объектам, так и непрерывно на основе анализа действий обучаемого при прохождении им учебного материала с использованием программируемой интерактивности мультимедийного пользовательского интерфейса.

Ил. 1. Библиогр. – 5 назв.

УДК 512.6

Кобайло, А. С. **Особенности представления математических моделей для автоматизации проектирования вычислительных систем реального времени** / А. С. Кобайло // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 111–114.

В статье рассмотрены методы представления и минимизации математических моделей вычислительного процесса, позволяющие автоматизировать процесс проектирования сложных технических объектов и сократить время проектирования систем реального времени, оптимизировать проектируемые системы по ряду технических характеристик. Метод синтеза математических моделей с требуемыми свойствами дает возможность уменьшить стоимость и сократить сроки проектирования и изготовления вычислительных структур, создавать вычислительные устройства, отличающиеся от структур, построенных на основе базовой модели, меньшими аппаратными затратами, стоимостью, габаритами, энергопотреблением при обеспечении требуемых функциональных возможностей, на начальной стадии проектирования сделать вывод о принципиальной возможности обеспечения требуемых свойств.

Библиогр. – 3 назв.

УДК 004.4'2

Кабак, Е. В. **Информационная модель системы контроля знаний** / Е. В. Кабак, Л. С. Мороз // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 115–118.

Статья посвящена информационной модели системы контроля знаний. Выбранная информационная модель представляет собой дополнение модели, предложенной международным стандартом IMS. Стандарт IMS – один из основных стандартов в области проектирования компьютерных тестов, модель, определяющая и стандартизирующая содержание, способы хранения и представления тестов (тестовых заданий) в электронном

обучении. Особое внимание в статье уделено вопросам проектирования структуры учебного теста и ее использования для формирования так называемого дерева теста. Дерево теста – сложная иерархическая структура. Данные, хранимые в вершинах дерева, позволяют компьютерной системе контроля знаний организовать управление процессом диагностики знаний и умений обучаемых в соответствии с представлениями разработчика теста.

Ил. 2. Библиогр. – 5 назв.

УДК 681.325.3

Романенко, Д. М. **Мажоритарное декодирование двумерных линейных итеративных кодов с объединенными диагональными проверками** / Д. М. Романенко, Д. В. Шиман // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 119–121.

В данной статье рассмотрены вопросы, касающиеся мажоритарного декодирования нового вида итеративного кода – двумерного линейного с двойными объединенными диагональными проверками. Обоснована целесообразность использования для декодирования четырех из пяти паритетов. Проанализировано исправление различных типов одиночных и двойных ошибок.

Ил. 2. Библиогр. – 5 назв.

УДК 621.391.26

Дятко, А. А. **Алгоритмы приведения отметок объектов радиолокационного наблюдения к единой системе координат** / А. А. Дятко, С. М. Костромицкий, П. Н. Шумский // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 122–125.

В статье рассматриваются алгоритмы преобразования координат объектов радиолокационного наблюдения, полученных в системах координат локальных РЛС, в систему координат единого центра обработки информации о воздушной обстановке. Разработанные алгоритмы могут быть использованы при проектировании автоматизированных систем обработки радиолокационной информации. Представленные алгоритмы реализованы в виде пакета прикладных программ, реализующих вышеописанные матричные преобразования, для применения на этапе третичной обработки информации в системах радиолокационного наблюдения за воздушной обстановкой.

Ил. 6. Библиогр. – 3 назв.

УДК 004.56

Смелов, В. В. **Методологические основы информационной безопасности автоматизированных систем** / В. В. Смелов // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 126–131.

Современная автоматизированная система является элементом глобального информационного пространства, в котором она взаимодействует с другими системами. Одной из важнейших задач, стоящих перед государством, является построение системы правил взаимодействия автоматизированных систем в общем информационном пространстве. Комплекс таких правил и систем различной природы (организационных, правовых, информационных), обеспечивающих основу для информационной безопасности в стране, называется инфраструктурой национальной информационной безопасности. Статья посвящена анализу инфраструктуры национальной информационной безопасности Республики Беларусь. Рассматривается правовая и нормативная база информационной безопасности, принципы управления, государственного регулирования и лицензирования, административная и уголовная ответственность в сфере защиты информации.

Табл. 1. Ил. 1. Библиогр. – 6 назв.

УДК 519.872

Зирко, О. Ф. **Расчет вероятности реализации требований в комплексной структурной модели системы массового обслуживания** / О. Ф. Зирко, В. И. Кудрявцев // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2009. – Вып. XVII. – С. 132–136.

Работа посвящена проблеме представления вероятности реализации требований систем массового обслуживания (СМО) с комплексным показателем требований. Анализ показал, что представление комплексной вероятности реализации требований выходит за пределы общепринятых оценок СМО и является неопределенной. Кроме того, комплексная форма вероятности реализации не является структурообразующей, что ограничивает возможности применения моделей СМО. Основная цель данной статьи – вывести полную вещественную вероятность реализации требований при комплексном представлении показателя реализации требований. За основу был взят подход к изучению вероятностей реализации через выявление и управление катастрофическими требованиями. Проведен расчет вероятности появления в системе катастрофических требований, выделена классификация катастрофических требований. Полученные результаты используются для структуризации комплексных моделей и для оценки вероятностных характеристик управляемых систем массового обслуживания.

