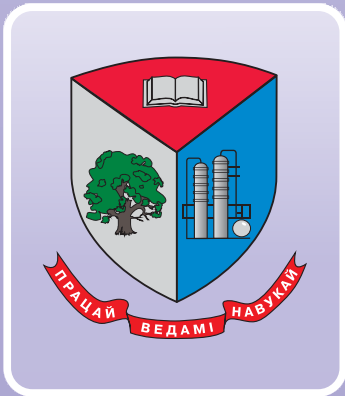


ISSN 2520-6141



ТРУДЫ БГТУ

Научный журнал



Серия 3

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
НАУКИ И ИНФОРМАТИКА**

№ 1 (242) 2021 год

Рубрики номера:

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Математика

Механика

Физика

ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Моделирование процессов

и управление в технических системах

Системный анализ и обучающие системы

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ



Минск 2021

Учреждение образования
«Белорусский государственный
технологический университет»

ТРУДЫ БГТУ

Научный журнал

Издается с июля 1993 года

Серия 3

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
И ИНФОРМАТИКА**

№ 1 (242) 2021 год

Выходит два раза в год

Минск 2021

Учредитель – учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет»

Главный редактор журнала – Войтов Игорь Витальевич, доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь

Редакционная коллегия журнала:

Шетько С. В., кандидат технических наук, доцент (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;
Жарский И. М., кандидат химических наук, профессор (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;
Черная Н. В., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;
Прокопчук Н. Р., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор химических наук, профессор, Республика Беларусь;
Водопьянов П. А., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор философских наук, профессор, Республика Беларусь;
Новикова И. В., доктор экономических наук, профессор, Республика Беларусь;
Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Долгова Т. А., кандидат физико-математических наук, доцент, Республика Беларусь;
Торчик В. И., доктор биологических наук, Республика Беларусь;
Захарук Т., доктор педагогических наук, профессор, Республика Польша;
Пайвинен Ристо, доктор наук, профессор, Финляндская Республика;
Барчик Стэфан, доктор наук, профессор, Словацкая Республика;
Жантасов К. Т., доктор технических наук, профессор, Республика Казахстан;
Харша Ратнавира, доктор наук, профессор, Королевство Норвегия;
Рангелова Е. М., доктор педагогических наук, профессор, Республика Болгария;
Шкляр Б. Ш., профессор, Государство Израиль;
Хассель Л. Г., доктор наук, профессор, Королевство Швеция;
Флюрик Е. А., кандидат биологических наук, доцент (секретарь), Республика Беларусь.

Редакционная коллегия серии:

Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор (главный редактор серии), Республика Беларусь;
Урбанович П. П., доктор технических наук, профессор (заместитель главного редактора серии), Республика Беларусь;
Вихренко В. С., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Колесников В. Л., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;
Асмыкович И. К., кандидат физико-математических наук, доцент, Республика Беларусь;
Калинин А. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Сайко А. П., доктор физико-математических наук, Республика Беларусь;
Квасов Н. Т., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Минченко Л. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Леваков А. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Мазаник С. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Щекин А. К., член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, Российская Федерация;
Головко М. Ф., член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, Украина;
Бартосевич Збигнев, доктор габилитованный, Республика Польша;
Шкляр Б. Ш., профессор, Государство Израиль;
Аргиракис Панос, доктор наук, профессор, Греческая Республика;
Орлюкас Антанас Феликсас, доктор наук, профессор, Литовская Республика;
Соловьева И. Ф., кандидат физико-математических наук, доцент (ответственный секретарь), Республика Беларусь.

Адрес редакции: ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.

Телефоны: главного редактора журнала – (+375 17) 343-94-32;

главного редактора серии – (+375 17) 399-49-60.

E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

Свидетельство о государственной регистрации средств массовой информации

№ 1329 от 23.04.2010, выданное Министерством информации Республики Беларусь.

Журнал включен в «Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований»

Educational institution
“Belarusian State Technological University”

PROCEEDINGS OF BSTU

Scientific Journal

Published monthly since July 1993

Issue 3

**PHYSICS AND MATHEMATICS.
INFORMATICS**

No. 1 (242) 2021

Published biannually

Minsk 2021

Publisher – educational institution “Belarusian State Technological University”

Editor-in-chief – Voitau Ihar Vital’evich, DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus

Editorial (Journal):

Shet’ko S. V., PhD (Engineering), Associate Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;
Zharskiy I. M., PhD (Chemistry), Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;
Chernaya N. V., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;
Prokopchuk N. R., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Chemistry), Professor, Republic of Belarus;
Vodop’yanov P. A., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Philosophy), Professor, Republic of Belarus;
Novikova I. V., DSc (Economics), Professor, Republic of Belarus;
Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Dolgova T. A., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Republic of Belarus;
Torchik V. I., DSc (Biology), Republic of Belarus;
Zakharuk T., DSc (Pedagogics), Professor, Republic of Poland;
Paivinen Risto, DSc, Professor, Republic of Finland;
Barcik Štefan, DSc, Professor, Slovak Republic;
Zhantasov K. T., DSc (Engineering), Professor, Republic of Kazakhstan;
Harsha Ratnaweera, DSc, Professor, Kingdom of Norway;
Rangelova E. M., DSc (Pedagogics), Professor, Republic of Bulgaria;
Shklyar B. Sh., Professor, State of Israel;
Hassel L. G., DSc, Professor, Kingdom of Sweden;
Flyurik E. A., PhD (Biology), Associate Professor (secretary), Republic of Belarus.

Editorial (Issue):

Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor (managing editor), Republic of Belarus;
Urbanovich P. P., DSc (Engineering), Professor, (sub-editor), Republic of Belarus;
Vikhrenko V. S., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Kolesnikov V. L., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;
Asmykovich I. K., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Republic of Belarus;
Kalinin A. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Sayko A. P., DSc (Physics and Mathematics), Republic of Belarus;
Kvasov N. T., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Minchenko L. I., DSc (Physics and Mathematics), Republic of Belarus;
Levakov A. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Mazanik S. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Shchekin A. K., Corresponding Member, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Russian Federation;
Golovko M. F., Corresponding Member, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Ukraine;
Bartosevich Zbigniew, DSc, Republic of Poland;
Shklyar B. Sh., Professor, State of Israel;
Argyris Panos, DSc, Professor, Republic of Greece;
Orlukas Antanas Feliksas, DSc, Republic of Lithuania;
Solov’yeva I. F., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor (executive editor), Republic of Belarus.

Contact: 13a, Sverdlova str., 220006, Minsk.
Telephones: editor-in-chief (+375 17) 343-94-32;
managing editor (+375 17) 399-49-60.
E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ SCIENCE ARTICLES

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.977

В. В. Горячкин¹, В. В. Крахотко¹, Н. И. Широканова¹, В. В. Игнатенко²

¹Белорусский государственный университет

²Белорусский государственный технологический университет

УПРАВЛЕНИЕ АНСАМБЛЕМ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ В КЛАССЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ

Для линейной системы с запаздыванием по управлению с постоянными интервальными коэффициентами (ансамбля систем) получены внешние оценки решений. Исследована задача управляемости ансамблем – перевод пучка траекторий системы из одного множества из R^n в другое за конечное время в классе кусочно-постоянных управлений. В случае интервальной неопределенности нахождение управления сведено к решению задачи линейного программирования, сформулированной по коэффициентам систем ансамбля. Доказаны условия управляемости ансамблем, которые представлены в форме оптимизационной задачи.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, управляемость, интервальный анализ, линейная система с запаздыванием.

Для цитирования: Горячкин В. В., Крахотко В. В., Широканова Н. И., Игнатенко В. В. Управление ансамблем линейных систем с запаздыванием по управлению в классе кусочно-постоянных функций // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 1 (242). С. 5–8.

V. V. Goryachkin¹, V. V. Krakhotko¹, N. I. Shirokanova¹, V. V. Ignatenko²

¹Belarusian State University

²Belarusian State Technological University

CONTROL OF AN ENSEMBLE OF LINEAR SYSTEMS WITH A DELAY IN CONTROL IN THE CLASS OF PIECEWISE CONSTANT FUNCTIONS

For a linear system with a delay in control with constant interval coefficients (ensemble of systems), external estimates of solutions are obtained. The task of controllability of an ensemble is studied – the translation of a bundle of system trajectories from one R^n set to another in a finite time in the class of piecewise constant controls. In the case of interval uncertainty the control finding is reduced to solving

a linear programming problem formulated due to the ensemble systems coefficients Conditions for the controllability of an ensemble, which are presented in the form of an optimization problem, are proved.

Key words: system of differential equations, controllability, interval analysis, linear system with delay.

For citation: Goryachkin V. V., Krakhotko V. V., Shirokanova N. I., Ignatenko V. V. Control of an ensemble of linear systems with a delay in control in the class of piece-wise constant functions. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2021, no. 1 (242), pp. 5–8 (In Russian).

Введение. Во многих задачах теории оптимального управления, теории систем параметры исследуемых уравнений известны лишь с некоторой точностью, а именно известны лишь интервалы, в которых они принимают значения. В этом плане интервальные модели можно рассматривать как эффективное средство описания широкого круга явлений с неопределенностями. Интервальная модель представляется как континуум моделей с параметрами, принимающими значения из допустимых интервалов. Подход исследования таких интервальных моделей состоит в нахождении одного приемлемого детерминированного решения для всего континуума моделей. Изучение интервальных моделей важно и перспективно для многих прикладных задач, таких как задачи управляемости, стабилизации и т. п. Это приводит к необходимости исследования динамических систем с интервальными коэффициентами [1–6] на управляемость.

В данной статье исследуется управляемость ансамбля систем с запаздыванием по управлению, для которых получены достаточные условия управляемости.

Основная часть. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u(t) + B_2 u(t-h), \\ x(0) = x_*, \in X^*, x(t^*) = x^* \in X^*, \\ u(\cdot) = \{u(t) \equiv 0, t \in [-h, 0]\}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $x \in R^n$, $u \in R^r$, $X^*, X_* \subset R^n$; $A \in R^{n \times n}$, $B_1, B_2 \in R^{n \times r}$ – неопределенные матрицы со значениями в замкнутых интервалах

$$\underline{A} \leq A \leq \bar{A}, \underline{B}_1 \leq B_1 \leq \bar{B}_1, \underline{B}_2 \leq B_2 \leq \bar{B}_2; \quad (2)$$

t^* – фиксированный момент времени; $h > 0$ – число (запаздывание). Матричные и векторные неравенства следует понимать поэлементно. Множества

$$X_* = \{x \in R^n : \underline{x}_* \leq x_* \leq \bar{x}_*\},$$

$$X^* = \{x \in R^n : \underline{x}^* \leq x^* \leq \bar{x}^*\} -$$

это заданные параллелепипедные множества (брусы в R^n) [2].

Матрицы A, B_1, B_2 , удовлетворяющие (2), будем называть допустимыми.

Ансамблем систем будем называть совокупность систем вида (1), коэффициенты которых –

допустимые матрицы, принимающие значения в интервалах (2) независимо друг от друга.

Введем кусочно-постоянные управления

$$u(t) = u^k, \tau_{k-1} \leq t < \tau_k, k = 1, 2, \dots, s \quad (3)$$

с фиксированными моментами разрыва первого рода $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_s = t^*$, векторы u^1, u^2, \dots, u^s принадлежат множеству $U \subset R^r$, которое определяется конечной системой линейных неравенств.

Обозначим через $X(t) \in R^n$ множество фазовых состояний $x(t)$ ансамбля (1) для некоторого кусочно-постоянного управления $u(t)$ в момент времени t , $0 \leq t \leq t^*$, с начальным состоянием $x_* = x(0) \in X_*$ при любых допустимых матрицах A, B_1, B_2 .

Ставится следующая задача: для любого начального состояния из множества X_* определить кусочно-постоянное управление (3) (одно и то же для всех систем ансамбля), при котором выполняется включение $X(t^*) \subset X^*$. Если поставленная задача разрешима в этом смысле, то будем говорить об управляемости ансамбля. Очевидно, что поставленная задача имеет решение лишь в исключительных случаях.

Рассмотрим систему (1) с допустимыми матрицами A, B_1, B_2 , условиями $x_* \in X_*, x^* \in X^*$ и произвольным кусочно-постоянным управлением $u(t), t \in [0, t^*]$. По формуле Коши имеем

$$\begin{aligned} x(t^*) = & F(t^*, 0)x_0 + \int_0^{t^*} F(t^*, \tau) \times \\ & \times [B_1 u(\tau) + B_2 u(\tau-h)] d\tau = F(t^*, 0)x_0 + \\ & + \sum_{k=1}^s \left(\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} [F(t^*, \tau)B_1 + F(t^*, \tau+h)B_2] d\tau \right) u^k, \end{aligned}$$

где $F(t^*, \tau) = e^{A(t^*-\tau)}$ – фундаментальная матрица однородной системы удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F(t^*, \tau)}{\partial \tau} = -F(t^*, \tau)A$$

с начальными условиями

$$F(t^*, t^* - 0) = E_n, F(t^*, \tau) \equiv 0, \tau \geq t^* + 0.$$

Обозначим

$$d = F(t^*, 0)x_*, C_k = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} [F(t^*, \tau)B_1 + F(t^*, \tau + h)B_2]d\tau = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} F(t^*, \tau)d\tau(B_1 + e^{-Ah}B_2) = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} F(t^*, \tau)d\tau B, k = \overline{1, s}.$$

Тогда очевидно, что множество векторов $x(t^*)$ ансамбля систем (1) в момент времени $t = t^*$, отвечающее всем допустимым A, B_1, B_2 и начальному состоянию x_* , образует множество $X(t^*)$.

Можно показать, используя процедуры оценивания произведения интервальных матриц [5, с. 68], что матрица $B = B_1 + e^{-Ah}B_2$ принимает значение из замкнутого интервала $[B_0 - \Delta B, B_0 + \Delta B]$ (задан в симметричной форме) и интервальные оценки вектора d и матриц C_k имеют вид

$$\underline{d} \leq d \leq \overline{d}, \underline{C}_k \leq C_k \leq \overline{C}_k, k = 1, 2, \dots, s, \quad (4)$$

где $\underline{d}, \overline{d}, \underline{C}_k, \overline{C}_k$ определяются по формулам (17)–(20) из работы [4].

Матричные интервалы (4) можно также представить в симметричной форме [2]:

$$[C_k] = [\underline{C}_k, \overline{C}_k] = [C_{0k} - \Delta C_k, C_{0k} + \Delta C_k], k = 1, 2, \dots, s,$$

где $C_{0k} = (\overline{C}_k + \underline{C}_k) / 2$ – центр и $\Delta C_k = (\overline{C}_k - \underline{C}_k) / 2$ – радиус интервальной матрицы $[C_k]$.

Тогда внешняя интервальная оценка [6, с. 55] множества $X(t^*)$ примет вид

$$\underline{d} + \sum_{k=1}^s (C_{0k}u^k - \Delta C_k |u^k|) \leq x \leq \overline{d} + \sum_{k=1}^s (C_{0k}u^k + \Delta C_k |u^k|), \quad (5)$$

где $|u^k|$ понимается как вектор модулей координат вектора u^k .

Пусть $\varepsilon \geq 0, \varepsilon \in R^n$ – любой вектор. Обозначим $X_\varepsilon^* = \{x \in R^n : x^* - \varepsilon \leq x \leq x^* + \varepsilon\}$ замкнутую ε -окрестность бруса X^* .

Из полученной оценки (5), следует, что $X(t^*) \subset X_\varepsilon^*$ имеет место тогда, когда

$$\underline{d} + \sum_{i=1}^n (C_{0k}u^k - \Delta C_k |u^k|) \geq \underline{x}^* - \varepsilon, \quad (6)$$

$$\overline{d} + \sum_{i=1}^n (C_{0k}u^k + \Delta C_k |u^k|) \leq \overline{x}^* + \varepsilon.$$

Составим по условиям (6) задачу нелинейного программирования:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n \rightarrow \min,$$

$$\underline{d} + \sum_{k=1}^s (C_{0k}u^k - \Delta C_k |u^k|) \geq \underline{x}^* - \varepsilon, \quad (7)$$

$$\overline{d} + \sum_{k=1}^s (C_{0k}u^k + \Delta C_k |u^k|) \leq \overline{x}^* + \varepsilon,$$

$$\varepsilon \geq 0, u^k \in U, k = \overline{1, s}.$$

Таким образом, в задаче (7) ищется управление (3), для которого внешняя оценка множества $X(t^*)$ находится в минимальной ε -окрестности бруса X^* (под минимальностью ε -окрестности бруса понимается окрестность бруса с минимальной нормой вектора $\varepsilon : \|\varepsilon\| = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$).

Очевидно, задачу (7) можно переписать в виде следующей задачи линейного программирования:

$$e' \cdot \varepsilon \rightarrow \min,$$

$$-\sum_{k=1}^s (C_{0k}u^k - \Delta C_k w^k) - \varepsilon \leq \underline{d} - \underline{x}^*,$$

$$\overline{d} + \sum_{k=1}^s (C_{0k}u^k + \Delta C_k w^k) - \varepsilon \leq \overline{d} + \overline{x}^*,$$

$$\varepsilon \geq 0, -w^k \leq u^k \leq w^k, u^k \in U, w^k \geq 0,$$

$$k = \overline{1, s}, e' = (1, 1, \dots, 1), \quad (8)$$

где неизвестными будут ε и $u^k, w^k, k = \overline{1, s}$.

Ясно, что в задаче (8) множество планов не пусто и целевая функция ограничена на нем снизу – значит, решение задачи (8) существует.

Следовательно, откорректированная постановка задачи управляемости ансамбля (1) звучит так: для любого начального состояния из множества X_* определить кусочно-постоянное управление (одно и то же для всех систем ансамбля) и минимальный ε -брус множества X^* , что выполняется включением $X(t^*) \subset X_\varepsilon^*$.

Поэтому справедлива теорема.

Теорема. Для управляемости ансамбля систем (1) в классе кусочно-постоянных функций достаточно, чтобы разрешимая задача линейного программирования (8) имела оптимальный план $(\varepsilon^0, u^{k0}, w^{k0}, k = \overline{1, s})$. В этом случае соответствующее управление переводит пучок траекторий системы из X_* в минимальную ε^0 -окрестность бруса X^* . Если в решении $\varepsilon^0 = 0$, то задача решается точно.

Заключение. Полученные достаточные условия управляемости интервальной системы с запаздыванием по управлению гарантируют попадание пучка траекторий системы (1) в ε^0 -окрестность бруса X^* . Этот результат можно перенести на более сложные объекты, например, интервальные системы с запаздыванием по состоянию.

Список литературы

1. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. С. 392.
2. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. С. 356.
3. Гайшун И. В., Горячкин В. В., Крахотко В. В. Оценка решений двухпараметрической дискретной системы с интервальными коэффициентами // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.- мат. навук. 2014. № 3. С. 5–8.
4. Гайшун И. В., Горячкин В. В. Робастная и интервальная наблюдаемость двухпараметрических дискретных систем с интервальными коэффициентами // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.- мат. навук. 2016. № 2. С. 6–9.
5. Ащепков Л. Т. Управляемость интервальной линейной дискретной системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 3. С. 67–74.
6. Ащепков Л. Т. Внешние оценки и ступенчатая управляемость интервальной линейной системы // Автоматика и телемеханика. 2008. № 4. С. 51–56.

References

1. Kurzhanski A. B. *Upravleniye i nablydeniye v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under conditions of uncertainty]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 392 p.
2. Alefel'd G., Herzberger Yu. *Vvedeniye v interval'nyye vychisleniya* [Introduction to interval calculations]. Moscow, Mir Publ., 1987. 356 p.
3. Gaishun I. V., Goryachkin V. V., Krakhotko V. V. Estimation of solutions of a two-parameter discrete system with interval coefficients. *Vesti NAN Belarusi* [Bulletin of the NAS of Belarus], series Physics and Mathematics, 2014, no. 3, pp. 5–8 (In Russian).
4. Gaishun I. V., Goryachkin V. V. Robust and interval observability of two-parameter discrete systems with interval coefficients. *Vesti NAN Belarusi* [Bulletin of the NAS of Belarus], series Physics and Mathematics, 2016, no. 2, pp. 6–9 (In Russian).
5. Aschepkov L. T. Controllability of an interval linear discrete system. *Izvestiya RAN. Teorii i sistemy upravleniya* [News RAS. Theory and control systems], 2007, no. 3, pp. 67–74 (In Russian).
6. Aschepkov L. T. External estimations and step control of an interval linear system. *Avtomatika i telemekhanika* [Automatics and telemechanics], 2008, no. 4, pp. 51–56 (In Russian).

Информация об авторах

Горячкин Владимир Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры технологий программирования. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: gorvv@bsu.by

Крахотко Валерий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры методов оптимального управления. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: krakhotko@bsu.by

Широканова Наталья Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей математики и информатики. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: shirokanova@bsu.by

Игнатенко Василий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ihnatsenko@tut.by

Information about the authors

Goryachkin Vladimir Viktorovich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Programming Technologies. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gorvv@bsu.by

Krakhotko Valeriy Vasil'yevich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Optimal Control Methods. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: krakhotko@bsu.by

Shirokanova Natalia Ivanovna – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of General Mathematics and Computer Science. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: shirokanova@bsu.by

Ignatenko Vasilii Vasil'yevich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ihnatsenko@tut.by

Поступила после доработки 30.11.2020

УДК 517.977

А. А. Якименко

Белорусский государственный технологический университет

К ВОПРОСУ О МОДАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В ОБЩЕЦИКЛИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В статье рассматривается решение задачи модального управления для одной трехмерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию в общециклическом случае. Дается определение задачи модального управления для исследуемой системы. При решении этой задачи применяются линейные регуляторы по типу обратной связи, содержащие как линейную, так и интегральную части. Эти регуляторы используют информацию как о текущем состоянии системы, так и векторы состояний и их производные в предыдущие моменты времени. Регуляторы получены в явной форме как элементарные функции параметров исходной системы и ее вектора состояния. Указан вид характеристического квазиполинома замкнутой этим регулятором исходной системы нейтрального типа.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, модальное управление, регуляторы, обратная связь, запаздывание.

Для цитирования: Якименко А. А. К вопросу о модальном управлении одной трехмерной системой нейтрального типа в общециклическом случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 1 (242). С. 9–12.

A. A. Yakimenka

Belarusian State Technological University

TO THE QUESTION OF MODAL CONTROL FOR ONE THREE-DIMENSIONAL NEUTRAL TYPE SYSTEM IN GENERAL CYCLIC CASE

The paper deals with the solution of the modal control problem for a three-dimensional stationary dynamic system with a delayed argument of a neutral type with one input and one state delay in general cyclic case. The definition of the problem of modal control for the studied system is given. To solve this problem, linear feedback regulators are used that contain both linear and integral parts. These regulators use information about the current state of the system, as well as state vectors and their derivatives at previous times. Regulators are obtained in explicit form as elementary functions of the parameters of the original system and its state vector. The characteristic quasi-polynomial of the initial neutral type system closed by this regulator is given.

Key words: neutral type systems, modal control, regulators, feedback control, lag.

For citation: Yakimenka A. A. To the question of modal control for one three-dimensional neutral type system in general cyclic case. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2021, no. 1 (242), pp. 9–12 (In Russian).

Введение. Задача модального управления – одна из основных задач теории управления. Она хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа решение задачи модального управления значительно сложнее. В статье производится обобщение результатов, полученных в источнике¹, на одну трехмерную систему нейтрального типа в общециклическом случае.

Основная часть. Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) +$$

$$+ A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где $A_i, i = 0, 1, 2$ – постоянные 3×3 -матрицы; $h > 0$ – постоянное запаздывание; b – ненулевой 3-вектор. Не ограничивая общности, считаем $b' = [0, 0, 1]$ («'» означает транспонирование).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^L \sum_{j=1}^M q'_{ij} x^{(i)}(t-jh) + \int_{-h}^0 g'(s) x(t+s) ds, \quad (2)$$

где q_{00}, q_{ij} – 3-векторы; $g(s), s \in [-h, 0]$ – непрерывная 3-вектор-функция;

¹Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае // Труды БГТУ. 2017, № 2. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. С. 25–27.

$$x^{(i)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^i}{dt^i} x(t), \quad x^{(0)}(t) \equiv x(t).$$

Характеристическое уравнение системы (1) имеет следующий вид:

$$\det \left[A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3 \right] \equiv \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \tilde{\alpha}_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \quad (3)$$

где числа $\tilde{\alpha}_{ij}$ вычисляются как функции матриц $A_i, i=0, 1, 2$, в частности $\tilde{\alpha}_{00} = \det A_0, \tilde{\alpha}_{30} = 1, \tilde{\alpha}_{33} = \det A_2$.

Определение 1. Система (1) будет модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперед заданных чисел $\alpha_{ij}, i=0, 1, 2, 3, j=0, 1, 2, 3, \alpha_{30}=1$ найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет вид (ср. с (3)):

$$\det \left[A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3 + bU(\lambda) \right] \equiv \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \alpha_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0,$$

где $U(\lambda)$ – регулятор (2) в частотной области.

Рассмотрим еще одно определение модальной управляемости

Определение 2. Система (1) будет модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперед заданных чисел $\alpha_{ij}, i=0, 1, 2, j=0, 1, 2, \alpha_{20}=1, \alpha_{3j}, j=0, 1, 2$ найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет вид

$$\det \left[A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3 + bU(\lambda) \right] \equiv \left(\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \alpha_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} \right) \times \left(\alpha_{30} + \alpha_{31} e^{-\lambda h} + \alpha_{32} \lambda e^{-\lambda h} + \lambda \right) = 0.$$

Можно показать, что определения 1 и 2 эквивалентны.

Введем (3×3) -матрицы:

$$A(\lambda) = A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h},$$

$$W(\lambda) = \left[A^2(\lambda)b, A(\lambda)b, b \right], \quad \lambda \in \square \subset \mathbb{C}.$$

Рассмотрим общециклический случай:

$$\det W(\lambda) = c(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}), \quad (c \neq 0).$$

Пусть матрица $A(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \beta_2 \lambda e^{-\lambda h} & c(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) \\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & 1 \\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Здесь $\beta_i, i=0, 1, 2, c, \gamma_0$ – некоторые действительные числа; $a_{ij}(\lambda), i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$ – квазиполиномы:

$$a_{ij}(\lambda) = a_{ij0} + a_{ij1} e^{-\lambda h} + a_{ij2} \lambda e^{-\lambda h},$$

где $a_{ijk} \in \mathbb{R}; k=0, 1, 2$.

Сделаем в системе (1) замену переменной по правилу

$$x = T_1(\lambda)y,$$

где

$$T_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_{11}(\lambda) + \eta_1(\lambda) & -a_{12}(\lambda) + \eta_2(\lambda) & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда система (1) с новой переменной в частотной области примет вид

$$\lambda y = \tilde{A}(\lambda)y + bU(\lambda)y, \quad (4)$$

$$\text{где } \tilde{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & 0 \\ \eta_1(\lambda) & \eta_2(\lambda) & 1 \\ b_{31}(\lambda) & b_{32}(\lambda) & b_{33}(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$b_{31}(\lambda) = a_{31}(\lambda) + a_{11}(\lambda)a_{21}(\lambda) - a_{11}(\lambda)\eta_1(\lambda) - a_{21}(\lambda)a_{33}(\lambda) + a_{22}(\lambda)\eta_1(\lambda) + a_{33}(\lambda)\eta_1(\lambda) - \eta_1(\lambda)\eta_2(\lambda),$$

$$b_{32}(\lambda) = a_{32}(\lambda) + a_{12}(\lambda)a_{21}(\lambda) - a_{12}(\lambda)\eta_1(\lambda) - a_{22}(\lambda)a_{33}(\lambda) + a_{22}(\lambda)\eta_2(\lambda) + a_{33}(\lambda)\eta_2(\lambda) - \eta_2^2(\lambda),$$

$$b_{33}(\lambda) = a_{22}(\lambda) + a_{33}(\lambda) - \eta_2(\lambda),$$

$\eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda)$ – функции, которые определим далее.

Регулятор вида (2) в частотной области будем искать в виде

$$U_1(\lambda)y = (-b_{31}(\lambda), -b_{32}(\lambda), \eta_3(\lambda) - b_{33}(\lambda))y. \quad (5)$$

Тогда матрица $\tilde{A}(\lambda)$ системы (4), замкнутой этим регулятором, примет вид

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a_{33}(\lambda) \end{bmatrix} \tilde{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & 0 \\ \eta_1(\lambda) & \eta_2(\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & \eta_3(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Рассмотрим уравнение

$$\lambda^2 + (\gamma_1 - \beta_0)\lambda + \beta_1\gamma_0 - \beta_0\gamma_1 \equiv \\ \equiv (\lambda - \xi_1)(\lambda - \xi_2) = 0, \quad \lambda, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}.$$

Пусть выполнено условие

$$\xi_1 \neq \xi_2. \quad (7)$$

Рассмотрим величины

$$\delta(\xi_i) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\xi_i h} - \xi_i, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Пусть функции $\eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda)$ в (6) имеют следующий вид:

$$\eta_1(\lambda) = -\alpha_{22}\lambda e^{-\lambda h} + (\alpha_{22}\beta_0 - \alpha_{21}\beta_1)e^{-\lambda h} - \\ - (\alpha_{12} + \alpha_{22}(\xi_1 + \xi_2))e^{-\lambda h} + \frac{1}{\beta_1}(-\alpha_{22}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \\ + \alpha_{12}\beta_0 + \alpha_{22}\beta_0(\xi_1 + \xi_2) - \alpha_{11}\beta_1 - \beta_1^2 - \\ - \alpha_{02} - \alpha_{22}\xi_1\xi_2 - \alpha_{21}\beta_1(\xi_1 + \xi_2) - \alpha_{12}(\xi_1 + \xi_2)) + \\ + \frac{1}{\beta_1(\xi_1 - \xi_2)\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)}(\alpha_{22}(\delta(\xi_1)\xi_2^4 - \delta(\xi_2)\xi_1^4) + \\ + (\alpha_{21}\beta_1 + \alpha_{12} - 2\alpha_{22}\beta_0)(\delta(\xi_1)\xi_2^3 - \delta(\xi_2)\xi_1^3) + \\ + (-2\alpha_{12}\beta_0 + \alpha_{02} - \alpha_{21}\beta_0\beta_1 + \alpha_{11}\beta_1 + \beta_1^2 + \alpha_{22}\beta_0^2) \times \\ \times (\delta(\xi_1)\xi_2^2 - \delta(\xi_2)\xi_1^2) + \\ + (\alpha_{10}\beta_1^2 - \alpha_{11}\beta_0\beta_1 - 2\alpha_{02}\beta_0 + \alpha_{12}\beta_0^2 + \alpha_{01}\beta_1) \times \\ \times (\delta(\xi_1)\xi_2 - \delta(\xi_2)\xi_1) + \\ + (\alpha_{00}\beta_1^2 + \alpha_{02}\beta_0^2 - \alpha_{01}\beta_0\beta_1)(\delta(\xi_1) - \delta(\xi_2)) + \\ + \frac{1}{(\xi_1 - \xi_2)\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)} \times \\ \times \left(\alpha_{22} \left(\delta(\xi_1)\xi_2^4 \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_2)} - \delta(\xi_2)\xi_1^4 \frac{e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_1)} \right) + \right. \\ \left. + (\alpha_{21}\beta_1 + \alpha_{12} - 2\alpha_{22}\beta_0) \times \right. \\ \left. \times \left(\delta(\xi_1)\xi_2^3 \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_2)} - \delta(\xi_2)\xi_1^3 \frac{e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_1)} \right) + \right. \\ \left. + (-2\alpha_{12}\beta_0 + \alpha_{02} - \alpha_{21}\beta_0\beta_1 + \alpha_{11}\beta_1 + \beta_1^2 + \alpha_{22}\beta_0^2) \times \right. \\ \left. \times \left(\delta(\xi_1)\xi_2^2 \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_2)} - \delta(\xi_2)\xi_1^2 \frac{e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_1)} \right) + \right. \\ \left. + (\alpha_{10}\beta_1^2 - \alpha_{11}\beta_0\beta_1 - 2\alpha_{02}\beta_0 + \alpha_{12}\beta_0^2 + \alpha_{01}\beta_1) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\delta(\xi_1)\xi_2 \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_2)} - \delta(\xi_2)\xi_1 \frac{e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_1)} \right) + \right. \\ \left. + (\alpha_{00}\beta_1^2 + \alpha_{02}\beta_0^2 - \alpha_{01}\beta_0\beta_1) \times \right. \\ \left. \times \left(\delta(\xi_1) \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_2)} - \delta(\xi_2) \frac{e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_1)} \right) \right). \\ \eta_2(\lambda) = -\beta_0 - \alpha_{10} - \alpha_{21}\lambda e^{-\lambda h} + \\ + \left(\frac{1}{\beta_1}((\beta_0 - (\xi_1 + \xi_2))(\alpha_{22}(\beta_0 - (\xi_1 + \xi_2)) - \alpha_{21}\beta_1 - \right. \\ - \alpha_{12}) - \alpha_{21}\beta_1 - \alpha_{12}) + \beta_0(\alpha_{12} + \alpha_{22}(\xi_1 + \xi_2)) \Big) - \\ - \frac{1}{\beta_1(\xi_1 - \xi_2)}(\alpha_{22}(\xi_1^3 - \xi_2^3) + (\alpha_{12} + \alpha_{21}\beta_1)(\xi_1^2 - \xi_2^2) + \\ + \alpha_{22}\beta_1(\xi_1^2 e^{-\xi_1 h} - \xi_2^2 e^{-\xi_2 h}) + \\ + \alpha_{11}\beta_1(\xi_1 - \xi_2) + \alpha_{12}\beta_1(\xi_1 e^{-\xi_1 h} - \xi_2 e^{-\xi_2 h}) + \\ + \alpha_{02}\beta_1(e^{-\xi_1 h} - e^{-\xi_2 h})) + \frac{\beta_1}{\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)(\xi_1 - \xi_2)} \times \\ \times (\alpha_{22}(\xi_1^2 \delta(\xi_2) e^{-2\xi_1 h} - \xi_2^2 \delta(\xi_1) e^{-2\xi_2 h}) + \\ + \alpha_{21}(\xi_1^2 \delta(\xi_2) e^{-\xi_1 h} - \xi_2^2 \delta(\xi_1) e^{-\xi_2 h}) + \\ + \xi_1^2 \delta(\xi_2) - \xi_2^2 \delta(\xi_1) + \\ + \alpha_{12}(\xi_1 \delta(\xi_2) e^{-2\xi_1 h} - \xi_2 \delta(\xi_1) e^{-2\xi_2 h}) + \\ + \alpha_{11}(\xi_1 \delta(\xi_2) e^{-\xi_1 h} - \xi_2 \delta(\xi_1) e^{-\xi_2 h}) + \\ + \alpha_{10}(\xi_1 \delta(\xi_2) - \xi_2 \delta(\xi_1)) + \\ + \alpha_{02}(\delta(\xi_2) e^{-2\xi_1 h} - \delta(\xi_1) e^{-2\xi_2 h}) + \\ + \alpha_{01}(\delta(\xi_2) e^{-\xi_1 h} - \delta(\xi_1) e^{-\xi_2 h}) + \\ + \alpha_{00}(\delta(\xi_2) - \delta(\xi_1))) e^{-\lambda h} + \frac{1}{\beta_1 \delta(\xi_1) \delta(\xi_2) (\xi_1 - \xi_2)} \times \\ \times (\alpha_{22} \left((\beta_0 - \xi_1) \delta(\xi_1) \xi_2^4 \frac{(e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_2)} - \right. \\ \left. - (\beta_0 - \xi_2) \delta(\xi_2) \xi_1^4 \frac{(e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_1)} \right) + \\ + (-2\alpha_{22}\beta_0 + \alpha_{21}\beta_1 + \alpha_{12}) \times \\ \times \left((\beta_0 - \xi_1) \delta(\xi_1) \xi_2^3 \frac{(e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_2)} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -(\beta_0 - \xi_2) \delta(\xi_2) \xi_1^3 \frac{(e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_1)} \Bigg) + \\
& + (-2\alpha_{12}\beta_0 + \alpha_{02} - \alpha_{21}\beta_0\beta_1 + \alpha_{11}\beta_1 + \beta_1^2 + \alpha_{22}\beta_0^2) \times \\
& \times \left((\beta_0 - \xi_1) \delta(\xi_1) \xi_2^2 \frac{(e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_2)} - \right. \\
& \left. - (\beta_0 - \xi_2) \delta(\xi_2) \xi_1^2 \frac{(e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_1)} \right) + \\
& + (\alpha_{10}\beta_1^2 - \alpha_{11}\beta_0\beta_1 - 2\alpha_{02}\beta_0 + \alpha_{12}\beta_0^2 + \alpha_{01}\beta_1) \times \\
& \times \left((\beta_0 - \xi_1) \delta(\xi_1) \xi_2 \frac{(e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_2)} - \right. \\
& \left. - (\beta_0 - \xi_2) \delta(\xi_2) \xi_1 \frac{(e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_1)} \right) + \\
& + (\alpha_{00}\beta_1^2 + \alpha_{02}\beta_0^2 - \alpha_{01}\beta_0\beta_1) \times \\
& \times \left((\beta_0 - \xi_1) \delta(\xi_1) \frac{(e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_2)} - \right.
\end{aligned}$$

$$\left. - (\beta_0 - \xi_2) \delta(\xi_2) \frac{(e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_1)} \right) \Bigg).$$

Пусть $\eta_3(\lambda)$ в регуляторе (5) имеет вид

$$\eta_3(\lambda) = -\alpha_{30} - \alpha_{31}e^{-j\lambda h} - \alpha_{32}\lambda e^{-j\lambda h}.$$

Нетрудно проверить, что регулятор (5) решает задачу модального управления для системы (4), а регулятор

$$U(\lambda)x = U_1(\lambda)T^{-1}(\lambda)x$$

решает задачу модального управления для системы (1).

Таким образом, доказана теорема.

Теорема. Для того чтобы система (1) была модально управляема регулятором вида (2) в случае (7), необходимо и достаточно выполнения условий

$$\delta(\xi_i) \neq 0, i = 1, 2,$$

где $\delta(\xi_i)$ определены в (8).

Заключение. Таким образом, полученные регуляторы решают задачу модального управления для рассматриваемой системы в общециклическом случае.

Информация об авторе

Якименко Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

Information about the author

Yakimenka Andrei Aliksandravich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила после доработки 30.11.2020

УДК 514.144

Н. П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

**ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА
С ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ. КОМПЛЕКСНЫЙ СЛУЧАЙ**

Симплектическая геометрия – важный раздел современной дифференциальной геометрии. Целью данной работы является описание четырехмерных изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой над полем \mathbb{C} . В работе определены основные понятия: почти симплектическая структура, обобщенный модуль, виртуальная пара, изотропное представление, изотропно-точная пара, виртуальная структура. Приведен алгоритм классификации изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой. С применением этого алгоритма проведено в явном виде описание четырехмерных изотропно-точных почти симплектических однородных пространств в комплексном случае. Алгоритмы, данные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях, а результаты, полученные в работе, могут найти приложения в различных отраслях математики и физики, в частности, симплектическое многообразие позволяет естественным геометрическим образом ввести гамильтонову механику и дает наглядное толкование многим ее свойствам, также аппарат симплектической геометрии переносится с геометрической оптики и классической механики и на квантовую механику.