Ил. 1. Библиогр. – 5 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА	3
Марченко В. М. Гибридные дифференциально-разностные системы и их приложения в теории динамических систем	3
Борковская И. М. Построение стабилизирующих регуляторов типа обратной связи для двумерных динамических систем с запаздыванием	8
Копейкина Т. Б. Определяющие уравнения в проблеме управляемости стационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием	11
Мататов В. И., Кричавец Е. Я., Любецкая Т. А., Рабчун Н. В. О подвижных особых точках решений автономной системы Гамильтона четвертого порядка	14
Можей Н. П. Почти симплектические однородные пространства	17
Соловьева И. Ф. Об особенностях решения задачи Троеша	21
МЕХАНИКА	24
Ласовский Р. Н., Бокун Г. С., Вихренко В. С. Кинетика фазовых расслоений в решеточных флюидах	24
Белов В. В. Статистическое описание однокомпонентной плазмы	27
Белов В. В., Немцов В. Б. Статистическая теория нелинейного упругого деформирования эластомеров	30
Гапанюк Д. В., Вихренко В. С. Термодиффузия в двухкомпонентном решеточном флюиде	33
Грода Я. Г., Гапанюк Д. В. Диффузия лэнгмюровского решеточного газа на статически неупорядоченной решетке с экспоненциальным распределением высот барьеров	36
Камлюк А. Н., Немцов В. Б., Ширко А. В. Модель локального расплетания ДНК	39
ФИЗИКА	42
Кленицкий Д. В., Чайчиц В. Н. Гидродинамическое рассмотрение процесса расширения кварк-глюонной плазмы	42
Жаркевич А. В., Фарафонтова Е. В., Наркевич И. И. Учет корреляционного вклада в решеточную молекулярную теплоемкость кристалла с вакансиями	45
Стеликов Н. Е. Применение кинетической теории ползучести для предсказания землетрясений	48
Чаевский В. В., Дроздович В. Б., Углов В. В. Влияние компрессионных плазменных потоков на фазовый состав и электрохимическое поведение Мо-покрытий на Ni-основе	51
Тулъев В. В., Касперович А. В. Элементный состав, структура и фрикционные характеристики поверхности резины, модифицированной ионно-ассистируемым осаждением покрытий на основе Mo, W	54
Рудик К. И. Особенности поляризации излучения жидкостных лазеров	57
Мадьяров В. Р. Холловские СВЧ-измерения в кремнии при комнатной температуре	60
Сапунов В. В. Определение энергии триплетного состояния хлорофилла <i>a</i> по данным межмолекулярного переноса энергии	63
ОБЩЕТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА	66
Богослав Н. М. Анализ адаптивных систем водоподготовки котельных установок	66
Василенко Ю. А. Автоматизированный электропривод тракта подачи руды протяженностью более 6 км	70
Сарока В. В., Оробей О. И., Гринюк Д. А., Анкуда М. А., Оробей И. О. Меточный ЯМР-расходомер временного типа с совмещением адаптации системы регистрации к измеряемому расходу и коррекцией измерительной базы по индукции поля анализатора	73

Сарока В. В., Оробей О. И., Гринюк Д. А., Анкуда М. А., Оробей И. О. Методика определения информативного параметра меточного ЯМР-расходомера по спектральному разложению намагниченности при движении метки по измерительному участку	77
Ульянов Н. И., Кузьмицкий И. Ф. Способ расчета разделения спиртовых смесей и оценка качества системы управления	82
Кобринец В. П., Карпович Д. С., Михайлов В. Б. Исследование тепловых режимов сушки твердых желатиновых капсул в условиях ОАО «Минскинтеркапс»	87
Байда Ю. А. Нелинейная динамическая модель процесса резиносмещения	91
Алданова И. В., Кузьмицкий И. Ф. Идентификация динамических характеристик процесса поликонденсации	95
Сырец М. В. Анализ котельной на древесных отходах как объекта управления с размытыми параметрами	99
Жиляк Н. А., Кобайло А. С. Математическая модель блока управления измерительными каналами	103
Гурин Н. И., Герман О. В. Организация структуры электронной обучающей системы с активным контролем приобретаемых знаний	107
Кобайло А. С. Особенности представления математических моделей для автоматизации проектирования вычислительных систем реального времени	111
Кабак Е. В., Мороз Л. С. Информационная модель системы контроля знаний	115
Романенко Д. М., Шиман Д. В. Мажоритарное декодирование двумерных линейных итеративных кодов с объединенными диагональными проверками	119
Дятко А. А., Костромицкий С. М., Шумский П. Н. Алгоритмы приведения отметок объектов радиолокационного наблюдения к единой системе координат	122
Смелов В. В. Методологические основы информационной безопасности автоматизированных систем	126
Зирко О. Ф., Кудрявцев В. И. Расчет вероятности реализации требований в комплексной структурной модели системы массового обслуживания	132
НАШИ ЮБИЛЯРЫ	137
Владимир Матвеевич Марченко	137
РЕФЕРАТЫ	139

Научное издание

Труды Белорусского государственного
технологического университета

Серия VI

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

Выпуск XVII

Редактор *Е. С. Ватечкина*
Компьютерная верстка *О. Ю. Шантарович, Д. С. Семижен*

Подписано в печать 25.05.2009. Формат 60×84¹/₈.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 19,3. Уч.-изд. л. 19,4.
Тираж 75 экз. Заказ .

Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13а.
Свидетельство № 1995 от 27.02.2003.
ЛИ № 02330/0549423 от 08.04.2009.

Отпечатано в лаборатории полиграфии учреждения образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13.
ЛП № 02330/0150477 от 16.01.2009.