Ключевые слова: алгебра Ли, однородное пространство, группа Ли, изотропное представление, почти симплектическая структура.

Для цитирования: Можей Н. П. Четырехмерные однородные пространства с почти симплектической структурой. Комплексный случай // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 1 (242). С. 13–18.

N. P. Mozhey

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

**FOUR-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS SPACES
WITH ALMOST SYMPLECTIC STRUCTURE. THE COMPLEX CASE**

Symplectic geometry is an important branch of modern differential geometry. The purpose of the work is a description four-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces with an invariant non-degenerate almost symplectic structure over the field \mathbb{C} . In the work the basic concepts are defined: almost symplectic structure, generalized module, virtual pair, isotropic representation, isotropically-faithful pair, virtual structure. The algorithm for classifying isotropically-faithful homogeneous spaces with an invariant non-degenerate almost symplectic structure is presented. Using this algorithm, we explicitly describe four-dimensional isotropically-faithful almost symplectic homogeneous spaces in the complex case. The algorithms described in the work can be computerized and used to solve similar problems in large dimensions. The results obtained in this paper can be applied in various areas of mathematics and physics, in particular, the symplectic manifold allows us to introduce Hamiltonian mechanics in a natural geometric way and provides a visual interpretation of many of its properties, the apparatus of symplectic geometry is transferred from geometric optics and classical mechanics to quantum mechanics.

Key words: Lie algebra, homogeneous space, Lie group, isotropic representation, almost symplectic structure.

For citation: Mozhey N. P. Four-dimensional homogeneous spaces with almost symplectic structure. The complex case. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2021, no. 1 (242), pp. 13–18 (In Russian).

Введение. Симплектическая геометрия – важный раздел современной дифференциальной геометрии. Повышенный интерес к симплектическим многообразиям первоначально мотивируется важной ролью пуассоновских структур в

гамильтоновой динамике, этот интерес возрождается после публикации фундаментальных трудов А. Лихнеровича [1], А. Кириллова [2], А. Вайнштейна [3] и др. Симплектическое многообразие – это многообразие с заданной на нем

симплектической формой (замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формой), оно позволяет естественным геометрическим образом ввести гамильтонову механику и дает наглядное толкование многим ее свойствам. Любая гладкая функция на симплектическом многообразии может использоваться для определения гамильтоновой системы. Соответствующая функция известна как гамильтониан, или энергетическая функция, а симплектическое многообразие называют фазовым пространством. Гамильтониан порождает специальное векторное поле на симплектическом многообразии – симплектическое векторное поле (также называется гамильтоновым векторным полем), оно порождает гамильтонов поток на многообразии. Интегральные кривые векторного поля являются однопараметрическим семейством преобразований многообразия с параметром времени, эволюция во времени задается симплектоморфизмами. Каждый симплектоморфизм сохраняет форму объема в фазовом пространстве (это следует из теоремы Лиувилля), множество симплектоморфизмов, порождаемых гамильтоновым потоком, и называют гамильтоновой механикой системы. Гамильтоново векторное поле также порождает специальную операцию – скобку Пуассона, которая действует на функции на симплектическом многообразии, таким образом придавая пространству функций на многообразии структуру алгебры Ли. Аппарат симплектической геометрии переносится с геометрической оптики и классической механики на квантовую механику.

Целью данной работы является классификация четырехмерных изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой над полем \mathbb{C} . В работе [4] автором проделан первый шаг такой классификации, а именно описаны подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$, там же даны основные определения и приведено более подробное обоснование применяемых методов.

Основная часть. Пусть (\bar{G}, M) – четырехмерное однородное пространство, а $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пары (\bar{G}, G) поставим в соответствие пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, где $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли \bar{G} и \mathfrak{g} – подалгебра в $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе Ли G .

Рассмотрим задачу классификации для заданной подалгебры \mathfrak{g} с точностью до эквивалентности пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, у которых изотропное представление является инъекцией и сопряжено подалгебре \mathfrak{g} .

Назовем *обобщенным модулем* пару (\mathfrak{g}, U) , где \mathfrak{g} – алгебра Ли, а U – \mathfrak{g} -модуль. Обобщенный модуль (\mathfrak{g}, U) является *точным*, если \mathfrak{g} -модуль U точен. *Размерностью обобщенного модуля* (\mathfrak{g}, U) считаем размерность векторного пространства U .

Пусть V – векторное пространство, а \mathfrak{g} – подпространство в V . Пару (V, \mathfrak{g}) вместе с билинейной формой $B: \mathfrak{g} \times V \rightarrow V, (x, v) \mapsto x.v$ назовем *виртуальной парой*, если $\mathfrak{g}.\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$, ограничение B на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ задает на \mathfrak{g} структуру алгебры Ли $([x, y] = x.y)$ и V – \mathfrak{g} -модуль относительно B . Любой виртуальной паре (V, \mathfrak{g}) можно сопоставить обобщенный модуль $(\mathfrak{g}, V/\mathfrak{g})$, который будем называть *ассоциированным с виртуальной парой* (V, \mathfrak{g}) . *Изотропное представление виртуальной пары* (V, \mathfrak{g}) – это отображение $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V/\mathfrak{g})$, определенное $\rho(x)(v + \mathfrak{g}) = x.v + \mathfrak{g}, v \in V, x \in \mathfrak{g}$. Виртуальная пара (V, \mathfrak{g}) является *изотропно-точной*, если гомоморфизм ρ – инъекция. Очевидно, что виртуальная пара (V, \mathfrak{g}) изотропно-точная тогда и только тогда, когда ассоциированный обобщенный модуль $(\mathfrak{g}, V/\mathfrak{g})$ точен. Любая пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ может быть рассмотрена как виртуальная с обычным умножением, ограниченным на $\mathfrak{g} \times \bar{\mathfrak{g}}$. *Изотропное представление* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ совпадает с изотропным представлением соответствующей виртуальной пары. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ является *изотропно-точной*, если ее изотропное представление – инъекция. В дальнейшем рассматриваются только такие пары. Будем называть однородное пространство (M, \bar{G}) *изотропно-точным*, если это можно сказать про пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора \bar{G}_x произвольной точки $x \in M$ на $T_x M$ имеет нулевое ядро.

Предположим, что (\mathfrak{g}, U) – обобщенный модуль и $q: \mathfrak{g} \rightarrow L(U, \mathfrak{g})$ – линейное отображение, такое, что

$$q([x, y]) = x.q(y) - y.q(x), \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Отображение q назовем *виртуальной структурой* на обобщенном модуле (\mathfrak{g}, U) .

Для дальнейшей классификации потребуются некоторые утверждения.

Пусть q – виртуальная структура на обобщенном модуле (\mathfrak{g}, U) . Положим $V_q = \mathfrak{g} \times U$. Тогда билинейное отображение $\mathfrak{g} \times V_q \rightarrow V_q$, заданное

$$x.(y, u) = ([x, y] + q(x)(u), x.u), \quad x, y \in \mathfrak{g}, u \in U,$$

определяет виртуальную пару (V_q, \mathfrak{g}) .

Любой виртуальной структуре на обобщенном модуле (\mathfrak{g}, U) сопоставим указанную виртуальную пару $(\mathfrak{g} \times U, \mathfrak{g})$. Более того, любая виртуальная пара (V, \mathfrak{g}) , ассоциированная с обобщенным модулем (\mathfrak{g}, U) , может быть получена таким способом. Пусть q_1 и q_2 – виртуальные структуры на обобщенном модуле (\mathfrak{g}, U) . Будем говорить, что q_1 и q_2 *эквивалентны*, если виртуальные пары (V_{q_1}, \mathfrak{g}) и (V_{q_2}, \mathfrak{g}) изоморфны, т. е. если существует изоморфизм векторных пространств $H: V_{q_1} \rightarrow V_{q_2}$ такой, что $H(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ и $H(x.v) = H(x).H(v)$ для всех $x \in \mathfrak{g}, v \in V_{q_1}$.

Пусть q_1 и q_2 – виртуальные структуры на обобщенном модуле (\mathfrak{g}, U) и существует отображение $h \in L(U, \mathfrak{g})$ такое, что $q_1(x) - q_2(x) = x.h$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Тогда виртуальные структуры q_1 и q_2 эквивалентны.

Получаем, что классификация (с точностью до изоморфизма) всех виртуальных пар (V, \mathfrak{g}) для данного обобщенного модуля (\mathfrak{g}, U) сводится к классификации всех виртуальных структур на обобщенном модуле (\mathfrak{g}, U) (с точностью до эквивалентности).

Пусть (\mathfrak{g}, U) – точный четырехмерный обобщенный модуль, $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис алгебры Ли \mathfrak{g} ($n = \dim \mathfrak{g}$) и $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ – базис векторного пространства U . Для $x \in \mathfrak{g}$ через $A(x)$ и $B(x)$ обозначим матрицы отображений $adx: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ и $x_u: U \rightarrow U$ в базисах E и U соответственно. Тогда отображение $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$, $x \mapsto B(x)$ – инъекция. Это позволяет отождествить алгебру Ли \mathfrak{g} с некоторой подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$. Можно отождествить множество отображений $q: \mathfrak{g} \rightarrow L(U, \mathfrak{g})$ со множеством отображений $C: \mathfrak{g} \rightarrow Mat_{n \times 4}(\mathbb{C})$, где $C(x)$ – матрица отображения $q(x)$ в базисе, зафиксированном ранее. Отображение $C: \mathfrak{g} \rightarrow Mat_{n \times 4}(\mathbb{C})$ также будем называть виртуальной структурой на обобщенном модуле (\mathfrak{g}, U) , если соответствующее отображение q – виртуальная структура.

Чтобы отображение $C: \mathfrak{g} \rightarrow Mat_{n \times 4}(\mathbb{C})$ было виртуальной структурой на обобщенном модуле (\mathfrak{g}, U) , необходимо и достаточно

$$C([x, y]) = A(x)C(y) - C(y)B(x) - A(y)C(x) + C(x)B(y), \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Пусть C_1 и C_2 – виртуальные структуры на обобщенном модуле (\mathfrak{g}, U) и существует матрица $H \in Mat_{n \times 4}(\mathbb{C})$ такая, что для всех $x \in \mathfrak{g}$ выполняется условие

$$C_1(x) - C_2(x) = A(x)H - HB(x).$$

Тогда C_1 и C_2 эквивалентны.

Отметим, что все выписанные выражения линейны по $x, y \in \mathfrak{g}$. Поэтому, чтобы гарантировать, что эти условия выполняются для всех $x, y \in \mathfrak{g}$, достаточно проверить, что они выполняются для $x, y \in E = \{e_1, \dots, e_n\}$.

Пусть (V, \mathfrak{g}) – виртуальная пара и (\mathfrak{g}, U) , где $U = V / \mathfrak{g}$ – обобщенный модуль, ассоциированный с (V, \mathfrak{g}) .

Пусть \mathfrak{h} – нильпотентная подалгебра в \mathfrak{g} . Чтобы \mathfrak{h} -модуль V был прямой суммой примарных компонент, необходимо и достаточно, чтобы \mathfrak{h} -модули \mathfrak{g} и U являлись прямой суммой примарных компонент; существует сечение $s: U \rightarrow V$ канонической сюръекции $\pi: V \rightarrow U$ такое, что для любого $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ выполняется $s(U^\alpha(\mathfrak{h})) \subset V^\alpha(\mathfrak{h})$.

Пусть s – сечение канонической сюръекции $\pi: V \rightarrow U$. Будем говорить, что s соответствует подалгебре \mathfrak{h} , если $s(U^\alpha(\mathfrak{h})) \subset V^\alpha(\mathfrak{h})$ для всех $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Из предыдущего утверждения следует, что такое сечение всегда существует.

Предположим, что s (сечение канонической сюръекции $\pi: V \rightarrow U$) соответствует подалгебре \mathfrak{h} . Тогда соответствующая виртуальная структура $q_s: \mathfrak{g} \rightarrow L(U, \mathfrak{g})$ на обобщенном модуле (\mathfrak{g}, U) удовлетворяет условию

$$q_s(\mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}))(U^\beta(\mathfrak{h})) \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}(\mathfrak{h}), \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*.$$

Будем говорить, что виртуальная структура q на (\mathfrak{g}, U) примарна (относительно \mathfrak{h}), если q удовлетворяет этому условию. Из двух предыдущих утверждений следует, что любая виртуальная структура эквивалентна некоторой примарной виртуальной структуре.

Пусть q – примарная (относительно \mathfrak{h}) виртуальная структура на обобщенном модуле (\mathfrak{g}, U) и (V_q, \mathfrak{g}) – соответствующая виртуальная пара. Тогда $V_q^\alpha(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}) \times U^\alpha(\mathfrak{h})$, $\alpha \in \mathfrak{h}^*$.

Виртуальную пару (V, \mathfrak{g}) называем тривиальной, если существует подмодуль U \mathfrak{g} -модуля V такой, что $V = U \oplus \mathfrak{g}$. Тривиальная виртуальная пара (V, \mathfrak{g}) однозначно определяется (с точностью до изоморфизма) соответствующим обобщенным модулем $(\mathfrak{g}, V / \mathfrak{g})$.

Пусть q – виртуальная структура на обобщенном модуле (\mathfrak{g}, U) . Чтобы виртуальная пара (V_q, \mathfrak{g}) была тривиальной, необходимо и достаточно, чтобы q было эквивалентно нулевому отображению \mathfrak{g} в $L(U, \mathfrak{g})$. Если \mathfrak{g} – полупростая алгебра Ли, то любая виртуальная пара (V, \mathfrak{g}) тривиальна.

Пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называем тривиальной, если существует коммутативный идеал \mathfrak{a} алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$. Если $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – тривиальная пара, то соответствующая виртуальная пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ также тривиальна, но не наоборот. Тривиальная пара определяется однозначно (с точностью до эквивалентности) соответствующим обобщенным модулем $(\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}} / \mathfrak{g})$.

Пусть $V = \bar{\mathfrak{g}} / \mathfrak{g}$ – \mathfrak{g} -модуль, соответствующий изотропному представлению. Пространство $B(V)$ билинейных форм на V естественным образом становится \mathfrak{g} -модулем, если положить

$$(x.b)(v_1, v_2) = -b(x.v_1, v_2) - b(v_1, x.v_2),$$

где $x \in \mathfrak{g}$, $v_1, v_2 \in V$, $b \in B(V)$. Почти симплектической структурой на \mathfrak{g} -модуле V называется невырожденная, кососимметрическая билинейная форма $b \in B(V)$ такая, что $x.b = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Другими словами, $b \in B(V)$.⁹

Пусть B – матрица симплектической структуры в базисе пространства V , а A_x – матрица элемента $x \in \rho(\mathfrak{g})$ в том же базисе. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ допускает почти симплектическую структуру, если выполняется следующее свойство:

$$A_x^t \cdot B + B \cdot A_x = 0, \quad \forall x \in \rho(\mathfrak{g}). \quad (1)$$

Существует единственная (с точностью до сопряженности) невырожденная кососимметрическая билинейная форма b [5]. Множество всех эндоморфизмов пространства V , сохраняющих невырожденную кососимметрическую билинейную форму b , является алгеброй Ли. Эта алгебра Ли обозначается $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$, она представима в следующем виде:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y & u & w \\ z & t & v & v \\ s & p & -x & -z \\ p & r & -y & -t \end{pmatrix} \mid x, y, z, t, u, v, s, w, p, r \in \mathbb{C} \right\}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что алгебра Ли \mathfrak{g} является подалгеброй в линейной алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$.

Принимая во внимание вышеизложенное, решение проблемы классификации четырехмерных изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой разобьем на следующие части:

1. Классификация с точностью до сопряженности всех подалгебр $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ удовлетворяющих (1), что равносильно классификации (с точностью до сопряженности) подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$.

2. Для каждой подалгебры \mathfrak{g} из пункта 1 производим классификацию (с точностью до эквивалентности) изотропно-точных пар $(\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$, у которых изотропное представление сопряжено подалгебре $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

3. Для каждой пары $(\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ находим (с точностью до эквивалентности пар) все вещественные формы $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Мы ограничиваемся в данной работе случаем, при котором множество нильпотентных элементов алгебры $\rho(\mathfrak{g})$ отлично от $\rho(\mathfrak{g})$.

Описание пункта 1 приведено в работе [4]. Для ссылки на подалгебры, полученные в [4], будем использовать следующее обозначение: $d.n$, где d – размерность подалгебры, а n – ее порядковый номер. Будем говорить, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет тип $(d.n)$, если изотропное представление пары сопряжено подалгебре \mathfrak{g} , имеющей номер $(d.n)$. Остановимся подробнее на классификации изотропно-точных пар из пункта 2.

В качестве примера классификации пар с заданным изотропным представлением рассмотрим пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 2.9, т. е. имеющие подалгебру \mathfrak{g} следующего вида:

$$\begin{pmatrix} x & & & \\ & y & & \\ & & -x & \\ & & & -y \end{pmatrix}.$$

Теорема. Любая пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 2.9 эквивалентна одной и только одной из следующих пар:

1	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	0	0	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	0

2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	0	$-e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	0

3	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	e_2
u_3	u_3	0	$-e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	$-e_2$	0	0

Действительно, пусть (\mathfrak{g}, U) – точный обобщенный модуль; $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ – базис пространства U ; $\{e_1, e_2\}$ – базис в \mathfrak{g} , где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathfrak{h} = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2$ – нильпотентная подалгебра алгебры Ли \mathfrak{g} . Пусть (V, \mathfrak{g}) – виртуальная пара, определенная линейным отображением $q: \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(U, \mathfrak{g})$ (т. е. билинейное отображение $B: \mathfrak{g} \times V \rightarrow V$ имеет вид

$$x.(y, u) = ([x, y] + q(x)(u), x.u)$$

для всех $x, y \in \mathfrak{g}, u \in U$). Без ограничения общности мы можем считать q примарным. Так как

$$\mathfrak{g}^{(0,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2,$$

$$U^{(1,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_1, U^{(0,1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_2,$$

$$U^{(-1,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_3, U^{(0,-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_4,$$

то $C(e_1) = C(e_2) = 0$. Мы можем считать, что соответствующая виртуальная пара тривиальна и

$$[e_1, u_1] = u_1, [e_1, u_2] = 0, [e_1, u_3] = -u_3, [e_1, u_4] = 0;$$

$$[e_2, u_1] = 0, [e_2, u_2] = u_2, [e_2, u_3] = 0, [e_2, u_4] = -u_4.$$

Так как отображение $q: \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(U, \mathfrak{g})$, соответствующее виртуальной паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, примарно, то $\bar{\mathfrak{g}}^\alpha(h) = \mathfrak{g}^\alpha(h) \times U^\alpha(h) \forall \alpha \in \mathfrak{h}^*$. Из того, что

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(h) = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2,$$

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(h) = \mathbb{C}u_1, \bar{\mathfrak{g}}^{(0,1)}(h) = \mathbb{C}u_2,$$

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(-1,0)}(h) = \mathbb{C}u_3, \bar{\mathfrak{g}}^{(0,-1)}(h) = \mathbb{C}u_4,$$

следует

$$\begin{aligned} [u_1, u_2] &= 0, & [u_2, u_3] &= 0, \\ [u_1, u_3] &= b_1e_1 + b_2e_2, & [u_2, u_4] &= f_1e_1 + f_2e_2, \\ [u_1, u_4] &= 0, & [u_3, u_4] &= 0. \end{aligned}$$

Проверяя тождества Якоби на векторах e_i, u_j, u_k ($1 \leq i \leq 2, 1 \leq j < k \leq 4$) и u_i, u_j, u_k ($1 \leq i < j < k \leq 4$), получаем, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет вид

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	b_1e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	f_2e_2
u_3	u_3	0	$-b_1e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	$-f_2e_2$	0	0

Рассмотрим следующие случаи:

1. $b_1 = f_2 = 0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиртуальной паре $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$.

2. $b_1^2 + f_2^2 \neq 0, b_1f_2 = 0$. Отображение $\pi: \bar{\mathfrak{g}}' \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ такое, что

$$\begin{aligned} \pi(e_1) &= e_2, \pi(e_2) = e_1, \pi(u_1) = u_2, \pi(u_2) = u_1, \\ \pi(u_3) &= u_4, \pi(u_4) = u_3, \end{aligned}$$

устанавливает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$, где последняя имеет следующий вид:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	f_2e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	b_1e_2
u_3	u_3	0	$-f_2e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	$-b_1e_2$	0	0

Тогда без ограничения общности можно считать, что $b_1 \neq 0, f_2 = 0$ и пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$ при помощи отображения $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_2 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ такого, что

$$\pi(e_1) = e_1, \pi(e_2) = e_2, \pi(u_1) = \frac{1}{b_1}u_1,$$

$$\pi(u_2) = u_2, \pi(u_3) = u_3, \pi(u_4) = u_4.$$

3. $b_1f_2 \neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$ при помощи отображения $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_3 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ такого, что

$$\pi(e_1) = e_1, \pi(e_2) = e_2,$$

$$\pi(u_1) = \frac{1}{b_1}u_1, \pi(u_2) = \frac{1}{f_2}u_2,$$

$$\pi(u_3) = u_3, \pi(u_4) = u_4.$$

Так как $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_2 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_3$, пары $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1), (\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2), (\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$ не эквивалентны.

Применяя аналогичные рассуждения для всех остальных случаев, получаем искомым результат классификации пар над полем \mathbb{C} .

Заключение. Приведен алгоритм классификации изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой. С применением этого алгоритма проведено в явном виде описание четырехмерных изотропно-точных почти симплектических однородных пространств в комплексном случае. Алгоритмы, приведенные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях, а результаты, полученные в работе, могут найти приложения в различных отраслях математики и физики.

Список литературы

1. Lichnerowicz A. Les vari'et'es de Poisson et leurs alg`ebres de Lie associ'ees // Journal Differential Geometry. 1977. No. 2. P. 253–300.
2. Кириллов А. А. Локальные алгебры Ли // Успехи математических наук. 1976, № 4 (190). С. 57–76.
3. Weinstein A. The local structure of Poisson manifolds // Journal Differential Geom. 1983. No. 3. P. 523–557.
4. Можей Н. П. Почти симплектические однородные пространства // Труды БГТУ. Сер. 6, Физ.-мат. науки и информатика. 2009. № 6. С. 17–20.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

References

1. Lichnerowicz A. Les vari'et'es de Poisson et leurs alg`ebres de Lie associ'ees. *Journal Differential Geometry*, 1977, no. 2, pp. 253–300.

2. Kirillov A. A. Local Lie algebras. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Success math. sciences], 1976, no. 4 (190), pp. 57–76 (In Russian).
3. Weinstein A. The local structure of Poisson manifolds. *Journal Differential Geometry*, 1983, no. 3, pp. 523–557.
4. Mozhey N. P. Almost simplex homogeneous spaces. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2009, no. 6, pp. 17–20 (In Russian).
5. Gantmacher F. R. *Teoriya matrity* [Matrix theory]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 552 p.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 09.11.2020

МЕХАНИКА MECHANICS

УДК 339.9:658:630

Э. Э. Бильданов

Белорусский государственный технологический университет

ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЛАМЕЛЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ SALR-СИСТЕМЫ В ГЕКСАГОНАЛЬНОМ ОКРУЖЕНИИ

Рассматриваются системы частиц с конкурирующим взаимодействием, проявляющих притяжение на близких дистанциях в сочетании с отталкиванием на дальних (SALR-системы), моделирующие растворы полимеров и различного рода коллоидных частиц, что приводит к спонтанным образованиям структурных фаз. Исходя из анализа большого термодинамического потенциала, определены диапазоны возможных значений химического потенциала и типы полосчатых структур для систем с конкурирующим взаимодействием на треугольной решетке с пространственным ограничением шестиугольной формы в основном состоянии без учета взаимодействия границы, а также найдены такие параметры, как число частиц и внутренняя энергия системы для этих структур.

Ключевые слова: самоорганизация, SALR-система, ламеллярная (полосчатая) структура, основное состояние, химический потенциал, внутренняя энергия.

Для цитирования: Бильданов Э. Э. Основные состояния ламеллярной структуры SALR-системы в гексагональном окружении // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 1 (242). С. 19–24.

E. E. Bildanau

Belarusian State Technological University

GROUND STATE OF THE SALR LAMELLAR STRUCTURE IN A HEXAGONAL ENVIRONMENT

Systems of particles with competing interactions, which exhibit attraction at close distances in combination with repulsion at long distances (SALR systems), simulating solutions of polymers and various kinds of colloidal particles, which leads to spontaneous formation of structural phases, are considered. Based on the analysis of a large thermodynamic potential, the ranges of possible values of the chemical potential and the types of streaky structures for systems with competing interactions on a triangular lattice with a spatial limitation of a hexagonal shape in the ground state, without taking into account the interaction of the boundary, were determined, and the following parameters were found, as the number of particles and the internal energy of the system for these structures.

Key words: self-organization, SALR system, lamellar structure, ground state, chemical potential, internal energy.

For citation: Bildanau E. E. Ground state of the SALR lamellar structure in a hexagonal environment. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2021, no. 1(242), pp. 19–24 (In Russian).

Введение. Самосборка частиц с SALR-потенциалом в объеме приводит к образованию различных периодических упорядоченных фаз кластеров, полос и пустот. Нагрев системы вызывает уменьшение параметра порядка и разрушение структурных элементов. Отдельные кластеры и сегменты продолжают свое существование в виде лабиринтных структур вплоть до критической температуры, выше которой вырождаются в однородную неупорядоченную фазу.

Ожидается, что в обратном процессе вместо охлаждения системы для ограничения количества

топологических дефектов, нарушающих структурный порядок и восстановление упорядоченного рисунка, можно наложить граничные условия, удовлетворяющие определенным требованиям симметрии. Авторами работы [1] было показано, что действительно в щелевой геометрии количество топологических дефектов в SALR-системе, образующей полосы, может быть снижено либо за счет снижения температуры, либо за счет уменьшения расстояния между параллельными ограничивающими стенками. Однако это расстояние должно быть соизмеримо с периодом структурных

элементов в объемной системе. В противном случае низкотемпературные структуры будут подвержены периодическим неоднородностям, распространяющимся по всей щели в перпендикулярном направлении.

Наличие структур, образующихся в щели, но отсутствующих в неограниченной системе, наталкивает на мысль о возможности создания новых желаемых структур в самоорганизующихся системах путем заключения их в контейнеры соответствующих размеров и форм. Можно ожидать новых закономерностей, особенно когда симметрия границ отличается от симметрии фаз, присутствующих в неограниченной самоорганизующейся системе. Несмотря на ожидаемое значительное влияние ограниченности системы [2, 3] в целом, мало что известно о влиянии пространственных ограничений на упорядочение монослоев SALR-систем. Ламеллярные двумерные структуры в SALR-системе исследовались только в щелевой геометрии [1, 4] или на поверхности сферы [5, 6], на которой топологические дефекты обусловлены топологией системы. В трехмерных системах были изучены эффекты наложения периодического или замкнутого цилиндрического ограничения на гексагональную цилиндрическую фазу [7], показав стабильность спиральных структур, аналогичных тем, которые наблюдались для систем блок-сополимеров [8].

Ранее в работе [9] были рассмотрены основные состояния системы частиц с конкурирующими взаимодействиями в правильном шестиугольнике в виде концентрических колец. Однако в неограниченной системе при решеточной концентрации частиц, близкой к 0,5, при низких температурах существует фаза ламелей в виде параллельных полос [1, 6], состоящих из двух заполненных и двух вакантных рядов. В данной работе рассматриваются условия существования такой фазы при наличии пространственного ограничения в виде правильного шестиугольника.

Основная часть. Состояние исследуемой термодинамической системы является более предпочтительным при меньшем значении большого термодинамического потенциала Ω по сравнению с альтернативной. В основном состоянии при $T = 0$ большой термодинамический потенциал определяется следующим образом:

$$\Omega = E - \mu N. \quad (1)$$

Определим число частиц в шестиугольнике, который заполнен параллельными полосами. Старт чередования полос можно задать сверху с двух заполненных рядов (случай *A*) или с двух пустых (случай *B*), причем распределение частиц по узлам случая *B* соответствует распределению

свободных узлов (вакансий) случая *A*. В силу симметрии начало с одного пустого или заполненного ряда тождественно соответственно случаям *A* или *B*, получающимся из них зеркальным отражением относительно горизонтальной диагонали шестиугольника. Число частиц N в двумерной системе зависит от кратности четырем размеру M стороны шестиугольника и отличается для случаев *A* и *B*. Исходя из значения остатка r от деления M на 4 ($r = 0, 1, 2, 3$) для обоих случаев *A* и *B* выделяются по 4 конфигурации.

Для определения числа частиц в рассматриваемом типе замкнутого окружения предлагается вариант через отсечения лишних частей в ромбовидном окружении. Отметим, что сумма числа частиц обоих вариантов *A* и *B* равна суммарному числу узлов системы $S = 3M^2 - 3M + 1$ согласно работе [9], в силу чего необязательно определять число частиц для обоих случаев в отдельности, достаточно остановиться на расчетах для случая *A*.

Рассмотрим на треугольной решетке ромб с числом узлов L на его стороне (рис. 1).

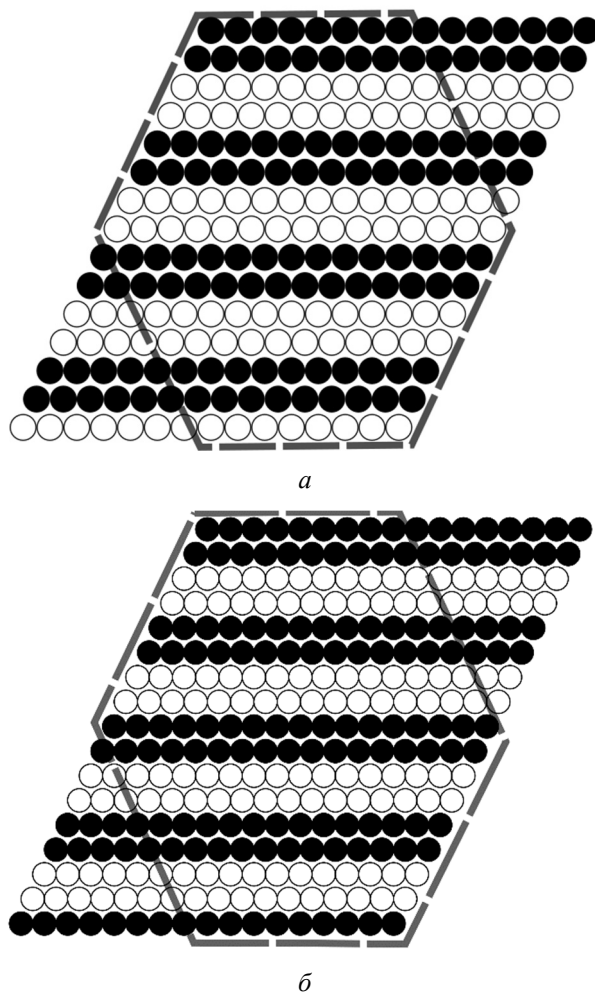


Рис. 1. Примеры основных состояний полосчатых структур в гексагональном окружении для случая *A* при а) $M = 8, r = 0$ и б) $M = 9, r = 1$

Этот ромб состоит из равностороннего шестиугольника с числом узлов M на стороне и двух равносторонних треугольников со сторонами $(M - 1)$, т. е. $L = 2M - 1$. В конфигурации частиц в ромбе, соответствующей варианту A , присутствует M рядов по $2M - 1$ частиц в ряду так, что число частиц в ромбе равно $M(2M - 1)$, число вакантных узлов $-(M - 1)(2M - 1)$, а сумма числа вакантных и заполненных узлов равна L^2 , что подтверждает правильность вычислений.

Число частиц в треугольниках равно сумме числа частиц в каждом из его $(M - 1)$ рядов и представляет собой сумму двух арифметических прогрессий с разностями, равными 4 (период полосчатой структуры). При $r = 0$ или 2 эти две убывающие прогрессии рассчитываем с первого ($i = 1$) и второго ($i = 2$) рядов от основания, параллельного чередующимся полосам верхнего треугольника, и, соответственно, от второго и третьего рядов от основания нижнего треугольника. Для формирования рядов удобно воспользоваться δ -символами Кронекера. Вычитая из суммарного числа частиц, принадлежащих ромбу, частицы, принадлежащие треугольникам, находим число частиц N_0 в шестиугольнике при $r = 0$ или 2:

$$N_0 = N_2 = M(2M - 1) - \sum_{i=1}^{M-1} (M - i) \left(\delta_{i-1,4} \left[\frac{i-1}{4} \right] + 2\delta_{i-2,4} \left[\frac{i-2}{4} \right] + \delta_{i-3,4} \left[\frac{i-3}{4} \right] \right), \quad (2)$$

где i – номер ряда в треугольниках.

При $r = 1$ или 3 суммирование начинается, как и в предыдущем случае, с первого и второго рядов для верхнего треугольника, но первого и четвертого рядов для нижнего треугольника. Следовательно, число частиц

$$N_1 = N_3 = M(2M - 1) - \sum_{i=1}^{M-1} (M - i) \left(2\delta_{i-1,4} \left[\frac{i-1}{4} \right] + \delta_{i-2,4} \left[\frac{i-2}{4} \right] + \delta_{i-4,4} \left[\frac{i-4}{4} \right] \right). \quad (3)$$

Выполняя суммирование в (2) и (3), получим следующие выражения:

$$N_0 = 2M^2 - 5M + 8 + 5 \left[\frac{M-4}{4} \right] - M \left[\frac{M-4}{4} \right] + 2 \left[\frac{M-4}{4} \right]^2 + 8 \left[\frac{M-3}{4} \right] - 2M \left[\frac{M-3}{4} \right] + 4 \left[\frac{M-3}{4} \right]^2 + 3 \left[\frac{M-2}{4} \right] - M \left[\frac{M-2}{4} \right] + 2 \left[\frac{M-2}{4} \right]^2; \quad (4)$$

$$N_1 = 2M^2 - 4M + 8 + 6 \left[\frac{M-4}{4} \right] + 2 \left[\frac{M-4}{4} \right]^2 + 4 \left[\frac{M-3}{4} \right] - M \left[\frac{M-3}{4} \right] + 2 \left[\frac{M-3}{4} \right]^2 + 6 \left[\frac{M-2}{4} \right] - 2M \left[\frac{M-2}{4} \right] + 4 \left[\frac{M-2}{4} \right]^2 - M \left[\frac{M-1}{4} \right]. \quad (5)$$

Полученные выражения для различных значений r преобразуем с учетом следующих соотношений:

- при $r = 0$ все [...] равны $(M - 4) / 4$;
- при $r = 1$ $[(M - 1) / 4]$ равны $(M - 1) / 4$, остальные $(M - 5) / 4$;
- при $r = 2$ $[(M - 2) / 4]$ равны $(M - 2) / 4$, остальные $(M - 6) / 4$;
- при $r = 3$ $[(M - 4) / 4]$ равны $(M - 7) / 4$, остальные $(M - 3) / 4$.

В результате числа частиц для случая A в зависимости от размера M стороны шестиугольника при различных r можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} N_A(M) |_{r=0} &= \frac{3}{2}M^2 - M, \\ N_A(M) |_{r=1} &= \frac{3}{2}M^2 - M + \frac{1}{2}, \\ N_A(M) |_{r=2} &= \frac{3}{2}M^2 - M + 1, \\ N_A(M) |_{r=3} &= \frac{3}{2}M^2 - M - \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

или в более компактной форме

$$N_A(M, r) = \frac{3}{2}M^2 - M + \frac{r}{2} - 2\delta_{r,3}. \quad (7)$$

При расчете числа частиц для случая B следует из суммарного числа узлов S в шестиугольнике вычесть число частиц для случая A . Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} N_B(M) |_{r=0} &= \frac{3}{2}M^2 - 2M + 1, \\ N_B(M) |_{r=1} &= \frac{3}{2}M^2 - 2M + \frac{1}{2}, \\ N_B(M) |_{r=2} &= \frac{3}{2}M^2 - 2M, \\ N_B(M) |_{r=3} &= \frac{3}{2}M^2 - 2M + \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

или

$$N_B(M, r) = \frac{3}{2}M^2 - 2M + 1 - \frac{r}{2} + 2\delta_{r,3}. \quad (9)$$

Далее рассчитаем внутреннюю энергию E системы частиц в выделенном шестиугольнике, которую представим как сумму энергий E_i групп частиц:

$$E = \sum_{i=1}^4 E_i N_i, \quad (10)$$

где N_i – число групп частиц, обладающих энергией E_i .

Отметим, что, как и в работах [1, 6, 9], рассматривается система частиц с притяжением ближайших и отталкиванием третьих соседей, причем энергия рассматривается в единицах модуля взаимодействия первых соседей. В этом случае энергия взаимодействия первых соседей равна минус 1, а третьих соседей J ($J > 0$).

Для случаев A и B , в зависимости от r (всего 8 разных конфигураций) значения N_i оказываются разными, тогда как энергии групп E_i остаются одинаковыми и имеют следующие значения:

1) каждая частица в глубине двояной полосы имеет четыре первых и два третьих соседа, поэтому

$$E_1 = -2 + J;$$

2) двояная полоса у стенки имеет группу (ромб) из четырех частиц, образующих между собой пять связей между первыми соседями и еще три связи ближайших соседей с частицами первого типа (вклад которых должен быть разделен на 2), а также каждая из них по одной связи с третьими соседями в глубине полосы, так что

$$E_2 = -\frac{13}{2} + 2J;$$

3) у одиночной полосы у стенки следует выделить группу из двух частиц, энергия которой

$$E_3 = -\frac{3}{2} + J;$$

4) энергия не угловых частиц в одиночной полосе

$$E_4 = -1 + J.$$

В общем виде выражение (10) для внутренних энергий E_A и E_B имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} E_{A,B}(M, r) = & \\ = [N_{A,B}(M, r) - 8k_{A,B}(M, r) - M\gamma_{A,B}(r)]E_1 + & \\ + 2k_{A,B}(M, r)E_2 + 2\gamma_{A,B}(r)E_3 + & \\ + (M - 4)\gamma_{A,B}(r)E_4, & \end{aligned} \quad (11)$$

где $k_{A,B}(M, r)$ – число двойных полос в шестиугольнике; $\gamma_{A,B}(r) = 1$ при наличии одиночной замыкающей (последней) полосы в шестиугольнике.

Ниже приведем окончательные выражения для всех восьми конфигураций распределения частиц в шестиугольнике.

Случай A

$r = 0$ или 2 .

$$k_A(M) = \frac{M}{2}, \quad \gamma_A = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} E_A(M, 0) &= \left(\frac{3}{2}M^2 - 5M \right) (-2 + J) + \\ &+ M \left(-\frac{13}{2} + 2J \right), \\ E_A(M, 2) &= E_A(M, 0) + (-2 + J). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$r = 1$ или 3 .

$$k_A(M) = \frac{M-1}{2}, \quad \gamma_A = 1.$$

$$\left. \begin{aligned} E_A(M, 1) &= \left(\frac{3}{2}M^2 - 6M + \frac{9}{2} \right) (-2 + J) + \\ &+ 3M \left(-\frac{5}{2} + J \right) + \left(\frac{15}{2} - 4J \right), \\ E_A(M, 3) &= E_A(M, 1) - (-2 + J). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Случай B

$r = 0$ или 2 .

$$k_B(M) = \frac{M-2}{2}, \quad \gamma_B = 1.$$

$$\left. \begin{aligned} E_B(M, 0) &= \left(\frac{3}{2}M^2 - 7M + 9 \right) (-2 + J) + \\ &+ 3M \left(-\frac{5}{2} + J \right) + (14 - 6J), \\ E_B(M, 2) &= E_B(M, 0) - (-2 + J). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$r = 1$ или 3 .

$$k_B(M) = \frac{M-1}{2}, \quad \gamma_B = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} E_B(M, 1) &= \left(\frac{3}{2}M^2 - 6M + \frac{9}{2} \right) (-2 + J) + \\ &+ (M-1) \left(-\frac{13}{2} + 2J \right), \\ E_B(M, 3) &= E_B(M, 1) + (-2 + J). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Определим те значения химического потенциала μ , при которых термодинамически более

выгодной оказывается та или другая конфигурация для случаев A или B .

В результате сравнения находим, что для различных значений r неравенство $\Omega_A < \Omega_B$ выполняется при

$$\left. \begin{aligned} \mu|_{r=0} &> -\frac{5}{M-1}, \\ \mu|_{r=2} &> -\frac{3}{M+1}, \\ \mu|_{r=1} &> 2 - \frac{5}{M}, \\ \mu|_{r=3} &> 2 - \frac{3}{M-2}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Из (16) следует, что при $M \rightarrow \infty$, конфигурации, соответствующие случаю A , более предпочтительны для положительных значений химического потенциала, если остаток r – четное число, или при $\mu > 2$, если r – нечетное.

Далее определим значения химического потенциала μ , при которых рассмотренная здесь ламеллярная структура системы оказывается термодинамически более выгодной по сравнению с кольцевой структурой, которая исследована в работе [9]. Проведенное сопоставление показывает, что кольцевая структура предпочтительнее при химических потенциалах выше некоторого его критического значения $\mu_{кр}$. Наличие дефектов в центральной части кольцевой структуры и замыкающего ряда ламеллярной структуры приводит к зависимости $\mu_{кр}$ от размера системы M . В таблице приведены рассчитанные значения $\mu_{кр}$ при $J = 3$ и разных значениях r , где левые границы найденных интервалов значений $\mu_{кр}$ соответствуют минимальным значениям M (4, 5, 6, 7 при r равном соответственно 0, 1, 2, 3), а правая граница – максимальному M ($M \rightarrow \infty$). При отсутствии каких-либо дефектов в кольцевой и ламеллярной структурах значение $\mu_{кр}$ не зависит от размера системы.

В большом каноническом ансамбле изменение химического потенциала μ связано с изменением числа частиц в термодинамической системе. Устойчивость исследованных в работе ламеллярных структур в основном состоянии

проверим, рассчитывая изменение потенциала Ω при добавлении или изъятии частицы в системе. Так, добавление частицы на плоскость со структурой полос вдали от границ изменяет термодинамический потенциал на величину $\Delta\Omega = (-2 + 4J - \mu)$, а при изъятии частицы на $\Delta\Omega = (4 - 2J + \mu)$, что при $J = 3$ определяет возможные значения химического потенциала, обеспечивающие устойчивое существование ламеллярной структуры, в интервале $\mu \in (2; 10)$.

Значение либо интервалы химических потенциалов $\mu_{кр}$

r	$\mu_{кр}$	
	A	B
0	2,80	(1,92;2,00)
1	(2,50;2,40)	(2,06;2,29)
2	(2,93;2,80)	(1,81;2,00)
3	(2,39;2,40)	(2,17;2,29)

С учетом конкуренции со стороны кольцевых структур области существования ламеллярных структур вырождаются в узкие полосы между $\mu = 2$ и границами, указанными в таблице в колонке A , так как структуры случая A оказываются более предпочтительными по сравнению со структурами случая B .

Заключение. В работе получены и проанализированы условия существования ламеллярной структуры для системы с конкурирующим взаимодействием при наличии границ шестиугольной формы. Определены аналитические выражения числа частиц N , внутренней энергии E и потенциала Ω для такой системы. Установлено, что возникновение ламеллярной структуры в основном состоянии (при $T = 0$) возможно в узкой области изменения химического потенциала, так как образование кольцевой структуры является энергетически более выгодным, поскольку изгибы полос приводят к меньшим энергетическим затратам по сравнению с обрывами полос в приграничных областях.

Условия возникновения ламеллярных структур демонстрируют их зависимость от размера M системы, а также от ее кратности 4 (период ламеллярной структуры), в результате чего возможен дефект в виде одиночной полосы.

Список литературы

1. Almarza N. G., Pełalski J., Ciach A. Effects of confinement on pattern formation in two dimensional systems with competing interactions. *Soft matter*, 2016, vol. 12, no. 36, pp. 7551–7563. DOI: 10.1039/C6SM01400C.
2. Pełalski J., Ciach A., Almarza N. G. Bistability in a self-assembling system confined by elastic walls: Exact results in a one-dimensional lattice model. *Journal of Chem. Phys.*, 2015, vol. 142, no. 1. DOI: 10.1063/1.4905142.
3. Pełalski J., Almarza N. G., Ciach A. Effects of rigid or adaptive confinement on colloidal self-assembly. Fixed vs. fluctuating number of confined particles. *Journal of Chem. Phys.*, 2015, vol. 142, no. 20. DOI: 10.1063/1.4921787.

4. Kim E.-Y., Kim S.-C., Suh S.-H. Structure and phase behavior of two-Yukawa fluids with competing interactions in planar slit pores. *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, no. 5. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.051203.
5. Amazon J. J., Goh S. L., Feigenson G. W. Competition between line tension and curvature stabilizes modulated phase patterns on the surface of giant unilamellar vesicles: A simulation study. *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 87, no. 2. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.022708.
6. Pełalski J., Ciach A. Orientational ordering of lamellar structures on closed surfaces. *Journal of Chem. Phys.*, 2018, vol. 148, no. 17. DOI:10.1063/1.5026112.
7. Serna H., Noya E. G., Gózdź W. Assembly of Helical Structures in Systems with Competing Interactions under Cylindrical Confinement. *Langmuir*, 2019, vol. 35, no. 3, pp. 702–708. DOI: 10.1021/acs.langmuir.8b03382.
8. Shi A.-C., Li B. Self-assembly of diblock copolymers under confinement. *Soft Matter*, 2013, vol. 9, no. 5, pp. 1398–1413. DOI:10.1039/C2SM27031E.
9. Pełalski J., Bildanau E., Ciach A. Self-Assembly of Spiral Patterns in Confined System with Competing Interactions. *Soft Matter*, 2019, vol. 15, no. 38, pp. 7715–7721. DOI: 10.1039/C9SM01179J.

References

1. Almarza N. G., Pełalski J., Ciach A. Effects of confinement on pattern formation in two dimensional systems with competing interactions. *Soft matter*, 2016, vol. 12, no. 36, pp. 7551–7563. DOI: 10.1039/C6SM01400C.
2. Pełalski J., Ciach A., Almarza N. G. Bistability in a self-assembling system confined by elastic walls: Exact results in a one-dimensional lattice model. *Journal of Chem. Phys.*, 2015, vol. 142, no. 1. DOI: 10.1063/1.4905142.
3. Pełalski J., Almarza N. G., Ciach A. Effects of rigid or adaptive confinement on colloidal self-assembly. Fixed vs. fluctuating number of confined particles. *Journal of Chem. Phys.*, 2015, vol. 142, no. 20. DOI: 10.1063/1.4921787.
4. Kim E.-Y., Kim S.-C., Suh S.-H. Structure and phase behavior of two-Yukawa fluids with competing interactions in planar slit pores. *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, no. 5. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.051203.
5. Amazon J. J., Goh S. L., Feigenson G. W. Competition between line tension and curvature stabilizes modulated phase patterns on the surface of giant unilamellar vesicles: A simulation study. *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 87, no. 2. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.022708.
6. Pełalski J., Ciach A. Orientational ordering of lamellar structures on closed surfaces. *Journal of Chem. Phys.*, 2018, vol. 148, no. 17. DOI:10.1063/1.5026112.
7. Serna H., Noya E. G., Gózdź W. Assembly of Helical Structures in Systems with Competing Interactions under Cylindrical Confinement. *Langmuir*, 2019, vol. 35, no. 3, pp. 702–708. DOI: 10.1021/acs.langmuir.8b03382.
8. Shi A.-C., Li B. Self-assembly of diblock copolymers under confinement. *Soft Matter*, 2013, vol. 9, no. 5, pp. 1398–1413. DOI:10.1039/C2SM27031E.
9. Pełalski J., Bildanau E., Ciach A. Self-Assembly of Spiral Patterns in Confined System with Competing Interactions. *Soft Matter*, 2019, vol. 15, no. 38, pp. 7715–7721. DOI: 10.1039/C9SM01179J.

Информация об авторе

Бильданов Эльдар Эмирович – магистр технических наук, аспирант кафедры механики и конструирования. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: eldar.bildanov@gmail.com

Information about the author

Bildanau Eldar Emiravich – Master of Engineering, PhD student, the Department of Mechanics and Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: eldar.bildanov@gmail.com

Поступила после доработки 13.01.2021

ФИЗИКА PHYSICS

УДК 535.37+541.65+543.4

А. М. Сохибова, Н. Н. Крук

Белорусский государственный технологический университет

АНАЛИЗ КИСЛОТНО-ОСНОВНЫХ РАВНОВЕСИЙ В НИЖНЕМ ВОЗБУЖДЕННОМ СИНГЛЕТНОМ S_1 СОСТОЯНИИ ПОРФИРИНОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦИКЛА ФЁРСТЕРА

С использованием цикла Фёрстера оценена величина изменений основности порфиринового макроцикла при заселении нижнего возбужденного S_1 состояния ΔpK_a для незамещенной молекулы порфина и шести 5,10,15,20-арилзамещенных производных, отличающихся количеством и расположением фенильных и мезитильных групп. Проведен анализ изменения основности для равновесия между свободным основанием и монопротонированной формой – ΔpK_{a3} и равновесия между монопротонированной и дважды протонированной формами – ΔpK_{a4} . Установлено, что величина и направление изменения ΔpK_{a3} и ΔpK_{a4} существенно зависят от архитектуры периферического замещения макроцикла. Молекула порфина в нижнем возбужденном S_1 состоянии является более сильной кислотой, чем в основном: $\Delta pK_{a3} = -1,1$, а $\Delta pK_{a4} = -0,46$. Для 5,10,15,20-арилзамещенных производных обнаружен рост основности в S_1 состоянии с увеличением количества фенильных заместителей: величина ΔpK_{a3} линейно возрастает от $-0,39$ для 5,10,15,20-тетраметилпорфирина, до $1,1$ для 5,10,15,20-тетрафенилпорфирина. Изменения, по-видимому, обусловлены различиями в: а) конформационной подвижности макроцикла и б) двугранном угле между плоскостями арильных фрагментов и средней плоскостью макроцикла. Присоединение второго протона увеличивает основность, величина ΔpK_{a4} для всех производных положительная и слабо зависит от архитектуры замещения.

Ключевые слова: порфирин, кислотно-основные равновесия, периферическое замещение, возбужденное состояние.

Для цитирования: Сохибова А. М., Крук Н. Н. Анализ кислотно-основных равновесий в нижнем возбужденном синглетном S_1 состоянии порфиринов с использованием цикла Фёрстера // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. №1 (242). С. 25–30.

A. M. Sokhibova, M. M. Kruk

Belarusian State Technological University

ANALYSIS OF THE ACID-BASE EQUILIBRIA IN THE LOWEST EXCITED SINGLET S_1 STATE OF PORPHYRINS USING FÖRSTER CYCLE

Using the Förster cycle the value of the basicity changes upon the population of the lowest singlet excited S_1 state ΔpK_a has been estimated for unsubstituted porphine molecules and for six 5,10,15,20-aryl-substituted derivatives, which differing in number and position of phenyl and mesityl groups. The analysis of the basicity changes has been carried out for equilibria between free base and monoprotonated form ΔpK_{a3} , and between monoprotonated and doubly protonated forms ΔpK_{a4} . It was found that value and direction of changes of ΔpK_{a3} and ΔpK_{a4} depend substantially on the architecture of peripheral substitution of macrocycle. Porphine molecule in its lowest excited S_1 state is a stronger acid compared to the ground state: $\Delta pK_{a3} = -1.1$, and $\Delta pK_{a4} = -0.46$. For 5,10,15,20-aryl-substituted derivatives increase in the basicity in S_1 state was found according to increase in the number of phenyl substituents: value ΔpK_{a3} increases linearly from -0.39 for 5,10,15,20-tetramesitylporphyrin, up to 1.1 for 5,10,15,20-tetraphenylporphyrin. The changes are likely to be due to differences in: a) macrocycle conformation flexibility and b) dihedral angle between the planes of the aryl fragments and the macrocycle mean plane. Attachment of the second proton increases the basicity; the value ΔpK_{a4} is positive for all the derivatives and barely depends on the substitution architecture.

Key words: porphyrin, acid-base equilibria, peripheral substitution, excited state.

For citation: Sokhibova A. M., Kruk M. M. Analysis of the acid-base equilibria in the lowest excited singlet S_1 state of porphyrins using Förster cycle. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2021, no. 1 (242), pp. 25–30 (In Russian).

Введение. Молекулы порфиринов являются амфотерными соединениями и обладают как основными, так и кислотными свойствами. Кислотные свойства, заключающиеся в диссоциации пиррольных протонов, проявляются при взаимодействии порфиринов либо с сильными основаниями, либо с акцепторами протонов, так называемыми «протонными губками», а также при образовании металлокомплексов [1]. Проявления основных свойств, которые заключаются в присоединении к атомам азота пирролениновых колец в ядре тетрапиррольного макроцикла одного либо двух протонов, встречаются гораздо чаще. Это обусловлено тем, что константы основности для большинства порфиринов относительно невелики. В этом случае достаточно очень малой концентрации кислоты (а для некоторых производных достаточной является концентрация протонов при растворении в протонных растворителях), чтобы произошло протонирование в ядре тетрапиррольного макроцикла [2], причем в ядре тетрапиррольного макроцикла [2], причем в растворе можно стабилизировать как монопротонированные, так и дважды протонированные формы. Из-за легкости получения протонированных форм порфиринов, в отличие от их депротонированных форм, основные свойства порфиринового макроцикла детально изучены для большого числа производных порфиринов, которые различаются архитектурой периферического замещения [2–6]. В результате исследований установлена взаимосвязь величины pK_a и процессов перераспределения электронной плотности между макроциклом и периферическим заместителями: чем выше электронодонорная способность периферической оболочки, тем выше основность макроцикла (выше pK_a). Методами рентгеноструктурного анализа и квантово-химических расчетов установлено, что двукратное протонирование сопровождается значительными неплоскостными искажениями тетрапиррольного макроцикла седлообразного типа, в результате которых протоны пиррольных колец и неподеленная электронная пара атомов азота пирролениновых колец экспонируются в растворитель [6]. Отмечено, что неплоскостные искажения приводят к значительному росту основности макроцикла благодаря более благоприятным условиям для межмолекулярных взаимодействий по сравнению с таковыми для плоского макроцикла, в котором атомы азота пирролениновых колец частично экранируются.

Вместе с тем необходимо отметить, что основное внимание в большинстве исследований уделялось изучению кислотно-основных свойств производных порфиринов в основном электронном состоянии, в то время как сведения о кислотно-основных равновесиях в возбужденных

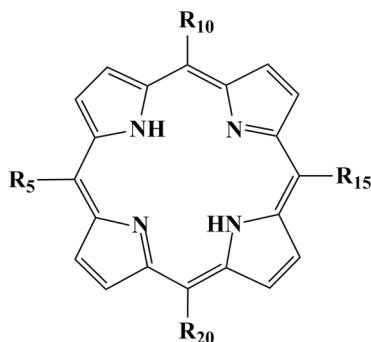
электронных состояниях порфиринов носят фрагментарный характер [5, 7, 8] и главным образом касаются основности флуоресцентного S_1 состояния. Имеются существенные основания ожидать заметные изменения основности макроцикла при заселении нижних возбужденных синглетного S_1 и триплетного T_1 состояний. Во-первых, при электронном возбуждении происходит перераспределение электронной плотности в макроцикле в результате заселения других молекулярных орбиталей [2]. Электронная плотность на атомах азота пирролениновых колец в возбужденных состояниях будет отличаться, и зависимость основности макроцикла от архитектуры периферического замещения и электронодонорных / электроноакцепторных характеристик заместителей может быть иной. Во-вторых, в возбужденных электронных состояниях молекулярная конформация порфиринового макроцикла отличается от таковой в основном электронном состоянии. Причем протонированные формы, характеризующиеся значительными неплоскостными искажениями, испытывают весьма существенную конформационную релаксацию в возбужденных состояниях. Свидетельством конформационной релаксации в нижнем возбужденном синглетном S_1 состоянии является заметный сдвиг Стокса, величина которого может достигать 1000 см^{-1} [6].

Изучение кислотно-основных характеристик порфиринов в возбужденных состояниях представляет интерес не только в фундаментальном, но и в прикладном аспекте. Значительные сдвиги величины pK_a в возбужденном состоянии могут быть использованы в биологии, медицине, разработке новых технологических процессов для локального фотоиницирования химических реакций, требующих для протекания избытка, либо дефицита протонов в микроокружении реагентов.

Для определения величины pK_a в возбужденном синглетном S_1 состоянии, как правило, используется кислотно-основное титрование спектров флуоресценции (см. напр. [7]). Такой подход может быть использован для анализа кислотно-основного равновесия между свободным основанием и дважды протонированной формой порфирина, однако его использование для анализа промежуточных стадий равновесия – между свободным основанием и монопротонированной формой, и между монопротонированной и дважды протонированной формами во многих случаях ограничено из-за близости значений pK_a для этих стадий.

В настоящей работе кислотно-основные равновесия в нижнем возбужденном синглетном S_1 состоянии анализируются с использованием цикла Фёрстера, который позволяет получить оценку изменения основности при его заселении

по отношению к основности основного состояния $\Delta pK_a = pK_a(S_1) - pK_a(S_0)$ [9]. Исследованы кислотно-основные равновесия для незамещенной молекулы порфина и шести 5,10,15,20-арилзамещенных производных, отличающихся количеством и расположением фенильных и мезитильных групп (рис. 1).



- 1– R₅ = R₁₀ = R₁₅ = R₂₀ = H
- 2– R₅ = R₁₀ = R₁₅ = R₂₀ = Мезитил (Мез)
- 3– R₅ = R₁₀ = R₁₅ = Мез; R₂₀ = Фенил (Ф)
- 4– R₅ = R₁₅ = Мез; R₁₀ = R₂₀ = Ф
- 5– R₅ = R₁₀ = Мез; R₁₅ = R₂₀ = Ф
- 6– R₅ = Мез; R₁₀ = R₁₅ = R₂₀ = Ф
- 7– R₅ = R₁₀ = R₁₅ = R₂₀ = Ф

Рис. 1. Структура и нумерация исследованных соединений. Заместители обозначены в соответствии с нумерацией атомов в макроцикле (согласно номенклатуре IUPAC)

Выполнен анализ изменения основности при заселении нижнего возбужденного синглетного S₁ состояния для равновесия между свободным основанием и монопротонированной формой – ΔpK_{a3} , и равновесия между монопротонированной и дважды протонированной формами – ΔpK_{a4} . Полученные данные сопоставляются с изменениями молекулярной конформации исследованных соединений при формировании протонированных форм для дифференциации структурных и электронных вкладов в величины ΔpK_{a3} и ΔpK_{a4} , а также в суммарную величину $\Delta pK_{a3,4}$.

Основная часть. Цикл Фёрстера представляет собой непрямой метод исследования кислотно-основных равновесий в возбужденных состояниях путем совместного рассмотрения термодинамических и спектроскопических характеристик молекулярной системы. В основу метода положена зависимость энтальпии ΔH кислотно-основного равновесия от природы состояния, в котором это равновесие наблюдается. Величина молярной энтальпии (де)протонирования в нижнем возбужденном синглетном S₁ состоянии $\Delta H(S_1)$ отличается от молярной энтальпии реакции в основном состоянии $\Delta H(S_0)$ на величину, которая определяется разницей в энергии длинноволновых 0-0 переходов ΔE_{00} исходных

молекул и их (де)протонированных продуктов. Метод предполагает равенство изменения энтропии в основном и возбужденном состояниях $\Delta S(S_1) = \Delta S(S_0)$. В этом приближении величина свободной энергии Гиббса $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ равна E_{00} , а разница в величине свободной энергии Гиббса для исходных молекул и их (де)протонированных продуктов $\Delta\Delta G$ равна ΔE_{00} . Величина ΔG связана с равновесной константой депротонирования K_a соотношением

$$\Delta G = -RT \ln K_a, \quad (1)$$

где R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура. В результате разность величин $pK_a(S_1)$ и $pK_a(S_0)$ может быть рассчитана как

$$\Delta pK_a = -\Delta E_{00} / 2,303RT. \quad (2)$$

Для незамещенной молекулы порфина 1 и семейства 5,10,15,20-арилзамещенных производных 2–7 (рис. 1), спектрально-люминесцентные характеристики свободных оснований, моно- и дважды протонированных форм были измерены нами ранее [3, 5, 10], однако кислотно-основные равновесия в возбужденных электронных состояниях не рассматривались. Полученные методом Фёрстера оценки величин ΔpK_{a3} , ΔpK_{a4} и $\Delta pK_{a3,4}$ приведены в таблице.

Анализ полученных данных позволяет сделать заключение о существенном вкладе как электронных, так и структурных эффектов в изменение основности макроцикла ΔpK_a при заселении нижнего возбужденного S₁ состояния. Так, для незамещенной молекулы порфина 1 в S₁ состоянии происходит уменьшение основности как на стадии присоединения первого протона ($\Delta pK_{a3} = -1,1$) с образованием монопротонированной формы, так и при присоединении второго протона ($\Delta pK_{a4} = -0,46$). Молекула порфина, таким образом, в нижнем возбужденном синглетном S₁ состоянии является более сильной кислотой, чем в основном состоянии. При этом на первом шаге протонирования наблюдаются большие изменения величины pK_a . Логично предложить, что это обусловлено формированием несимметричного неплоского конформера седлообразного типа. Двугранный угол между плоскостью протонированного на данной стадии пиррольного кольца и средней плоскостью макроцикла составляет более 10°, в то время как непротонированное пиррольное кольцо практически остается в плоскости, а для двух других величина двугранного угла составляет около 2° [3]. В результате присоединения второго протона формируется симметричная молекулярная конформация с двугранными углами между пиррольными фрагментами и средней плоскостью макроцикла около 9°. Очевидно, что в первом случае возмущения электронной структуры оказываются больше.

Максимумы полос поглощения и флуоресценции свободного основания, моно- и дважды протонированных форм исследованных соединений и величины изменения основности $\Delta pK_a = pK_a(S_1) - pK_a(S_0)$ для кислотно-основных равновесий в ядре макроцикла

№	$\lambda_{п}, \text{нм}$			$\lambda_{фл}, \text{нм}$			ΔpK_{a3}	ΔpK_{a4}	$\Delta pK_{a3,4}$
	H_2P	H_3P^+	H_4P^{2+}	H_2P	H_3P^+	H_4P^{2+}			
1	612,0	590,0	586,0	615,0	597,0	586,0	-1,171	-0,461	-1,632
2	646,0	631,0	631,0	649,0	638,0	649,0	-0,676	0,283	-0,393
3	646,0	636,0	636,0	649,0	647,0	657,0	-0,310	0,251	-0,060
4	646,0	640,0	640,0	649,0	653,0	667,0	-0,054	0,343	0,289
5	646,0	643,0	643,0	649,0	656,0	667,0	0,098	0,268	0,367
6	646,0	648,0	648,0	649,0	666,0	676,0	0,47	0,237	0,707
7	647,5	655,0	655,0	651,0	—	687,0	—	—	1,060

Сопоставление изменений величин ΔpK_{a3} и ΔpK_{a4} , для соединений **1** и **2** показывает, что молекулярная конформация макроцикла в монопротонированной форме в основном состоянии у них достаточно близка [3], соединения испытывают практически одинаковую конформационную релаксацию (сдвиг Стокса одинаков, см. табл.), но изменения основности существенно различаются. Очевидно, что донирование электронной плотности мезитильными заместителями приводит к росту основности соединения **2** в S_1 состоянии.

В смешанных мезитил-фенильных 5,10,15,20-замещенных производных **2–6** на величины ΔpK_a одновременно влияют оба фактора. Мезитил является заместителем с объёмными метильными группами в *орто*-положениях арильного кольца, которые создают стерические препятствия для свободного вращения заместителя вокруг C_m-C_1 связи и не позволяют макроциклу сформировать при протонировании седлообразный конформер с большой величиной двугранных углов между пиррольными кольцами и средней плоскостью макроцикла [3, 5]. В то же время для фенильных заместителей наблюдается синергизм наклона пиррольных колец по отношению к средней плоскости макроцикла и поворота фенильных заместителей в копланарное макроциклу положение [5]. Таким образом, совместное влияние структурных и электронных факторов, обусловленных присоединением двух различных заместителей и последовательной заменой одного другим в соединениях **2–6**, приводит к формированию зависимостей величин ΔpK_a от архитектуры периферического замещения (рис. 2).

В ряду соединений **2–6** при формировании монопротонированной формы основность макроцикла в S_1 состоянии практически линейно увеличивается (рис. 2). Отметим, что в соединениях **4** и **5**, представляющих собой *транс*- и *цис*-конформеры дифенилдимезитилпорфиринов электронные эффекты в первом приближении можно считать одинаковыми. Соответственно,

различия в полученных величинах ΔpK_{a3} отражают их структурные особенности, отмеченные нами ранее [10].

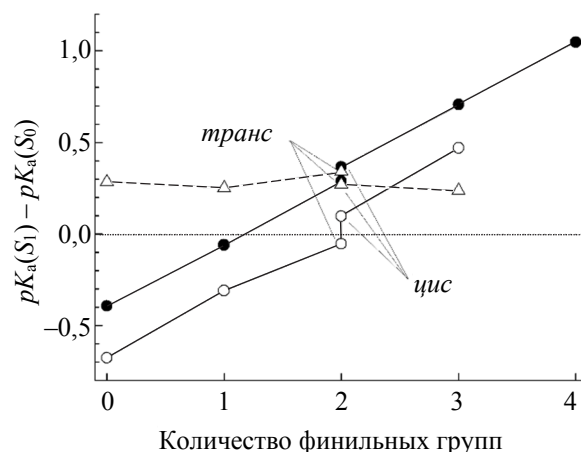


Рис. 2. Зависимость величин ΔpK_{a3} (O), ΔpK_{a4} (Δ), и $\Delta pK_{a3,4}$ (●) от количества фенильных заместителей в макроцикле соединений **2–6**

Присоединение второго протона приводит к очень близким значениям ΔpK_{a4} для соединений **2–6**. По нашему мнению, это является результатом формирования близких по структуре макроцикла молекулярных структур. Аддитивный характер вкладов в изменение основности на первом и втором шагах протонирования при образовании дважды протонированной формы приводит к тому, что тенденция зависимости суммарной величины $\Delta pK_{a3,4}$ от архитектуры периферического замещения отражает тенденцию изменения величины ΔpK_{a3} .

Заключение. Использование цикла Фёрстера позволяет сделать оценку величины pK_a в нижнем возбужденном синглетном S_1 состоянии и определить характер ее поведения при изменении архитектуры периферического замещения макроцикла. Для молекулы порфина и семейства 5,10,15,20-арилзамещенных производных рассчитана величина изменения основности при заселении нижнего возбужденного

синглетного S_1 состояния для равновесий между свободным основанием и монопротонированной формой – ΔpK_{a3} , и между монопротонированной и дважды протонированной формами ΔpK_{a4} . Показано, что величина изменения основности зависит от электронных и структурных факторов, обусловленных присоединением периферических заместителей. Аддитивный характер

эффектов периферического замещения позволяет направленно изменять кислотно-основные свойства порфиринов. Обнаруженные корреляции «структура – свойство» позволяют предложить молекулярные структуры, существенно различающиеся основностью макроцикла в основном S_0 и нижнем возбужденном синглетном S_1 состоянии для применения в фотохимии.

Список литературы

1. Пуховская С. Г., Иванова Ю. Б., Крук Н. Н., Голубчиков О. А., Койфман О. И. Электронные и стерические эффекты заместителей как способ управления свойствами тетрапиррольных макроциклов // *Функциональные материалы на основе тетрапиррольных макрогетероциклических соединений* / под ред. О. И. Койфмана. М.: ЛЕНАНД, 2019. С. 63–101.
2. Крук Н. Н. Структура и оптические свойства тетрапиррольных соединений. Минск: БГТУ. 2019. 216 с.
3. Quantum chemical insights into the dependence of porphyrin basicity on the *meso*-aryl substituents: thermodynamics, buckling, reaction sites and molecular flexibility / M. Presselt [et al.] // *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2015. Vol. 17, no. 21. P. 14096–14106.
4. Андрианов В. Г., Малкова О. В., Березин Д. Б. Кислотно-основные свойства порфиринов // *Успехи химии порфиринов: в 5 т.* / под ред. О. А. Голубчикова. СПб., 2001. Т. 3. С. 107–129.
5. Kruk M. M., Starukhin A. S., Maes W. Influence of macrocycle protonation on the photophysical properties of porphyrins // *Macroheterocycles*. 2011. Vol. 4, no. 2. P. 69–79.
6. Correlation of photophysical parameters with macrocycle distortion in porphyrins with graded degree of saddle distortion / B. Röder [et al.] // *Photochem. Photobiol. Sci.* 2010. Vol. 9. P. 1152–1158.
7. Kruk M. M., Braslavsky S. E. Acid-base equilibria in 5,10,15,20-tetrakis-(4-sulfonatophenyl)-chlorin: Role of Conformational Flexibility // *J. Phys. Chem. A*. 2006. Vol. 110, no. 10. P. 3414–3425.
8. Kruk Mikalai M., Braslavsky Silvia E. Structural volume changes upon triplet formation of water-soluble porphyrins depend on the resonant effect of substituents // *Photochem. Photobiol. Sci.* 2012. Vol. 11, no. 6. P. 972–978.
9. Braslavsky Silvia E. Glossary of terms used in photochemistry, 3rd edition (IUPAC recommendations 2006) // *Pure and Applied Chemistry*. 2007. Vol. 79, no. 3. P. 293–465.
10. Spectral-Luminescent Properties of Meso-Tetraarylporphyrins Revisited: the Role of Aryl Type, Substitution Pattern and Macrocycle Core Protonation / Irina V. Vershilovskaya [et al.] // *Macroheterocycles*. 2017. Vol. 10, no. 3. P. 257–267.

References

1. Pukhovskaya S. G., Ivanova Yu. B., Kruk M. M., Golubchikov O. A., Koifman O. I., Electronic and steric effects of substituents as a tool to control the properties of tetrapyrrolic macrocycles. *Funktsional'nyye materialy na osnove tetrapirrol'nykh makroheterotsiklicheskih soyedineniy* [Functional materials based on tetrapyrrole macroheterocyclic compounds] / ed. by O. I. Koifman. Moscow, LENAND Publ., 2019, pp. 63–101 (In Russian).
2. Kruk M. M. *Stroyeniye i opticheskiye svoystva tetrapirrol'nykh soyedineniy* [Structure and optical properties of tetrapyrrolic compounds]. Minsk, BGTU Publ., 2019, 216 p.
3. Presselt M., Dehaen W., Maes W., Klamt A., Martinez T. J., Beenken W. J. D., Kruk M. M. Quantum chemical insights into the dependence of porphyrin basicity on the *meso*-aryl substituents: thermodynamics, buckling, reaction sites and molecular flexibility. *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2015, vol. 17, no. 21, pp. 14096–14106.
4. Andrianov V. G., Malkova O. V., Berezin D. B. Acid-base properties of porphyrins. *Uspekhi khimii porfirinov* [Advances in Porphyrin Chemistry] / ed. by O. A. Golubchikov. St. Petersburg. 2001, vol. 3, pp. 107–129 (In Russian).
5. Kruk M. M., Starukhin A. S., Maes W. Influence of macrocycle protonation on the photophysical properties of porphyrins. *Macroheterocycles*. 2011, vol. 4, no. 2, pp. 69–79.
6. Röder B., Büchner M., Rückmann I., Senge M. O. Correlation of photophysical parameters with macrocycle distortion in porphyrins with graded degree of saddle distortion. *Photochem. Photobiol. Sci.* 2010, vol. 9, pp. 1152–1158.

7. Kruk M. M., Braslavsky S. E. Acid-base equilibria in 5,10,15,20-tetrakis-(4-sulfonatophenyl)-chlorin: Role of Conformational Flexibility. *J. Phys. Chem. A*. 2006, vol. 110, no. 10, pp. 3414–3425.

8. Kruk Mikalai M., Braslavsky Silvia E. Structural volume changes upon triplet formation of water-soluble porphyrins depend on the resonant effect of substituents. *Photochem. Photobiol. Sci.* 2012, vol. 11, no. 6, pp. 972–978.

9. Braslavsky Silvia E. Glossary of terms used in photochemistry, 3rd edition (IUPAC recommendations 2006). *Pure and Applied Chemistry*. 2007, vol. 79, no. 3, pp. 293–465.

10. Irina V. Vershilovskaya, Stefano Stefani, Pieter Verstappen, Thien H. Ngo, Ivan G. Scheblykin, Wim Dehaen, Wouter Maes and Mikalai M. Kruk Spectral-Luminescent Properties of Meso-Tetraarylporphyrins Revisited: the Role of Aryl Type, Substitution Pattern and Macrocycle Core Protonation. *Macroheterocycles*. 2017, vol. 10, no. 3, pp. 257–267.

Информация об авторах

Сохибова Анархан Мухфизуллокызы – студент. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: anarhan.soxibova@bk.ru

Крук Николай Николаевич – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: m.kruk@belstu.by

Information about the authors

Sokhibova Anarkhan Muhfizullokyzy – student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova st., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: anarhan.soxibova@bk.ru

Kruk Mikalai Mikalaevich – DSc (Physics and Mathematics), Head of the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova st., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: m.kruk@belstu.by

Поступила после доработки 07.12.2020

ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING SCIENCES

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ MODELLING OF PROCESSES AND MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS

УДК 519.687.1

М. В. Дубовик, В. В. Смелов

Белорусский государственный технологический университет

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛИЗА АЛГОРИТМОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАПРОСОВ МЕЖДУ СЕРВЕРАМИ

Статья посвящена разработке математической модели программной системы с микросервисной архитектурой. Модель предназначена для анализа эффективности алгоритмов распределения входящих запросов между несколькими экземплярами автономных серверных компонент. С помощью имитационной реализации модели проведено экспериментальное исследование двух алгоритмов балансировки нагрузки: алгоритма Round Robin, который равномерно распределяет запросы по серверам, и алгоритма The Least Bandwidth Method, который позволяет распределить запросы по серверам на основе их загруженности. В отличие от алгоритма статического распределения нагрузки Round Robin, динамический алгоритм The Least Bandwidth Method учитывает текущую нагрузку каждого сервера в системе. При таком подходе можно динамически в зависимости от загруженности серверов распределять поступающие запросы, чтобы ускорить обработку. Такие алгоритмы дают хорошие результаты, особенно, когда время выполнения сильно варьируется от одной задачи к другой.

Ключевые слова: балансировка нагрузки, математическая модель, имитационная модель, Round Robin, The Least Bandwidth Method.

Для цитирования: Дубовик М. В., Смелов В. В. Математическая модель для анализа алгоритмов распределения запросов между серверами // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 1 (242). С. 31–35.

M. V. Dubovik, V. V. Smelov

Belarusian State Technological University

MATHEMATICAL MODEL FOR ANALYZING ALGORITHMS FOR DISTRIBUTING REQUESTS BETWEEN SERVERS

The article is devoted to the development of a mathematical model of a software system with a microservice architecture. The model is designed to analyze the efficiency of algorithms for distributing incoming requests among several instances of stand-alone server components. Using a simulation implementation of the model, an experimental study of two load balancing algorithms was carried out: the Round Robin algorithm, which evenly distributes requests to servers, and the Least Bandwidth Method, which allows you to distribute requests across servers based on their load. Unlike the Round Robin static load balancing algorithm, The Least Bandwidth Method dynamic

algorithm takes into account the current load of each server in the system. With this approach, it is possible to dynamically distribute incoming requests depending on the server load in order to speed up processing. Such algorithms give good results, especially when the execution time varies greatly from one task to another.

Key words: load balancing, mathematical model, simulation model, Round Robin, The Least Bandwidth Method.

For citation: Dubovik M. V., Smelov V. V. Mathematical model for analyzing algorithms for distributing requests between servers. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2021, no. 1 (242), pp. 31–35 (In Russian).

Введение. Основным трендом современного бизнеса является его цифровая трансформация – превращение предприятия в IT-предприятие. Наиболее отчетливо это проявляется в банковской и финансовой сферах, в оптовой и розничной торговле, транспортной логистике, рекламном бизнесе и средствах массовой информации. Современные предприятия предоставляют услуги клиентам с помощью интернет-сервисов, что позволяет им повысить эффективность своей деятельности и расширить аудиторию клиентов. При этом, как правило, сервисы имеют непрерывный цикл работы, предоставляющий возможность клиентам воспользоваться им в любой момент времени и из любой географической точки мира.

Как правило, сервисы представляют собой web-приложения – программные системы, имеющие клиент-серверную архитектуру и применяющие для взаимодействия между своими компонентами протокол HTTP. Современный подход к разработке web-приложения предполагает разработку легковесных серверных компонент – микросервисов, одним из основных свойств которых является их автономность. Автономность позволяет строить программные системы с несколькими одновременно работающими независимо друг от друга экземплярами микросервисов.

Применение автономных серверных компонент (микросервисов) представляет возможность разработчикам создавать программные системы с несколькими одновременно работающими экземплярами одной и той же серверной компоненты. Такое решение позволяет, с одной стороны, наращивать производительность программной системы, с другой – повысить ее надежность.

Ниже рассматривается математическая модель программной системы с микросервисной архитектурой. Модель предназначена для анализа эффективности алгоритмов распределения входящих запросов между несколькими экземплярами автономных серверных компонент.

Основная часть. Рассмотрим программную систему W , представленную на рис. 1 и включающую три типа компонент: клиенты ($C_i, i = 1, i$), серверы ($S_j, j = 1, j$) и балансировщик нагрузки (B).

Клиенты – программная компонента, обменивающаяся сообщениями с другими программными компонентами (серверами). Сообщения, перемещающиеся от клиента к серверу, будем

называть запросами (на рисунке обозначены символом d), а от сервера к клиенту, – ответами (символ r).

Балансировщик нагрузки (далее просто – балансировщик) – программная компонента, которая является промежуточным звеном между клиентами и серверами: он принимает запросы от клиентов и перенаправляет их серверам и, наоборот, принимает ответы от серверов и отправляет соответствующим клиентам. Запросы, отправляемые балансировщиком серверам, формируются на основе запросов, полученных от клиентов: содержат все исходные данные запроса и, кроме того, дополнительную информацию (на рисунке обозначена символом α), которая может быть использована для управления поведением сервера. Ответы, направляемые серверами балансировщику, тоже могут содержать дополнительную информацию (β), которая может быть использована для управления поведением балансировщика.

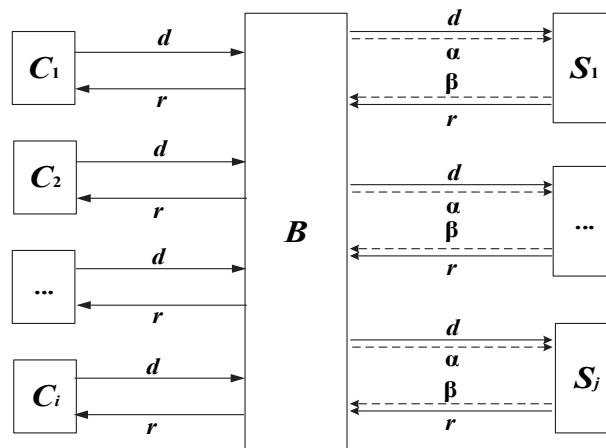


Рис. 1. Схема программной системы W

Будем далее предполагать, что процесс обмена сообщениями между клиентами и серверами обладает следующими свойствами:

- 1) каждому запросу соответствует один и только один ответ;
- 2) запрос может быть обработан любым сервером;
- 3) если клиент отправляет серию запросов, то эти запросы в общем случае могут обрабатываться разными серверами;
- 4) ответ на запрос всегда получает тот клиент, который отправил запрос;

5) сервер, на который направляется клиентский запрос, определяется только алгоритмом работы балансировщика.

Представим описанную выше программную систему W как четверку:

$$W = \langle \{C_j, j = \overline{1, j}\}, \{K_l, l = \overline{1, l}\}, B, \{S_i, i = \overline{1, i}\} \rangle, \quad (1)$$

где $C_j, j = \overline{1, j}$ – множество клиентов; $K_l, l = \overline{1, l}$ – множество категорий запросов; B – балансировщик; $S_i, i = \overline{1, i}$ – множество серверов.

Клиента $C \in \{C_j, j = \overline{1, j}\}$ представим как двойку:
 $C = \langle K, \lambda(t) \rangle, \quad (2)$

где $K \in \{K_l, l = \overline{1, l}\}$ – категория запросов, генерируемых клиентом; $\lambda(t)$ – интенсивность запросов, генерируемых клиентом (в общем случае является функцией времени).

Категория $K \in \{K_l, l = \overline{1, l}\}$ запроса является целочисленной положительной величиной, характеризующей относительную трудоемкость обработки запроса. При этом значение данной величины не зависит от сервера, обрабатывающего этот запрос. Например, если $K_1 = 3$ и $K_2 = 6$, то это означает, что при равных условиях обработки запросы первой категории имеют трудоемкость в 2 раза меньше трудоемкости обработки запросов второй категории.

Балансировщик формально представим в виде четверки:

$$B = \langle P, I_B, A, O_B \rangle, \quad (3)$$

где P – процедура распознавания категории запроса; I_B – процедура обработки запроса (принимает запрос от клиента и отправляет его серверу, использует алгоритм A , а также формирует для сервера дополнительную информацию α , помещаемую в запрос); A – алгоритм выбора сервера для обработки запроса (использует результат работы процедуры P); O_B – процедура обработки ответа (принимает ответ сервера и отправляет его клиенту).

Сервер $S \in \{S_i, i = \overline{1, i}\}$ представим в виде пятерки:

$$S = \langle h, k, F, I_S, O_S \rangle, \quad (4)$$

где h – максимальное количество запросов, которые могут одновременно обрабатываться сервером; k – коэффициент, который при умножении на значение категории запроса дает время, затрачиваемое данным сервером на обработку этого запроса; F – процедура вычисления величины дополнительного времени обработки запроса из-за загруженности сервера; I_S – процедура обработки запроса (обрабатывает управляющую информацию от балансировщика α); O_S – процедура обработки ответа (дополняет ответ сервера управляющей информацией β для балансировщика).

Следует обратить внимание на то, что формальное описание программной системы W не учитывает временные задержки, связанные с пересылкой сообщений в компьютерной сети и вычислениями балансировщика, а также не ограничивает интенсивности потоков сообщений. Это связано с тем, что задачей исследования является исключительно алгоритм управления балансировщиком, работа которого сводится к правильному выбору сервера, для обработки очередного поступившего от клиента запроса. При этом информацию, которую использует балансировщик в своих вычислениях, он извлекает только из поступающих запросов и ответов, а критерий его эффективности на интервале времени $(0, t)$ описывается целевой функцией (5).

$$\frac{M(t)}{L(t)} \rightarrow 1, \quad (5)$$

где $L(t)$ – количество поступивших в балансировщик запросов; $M(t)$ – количество поступивших в балансировщик ответов к заданному моменту времени t . Другими словами, если W_1 и W_2 – две программные системы, отличающиеся только входящими в их состав балансировщиками B_1 и B_2 , то алгоритм балансировщика B_1 является более эффективным, чем алгоритм балансировщика B_2 на интервале времени $(0, t)$, если верным является неравенство:

$$\frac{M_1(t)}{L_1(t)} > \frac{M_2(t)}{L_2(t)}, \quad (6)$$

где $L_1(t), M_1(t)$ и $L_2(t), M_2(t)$ – количество поступивших запросов и ответов соответственно в первый и второй балансировщики к моменту t . Очевидно, что временные задержки, связанные с пересылкой сообщений по компьютерной сети и интенсивности входных потоков, являются общими для сравниваемых алгоритмов и не влияют на результат сравнения. Учет сложности алгоритмов балансировщика (продолжительности вычисления) не предусматривается моделью и предполагается, что время, потраченное балансировщиками на вычисления, является постоянным и не влияет на результат сравнения.

На рис. 2 представлен протокол работы имитационной модели программной системы W с параметрами, описанными в таблице ниже.

Протокол представляет собой таблицу, состоящую из 8 столбцов (слева на право): текущее модельное время (значение 50000); алгоритм балансировщика (RR); содержимое строки ($L, R, M, L-R-M, M/L$ или F/L); четыре столбца, соответствующие категориям запросов, суммарное значение для всех категорий. Строки, помеченные символом L , содержат количество запросов, поступивших в балансировщик; символом R – количество запросов,

отвергнутых сервером ввиду превышения значения h ; M – количество ответов, поступивших в балансировщик; $L-R-M$ – количество запросов, которые обрабатываются в системе в текущий момент времени; M/L – отношение полученных ответов к общему количеству полученных запросов; F/L – отношение дополнительного времени (результат работы процедуры F балансировщика) к общему количеству поступивших запросов.

- 50000: RR	L:	5046	5047	5047	5046	=	20186
- 50000: RR	L:	5047	5046	5047	5047	=	20187
- 50000: RR	L:	5047	5047	5046	5047	=	20187
- 50000: RR	L:					==	60560
- 50000:							
- 50000: RR	R:	0	0	0	0	=	0
- 50000: RR	R:	1470	1609	1894	2800	=	7773
- 50000: RR	R:	2769	2851	3186	4231	=	13037
- 50000: RR	R:					==	20810
- 50000:							
- 50000: RR	M:	5046	5046	5047	5046	=	20185
- 50000: RR	M:	3550	3410	3128	2227	=	12315
- 50000: RR	M:	2241	2171	1837	803	=	7052
- 50000: RR	M:					==	39552
- 50000:							
- 50000: RR	L-R-M:	0	1	0	0	=	1
- 50000: RR	L-R-M:	27	27	25	20	=	99
- 50000: RR	L-R-M:	37	25	23	13	=	98
- 50000: RR	L-R-M:					==	198
- 50000:							
- 50000: RR	M/L:	1	1	1	1	=	1
- 50000: RR	M/L:	0,703	0,676	0,62	0,441	=	0,61
- 50000: RR	M/L:	0,444	0,43	0,364	0,159	=	0,349
- 50000: RR	M/L:					==	0,653
- 50000:							
- 50000: RR	F/L:	1	3	4	5	=	3
- 50000: RR	F/L:	276	268	248	178	=	242
- 50000: RR	F/L:	307	300	256	112	=	244
- 50000: RR	F/L:					==	163

Рис. 2. Результат имитационного моделирования при $A = RR$

Для каждого типа в протоколе записано по четыре строки: первые три соответствуют трем серверам в моделируемой системе, а последняя содержит суммарное значение (для L , R , M , $L-R-M$) или среднее арифметическое (для M/L , F/L).

Кратко поясним некоторые числовые значения, отраженные в протоколе.

1. Первый столбец: все значения в протоколе соответствуют состоянию системы на момент 50 000 единиц модельного времени.

2. Второй столбец: все значения в протоколе соответствуют алгоритму балансировщика RR , циклически (по одному) распределяющий запросы серверам.

3. Суммарная строка M/L : из общего количества поступивших запросов программная система сумела обработать примерно 65% запросов.

4. Суммарная строка L : общее количество запросов, поступивших в систему 60 560.

5. Последний столбец трех верхних строк L : количество запросов, поступивших на каждый сервер. Следует обратить внимание, что эти значения не отличаются более чем на 1. Это результат работы алгоритма RR , равномерно распределяющий запросы по серверам.

6. Суммарная строка R : общее количество запросов, отвергнутых серверами из-за перегрузки 20 810.

7. Суммарная строка M : общее количество обработанных запросов системой 39 552.

8. Суммарная строка $L-R-M$: общее количество запросов, обрабатываемых системой в текущий момент времени 198.

9. Суммарная строка F/L : в среднем каждый запрос, поступивший в систему, задерживается на обработке в сервере на 163 единицы времени из-за загруженности серверов.

Параметры имитационной модели программной системы W

Общие параметры	
Количество клиентов	4
Количество серверов	3
Количество категорий запросов	4
Время моделирования, ед. модельного времени	50 000
Клиенты $C = \langle K, \lambda(t) \rangle$	
1	$K = 1, \lambda(t) = 0,3$
2	$K = 2, \lambda(t) = 0,3$
3	$K = 3, \lambda(t) = 0,3$
4	$K = 4, \lambda(t) = 0,3$
Категории	
1	$K_1 = 1$
2	$K_2 = 2$
3	$K_3 = 3$
4	$K_4 = 4$
Серверы $S = \langle h, k, F, I_S, O_S \rangle$	
1	$h = 100, k = 1$ $F(t) = k(L(t) - R(t) - M(t))$ I_S, O_S – не используется
2	$h = 100, k = 4$ $F(t) = k(L(t) - R(t) - M(t))$ I_S, O_S – не используется
3	$h = 100, k = 7$ $F(t) = k(L(t) - R(t) - M(t))$ I_S, O_S – не используется
Балансировщик $B = \langle P, I_B, A, O_B \rangle$	
	P, I_B, O_B – не используется $A = RR$

Протокол на рис. 3 отражает результат моделирования программной системы W с параметрами, описанными в таблице, но с другим алгоритмом балансировщика ($A = BS$) выбора сервера.

Поясним результат моделирования, отраженный в протоколе на рис. 3.

1. Алгоритм BS отслеживает количество запросов, обрабатываемых каждым сервером, и направляет текущий запрос серверу, имеющему наименьшее количество обрабатываемых в данный момент запросов.

2. Последний столбец трех верхних строк $L-R-M$ имеют примерно одинаковое значение. Это результат работы алгоритма BS , выравнивающий количество одновременно обрабатываемых серверами запросов.

50000: BS	L:	13597	11805	9767	8189	=	43358
50000: BS	L:	914	2051	3370	4195	=	10530
50000: BS	L:	472	1127	1846	2599	=	6044
50000: BS	L:					==	59932
50000:							
50000: BS	R:	0	0	0	0	=	0
50000: BS	R:	0	0	0	0	=	0
50000: BS	R:	0	0	0	0	=	0
50000: BS	R:					==	0
50000:							
50000: BS	M:	13592	11800	9762	8186	=	43340
50000: BS	M:	912	2048	3364	4187	=	10511
50000: BS	M:	468	1124	1843	2590	=	6025
50000: BS	M:					==	59876
50000:							
50000: BS	L-R-M:	5	5	5	3	=	18
50000: BS	L-R-M:	2	3	6	8	=	19
50000: BS	L-R-M:	4	3	3	9	=	19
50000: BS	L-R-M:					==	56
50000:							
50000: BS	M/L:	1	1	0,999	1	=	1
50000: BS	M/L:	0,998	0,999	0,998	0,998	=	0,998
50000: BS	M/L:	0,992	0,997	0,998	0,997	=	0,997
50000: BS	M/L:					==	0,999
50000:							
50000: BS	F/L:	12	13	15	16	=	14
50000: BS	F/L:	56	60	66	71	=	66
50000: BS	F/L:	103	111	116	127	=	119
50000: BS	F/L:					==	34

Рис. 3. Результат имитационного моделирования при $A = BS$

3. Серверы не были перегружены и не отвергли ни одного запроса.

4. В среднем каждый запрос, поступивший в систему, задерживается на обработке в сервере на 34 единицы времени из-за загруженности серверов.

5. Значение $M/L = 1$ – критерий эффективности выполнен.

Заключение. В данной статье предложена математическая модель программной системы с микросервисной архитектурой, состоящая из трех типов компонент: клиенты, серверы и балансировщик нагрузки.

В отличие от ранее существовавших моделей балансировки нагрузки, предложенная в статье математическая модель учитывает категории поступающих запросов, характеризующие трудоемкость обработки запроса. Представленная модель программной системы позволяет проанализировать эффективность алгоритма, распределяющего входящие запросы между несколькими экземплярами серверных компонент.

Было воспроизведено поведение программной системы с микросервисной архитектурой и проведено экспериментальное исследование алгоритмов балансировки нагрузки Round Robin (равномерное распределение запросов) [1] и The Least Bandwidth Method (по минимальному времени реакции) [2]. Полученные в ходе исследования результаты эксперимента позволили отметить преимущества динамических алгоритмов балансировки серверной нагрузки перед статическими. Алгоритм The Least Bandwidth Method учитывает текущую нагрузку каждого сервера в системе и динамически в зависимости от загруженности серверов распределяет поступающие запросы, обеспечивая высокий критерий эффективности и снижение количества отвергнутых запросов из-за перегрузки.

Список литературы

1. Stuti D., Prashant M. Utilizing Round Robin Concept for Load Balancing Algorithm at Virtual Machine Level in Cloud Computing // *International Journal of Computer Applications*. 2014. Vol. 94. No. 4. P. 23–29.
2. Вартанян С. О., Сокол В. В., Лесная Н. С. Методы балансировки нагрузки в Cloud системах // *Кибернетика та системний аналіз*. 2012. № 3. С. 101–103.

References

1. Stuti D., Prashant M. Utilizing Round Robin Concept for Load Balancing Algorithm at Virtual Machine Level in Cloud Computing. *International Journal of Computer Applications*. 2014, vol. 94, no. 4, pp. 23–29.
2. Vartanyan S. O., Sokol V. V., Lesnaya N. S. Methods of loading balancing in Cloud systems. *Kybernetika ta sistemnyi analiz* [Cybernetics and System Analysis], 2012, no. 3, pp. 101–103 (In Russian).

Информация об авторах

Дубовик Марина Владимировна – магистрант кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: dubovik@belstu.by

Смелов Владимир Владиславович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: smw@belstu.by

Information about the authors

Dubovik Marina Vladimirovna – Master’s degree student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: dubovik@belstu.by

Smelov Vladimir Vladislavovich – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: smw@belstu.by

Поступила после доработки 08.02.2021

УДК 502.5

А. В. Бурмакова, В. В. Смелов

Белорусский государственный технологический университет

**ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ
ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ
ПРОЦЕССА ЗАГРЯЗНЕНИЯ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЫ
В РЕЗУЛЬТАТЕ АВАРИЙНОГО ПРОЛИВА НЕФТЕПРОДУКТОВ**

Деятельность любого эксперта в большинстве случаев можно свести к формулировке гипотез и оценкам их достоверности. При этом интерес представляют условия, при которых достоверность сформулированных гипотез возрастает или снижается.

Статья посвящена методу проверки гипотезы в условиях неопределенности с применением теории нечетких множеств в экспертной системе, предназначенной для поддержки принятия решений по выбору эффективных с точки зрения экологии технологий реабилитации геологической среды. Основой экспертной системы является модель прогнозирования последствий аварийного пролива нефтепродуктов. Модель является комплексной и включает четыре уровня: поверхностный, почвенный, грунтовый и уровень грунтовых вод. Модель описывает процесс вертикального проникновения нефтепродукта и горизонтального распространения на поверхностном уровне (растекание), а также перемещение вместе с грунтовыми водами. В статье проверяется гипотеза о достижении нефтепродуктом грунта в условиях недостоверности исходных данных, а также вычисляется оценка достоверности полученного результата.

Ключевые слова: математическая модель, системы поддержки решений, проверка гипотезы, нечеткие вычисления, экология, нефтепродукты, экспертная система.

Для цитирования: Бурмакова А. В., Смелов В. В. Применение нечетких вычислений для проверки гипотез на основе модели прогнозирования процесса загрязнения геологической среды в результате аварийного пролива нефтепродуктов // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 1 (242). С. 36–42.

A. V. Burmakova, V. V. Smelov

Belarusian State Technological University

**APPLICATION OF FUZZY CALCULATIONS
TO TEST HYPOTHESES BASED ON A MODEL FOR PREDICTING
THE PROCESS OF CONTAMINATION OF THE GEOLOGICAL ENVIRONMENT
AS A RESULT OF AN EMERGENCY SPILL OF OIL PRODUCTS**

The activity of any expert, in most cases, can be reduced to the formulation of hypotheses and assessments of their reliability. In this case, the conditions under which the reliability of the formulated hypotheses increases or decreases are of interest.

The article is devoted to the method of hypothesis testing in conditions of uncertainty using the theory of fuzzy sets in an expert system designed to support decision-making on the choice of efficient, from the point of view of ecology, technologies for the rehabilitation of the geological environment. The expert system is based on a model for predicting the consequences of an emergency spill of oil products. The model is complex and includes four levels: surface, soil, groundwater and groundwater level. The model describes the process of vertical penetration of oil products and horizontal spread at the surface level (spreading) and movement with groundwater. The article tests the hypothesis that the oil product reaches the ground in conditions of unreliability of the initial data, and calculates the assessment of the reliability of the result.

Key words: mathematical model, decision support systems, hypothesis testing, fuzzy calculations, ecology, oil products, expert system.

For citation: Burmakova A. V., Smelov V. V. Application of fuzzy calculations to test hypotheses based on a model for predicting the process of contamination of the geological environment as a result of an emergency spill of oil products. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2021, no. 1 (242), pp. 36–42 (In Russian).

Введение. Применение экспертной системы, как правило, связано с необходимостью

принятия решения в условиях частичной неопределенности, которая обычно связана с плохим

качеством исходных данных. Другими словами, экспертная система выступает в роли механизма поддержки принятия решений.

В некоторых случаях задача поддержки решения может быть сформулирована в форме предположения (гипотезы), требующей ответа, подтверждающего или отрицающего это предположение. При этом важным является не только сам ответ, но и оценка качества полученного ответа.

В источнике [1] описана математическая модель прогнозирования (ММП) последствий аварийного пролива нефтепродуктов (НП), которая является основой экспертной системы реабилитации геологической среды, загрязненной в результате аварийного пролива НП, и предназначена для поддержки принятия решений по формированию перечня мероприятий для реабилитации загрязненной геологической среды [2, 3].

Модель является комплексной и включает четыре уровня: поверхностный, почвенный, грунтовый и уровень грунтовых вод. Модель описывает процесс вертикального проникновения НП (через почву, грунт до грунтовых вод) и горизонтального распространения на поверхностном уровне (растекание), а также перемещение вместе с грунтовыми водами.

Исходными данными для ММП служат: тип НП (керосин, бензин, дизельное топливо, мазут), объем V_0 (m^3) пролитого НП, температура воздуха T ($^{\circ}C$), а также данные, характеризующие геологическую среду места пролива.

Пусть известны все исходные данные аварийного пролива НП. Рассмотрим гипотезу Ψ : **пролитый на поверхность НП достиг грунта.**

Для проверки сформулированной гипотезы будем использовать два первых уровня ММП: поверхностный и почвенный.

Поверхностный (первый) слой модели позволяет прогнозировать массу испарившегося НП, площадь и форму пятна загрязнения, а также определить массу НП, достигшую почвенного слоя.

Площадь пятна загрязнения S_1 (m^2) вычисляется по следующей формуле:

$$S_1 = V_0 \cdot d_1, \quad (1)$$

где V_0 – объем пролитого НП (m^3); d_1 – коэффициент растекания НП (m^1).

Коэффициент растекания нефтепродукта d_1 является справочной величиной и зависит от поверхности, на которой пролит НП, и от объема (V_0) пролитого НП [4].

Масса пролитого M_0 НП (кг) вычисляется по следующей формуле:

$$M_0 = V_0 \cdot \rho_0, \quad (2)$$

где ρ_0 – плотность пролитого НП (kg/m^3).

Для вычисления массы M_1 (кг) испарившегося нефтепродукта применяется следующая формула:

$$M_1 = S_1 \cdot q_1(T), \quad (3)$$

где $q_1(T)$ – удельная величина выбросов известного нефтепродукта (kg/m^2).

Значение $q_1(T)$ зависит от температуры T воздуха и является справочной величиной (kg/m^2) [5].

Для вычисления формы пятна загрязнения применяется эвристический алгоритм [6], исходными данными для которого являются географические координаты центра, площадь S_1 пролива, а также данные о рельефе поверхности в окрестности центра пролива, позволяющие вычислить углы наклона поверхности. Результатом расчета служит множество координат границы наземного пятна загрязнения.

Почвенный (второй) слой ММП позволяет рассчитать массу НП, адсорбированную почвой, и максимальную глубину проникновения НП в почву.

Адсорбированная почвой масса M_2 НП (кг) вычисляется по следующей формуле:

$$M_2 = S_1 \cdot h_2 \cdot u_2 \cdot \rho_0, \quad (4)$$

где h_2 – средняя высота (мощность) почвенного слоя (м); u_2 – нефтеемкость почвы.

Значением безразмерной величины нефтеемкости почвы u_2 является максимально возможная концентрация НП в почве. Нефтеемкость u_2 и средняя плотность НП ρ_0 являются справочными величинами [5, 7].

Условие подтверждения гипотезы Ψ может быть записано в форме следующего неравенства:

$$M_0 - M_1 - M_2 > 0. \quad (5)$$

Другими словами, если масса M_0 пролитого НП превышает совокупную массу M_1 испарившегося и M_2 адсорбированного НП, то гипотеза Ψ подтверждается.

Основная часть. Пусть объем пролитого нефтепродукта V_0 не является достоверно известной величиной. Введем для величины V_0 меру нечеткости [8, 9], заданную функцией принадлежности $\mu(v)$. При этом будем предполагать, что эта функция имеет треугольный вид (рис. 1).

Аналитически функция $\mu(v)$ может быть записана следующим образом:

$$\mu(v) = \begin{cases} \frac{v - V_L}{V_M - V_L}, & V_L \leq v < V_M, \\ \frac{V_R - v}{V_R - V_M}, & V_M \leq v < V_R. \end{cases} \quad (6)$$

Несложно заметить, что эксперт, описывающий неопределенность для объема V_0 пролитого НП, должен задать три значения V_L , V_M и V_R , характеризующие интервал и пиковое значение функции принадлежности.

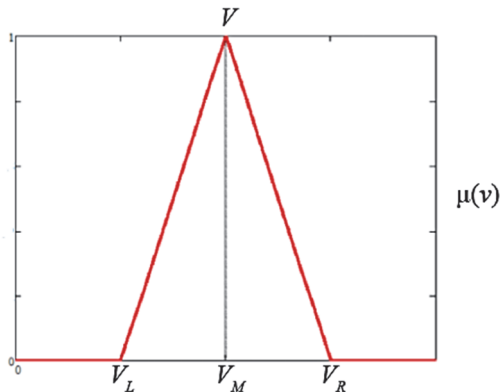


Рис. 1. Функция принадлежности для величины $\mu(v)$

Принимая во внимание формулы (1) и (2), функции принадлежности для площади пролива $\mu(s)$ и массы пролитого НП $\mu(m_0)$ примут следующий вид:

$$\mu(s) = \begin{cases} \frac{s - S_L}{S_M - S_L}, & S_L \leq s < S_M, \\ \frac{S_R - s}{S_R - S_M}, & S_M \leq s < S_R, \end{cases} \quad (7)$$

где $S_L = V_L \cdot d_1$; $S_M = V_M \cdot d_1$; $S_R = V_R \cdot d_1$.

$$\mu(m_0) = \begin{cases} \frac{m_0 - M_{0L}}{M_{0M} - M_{0L}}, & M_{0L} \leq m_0 < M_{0M}, \\ \frac{M_{0R} - m_0}{M_{0R} - M_{0M}}, & M_{0M} \leq m_0 < M_{0R}, \end{cases} \quad (8)$$

где $M_{0L} = V_L \cdot \rho_0$; $M_{0M} = V_M \cdot \rho_0$; $M_{0R} = V_R \cdot \rho_0$.

Вид графиков этих функций представлен на рис. 2 и 3.

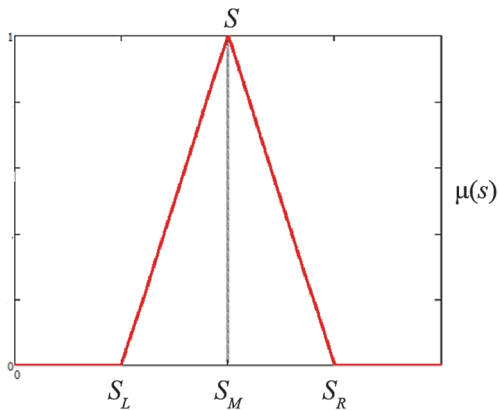


Рис. 2. Функция принадлежности для величины $\mu(s)$ – площади пролива НП

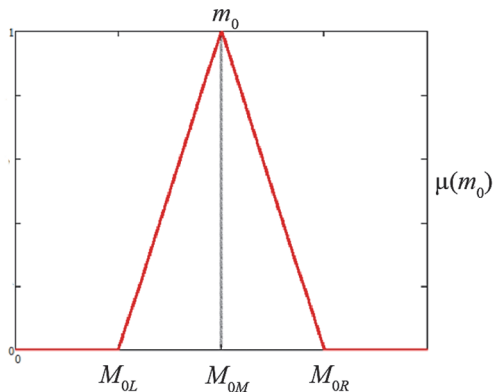


Рис. 3. Функция принадлежности для $\mu(m_0)$ – массы пролитого НП

При расчете массы испарившегося нефтепродукта M_1 используется удельная величина выбросов нефтепродукта q , которая зависит от температуры окружающей среды. Будем считать далее, что эта величина не является достоверно известной и эксперт (как свое предположение) задает ее значение в форме трапециевидной функции принадлежности $\mu(q)$ (рис. 4).

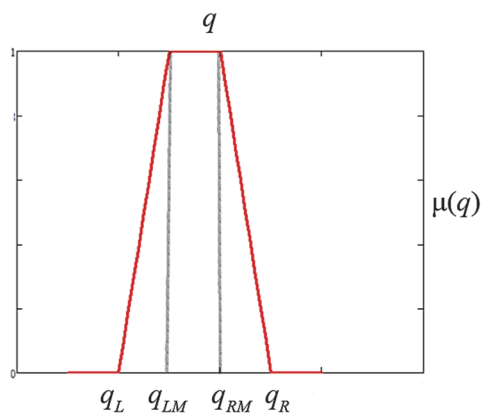


Рис. 4. Функция принадлежности для $\mu(q)$ удельной величины выбросов НП

Нечеткая удельная величина выбросов нефтепродукта q может быть задана экспертом с помощью четырех значений: q_L , q_{LM} , q_{RM} и q_R . При этом аналитическое выражение для функции $\mu(q)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\mu(q) = \begin{cases} \frac{q - q_L}{q_{LM} - q_L}, & q_L \leq q < q_{LM}, \\ 1, & q_{LM} \leq q < q_{RM}, \\ \frac{q_{RM} - q}{q_R - q_{RM}}, & q_{RM} \leq q < q_R. \end{cases} \quad (9)$$

Принимая во внимание формулы (3), (7) и [10], функция принадлежности $\mu(m_1)$ для массы испарившегося НП принимает следующий вид:

$$\mu(m_1) = \begin{cases} \frac{\sqrt{m_1} - \sqrt{M_{1L}}}{\sqrt{M_{1LM}} - \sqrt{M_{1L}}}, & M_{1L} \leq m_1 < M_{1LM}, \\ 1, & M_{1LM} \leq m_1 < M_{1RM}, \\ \frac{\sqrt{M_{1LM}} - \sqrt{m_1}}{\sqrt{M_{1R}} - \sqrt{M_{1RM}}}, & M_{1RM} \leq m_1 < M_{1R}, \end{cases} \quad (10)$$

где $M_{1L} = S_L \cdot q_L$; $M_{1LM} = S_L \cdot q_{LM}$; $M_{1RM} = S_M \cdot q_{RM}$; $M_{1R} = S_R \cdot q_R$.

График функции принадлежности для m_1 представлен на рис. 5.

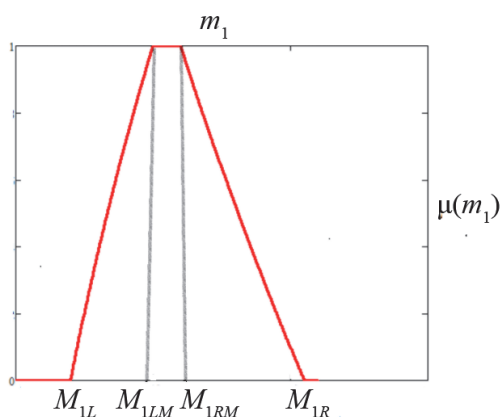


Рис. 5. Функция принадлежности для $\mu(m_1)$

Принимая во внимание формулу (4), функция принадлежности адсорбированного продукта НП в почве примет следующий вид:

$$\mu(m_2) = \begin{cases} \frac{m_2 - M_{2L}}{M_M - M_{2L}}, & M_{2L} \leq m_2 < M_{2M}, \\ \frac{M_{2R} - m_2}{M_{2R} - M_{2M}}, & M_{2M} \leq m_2 < M_{2R}, \end{cases} \quad (11)$$

где $M_{2L} = S_L \cdot h_2 \cdot u_2 \cdot \rho_0$; $M_{2M} = S_M \cdot h_2 \cdot u_2 \cdot \rho_0$; $M_{2R} = S_R \cdot h_2 \cdot u_2 \cdot \rho_0$.

В соответствии с формулой (5) для проверки гипотезы Ψ необходимо исследовать нечеткую величину:

$$m_0 - m_1 - m_2, \quad (12)$$

где m_0 – нечеткая величина с функцией принадлежности (8); m_1 – нечеткая величина с функцией принадлежности (10); m_2 – нечеткая величина с функцией принадлежности (11).

Аналитическое выражения функции принадлежности нечеткой величины (12) можно получить, последовательно выполнив два вычитания $m = (m_0 - m_1) - m_2$, используя промежуточное значение $m' = (m_0 - m_1)$:

$$\mu(m') = \begin{cases} \frac{m' - (M_{0L} - M_{1R})}{(M_{0M} - M_{1RM}) - (M_{0L} - M_{1R})}, & M_{0L} - M_{1R} \leq m' < M_{0M} - M_{1RM}, \\ 1, & M_{0M} - M_{1RM} \leq m' < M_{0M} - M_{1LM}, \\ \frac{(M_{0R} - M_{1L}) - m'}{(M_{0R} - M_{1L}) - (M_{0M} - M_{1LM})}, & M_{0R} - M_{1LM} \leq m' < M_{0R} - M_{1L}. \end{cases} \quad (13)$$

$$\mu(m) = \begin{cases} \frac{m - (M_L - M_{2R})}{(M_{LM} - M_{2M}) - (M_L - M_{2R})}, & M_L - M_{2R} \leq m < M_{LM} - M_{2M}, \\ 1, & M_{LM} - M_{2M} \leq m < M_{RM} - M_{2M}, \\ \frac{(M_R - M_{2L}) - m}{(M_R - M_{2L}) - (M_{RM} - M_{2M})}, & M_{RM} - M_{2M} \leq m < M_R - M_{2L}, \end{cases} \quad (14)$$

где $M_L = M_{0L} - M_{1R}$; $M_{LM} = M_{0M} - M_{1RM}$; $M_{RM} = M_{0M} - M_{1LM}$; $M_R = M_{0R} - M_{1L}$.

Как следует из формулы (14), функция принадлежности нечеткой величины $m = m_0 - m_1 - m_2$ в общем случае будет иметь трапецевидную форму. При этом возможны три варианта ее расположения относительно оси ординат (рис. 6, а, б, в).

Функция принадлежности, изображенная на рис. 6, а, соответствует тому, что гипотеза Ψ не подтвердилась, так как мера положительного значения величины $m_0 - m_1 - m_2$ является нулевой. Рис. 6, в отражает противоположный случай, когда нулевой является мера отрицательного значения $m_0 - m_1 - m_2$, что соответствует подтверждению гипотезы Ψ . Вариант функции принадлежности (рис. 6, б) описывает случай, при котором ненулевое значение меры есть для положительных и отрицательных значений величины $m_0 - m_1 - m_2$. В этом случае для меры достоверности гипотезы предлагается использовать значение, которое вычисляется как отношение площадей $\delta = \int_0^{m_R} \mu(m) dm$ (рис. 6, б) под

графиком $\mu(m)$ справа от оси ординат, ко всей площади $\Delta = \int_{m_L}^{m_R} \mu(m) dm$. В этом случае функция меры достоверности гипотезы Ψ принимает следующий вид:

$$\mu_\Psi = \begin{cases} 0, & m_R \leq 0, \\ \frac{\delta}{\Delta}, & m_L < 0, m_R > 0, \\ 1, & m_L \geq 0. \end{cases} \quad (15)$$

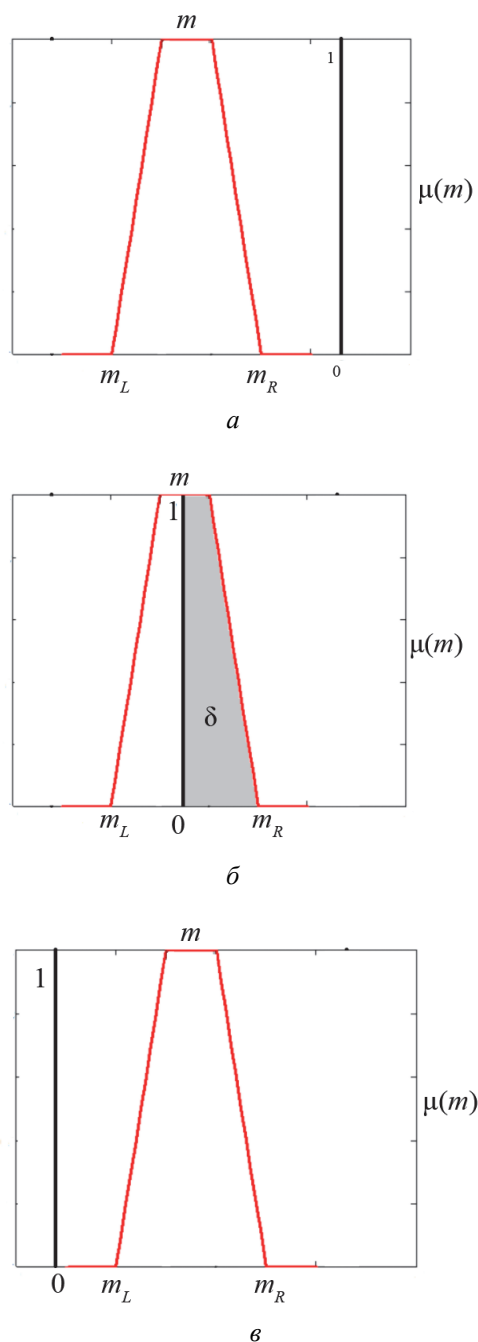


Рис. 6. Расположение графика:
 а – слева от оси ординат; б – по обе стороны
 оси ординат; в – справа от оси ординат

В качестве примера, демонстрирующего применение предлагаемого метода, рассмотрим проверку гипотезы Ψ при аварийном проливе НП со следующими характеристиками (таблица).

Исходные данные пролива НП

Исходные данные	
Нефтепродукт	Бензин
Объем пролитого нефтепродукта	Примерно 15 м^3
Температура воздуха	Примерно $10\text{--}15^\circ\text{C}$

Окончание таблицы

Описание геологической среды	
Мощность почвенного слоя	$0,2 \text{ м}$
Справочные значения	
Плотность НП	750 кг/м^3
Удельная величина выбросов НП	$1,7\text{--}4,0 \text{ кг/м}^2$
Нефтеемкость почвы	$0,21$
Значения, заданные экспертом	
Объем пролитого нефтепродукта	$V_L = 10 \text{ м}^3$ $V_M = 15 \text{ м}^3$ $V_R = 20 \text{ м}^3$
Удельная величина выбросов НП	$q_L = 1,7 \text{ кг/м}^2$ $q_{LM} = 2,5 \text{ кг/м}^2$ $q_{RM} = 3,7 \text{ кг/м}^2$ $q_R = 4,0 \text{ кг/м}^2$

Вычисления в соответствии с формулами (6)–(14) позволяют построить график (рис. 7), который отражает изменение меры нечеткости (достоверности) гипотезы Ψ в зависимости от величины объема пролитого НП.

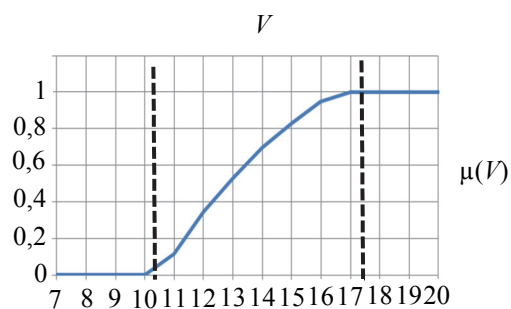


Рис. 7. Зависимость меры достоверности гипотезы Ψ от объема пролитого НП

Полученный график позволяет сделать следующие заключения:

1. При объеме пролитого НП, не превышающего 10 м^3 , гипотеза Ψ не подтверждается: загрязнение не достигает грунтового слоя.
2. При объеме пролитого НП в диапазоне от 11 до 16 м^3 мера достоверности гипотезы Ψ изменяется от 0 до 1 : степень проникновения загрязнения грунтового слоя растет от незначительного до максимально возможного при заданных условиях.
3. При объеме пролива НП, превышающем 17 м^3 , гипотеза Ψ подтверждается: загрязнение достигает грунтового слоя и является максимально возможным при заданных условиях.

Заключение. Таким образом, в статье предлагается метод проверки гипотез о достижении НП определенных слоев геологической среды, построенный на алгебраических операциях над

нечеткими величинами. Применение нечеткости входных переменных позволяет учесть погрешность измерения объема пролитого НП и дискретность значений в справочнике удельных величин выброса НП. Путем интерпретации выходной нечеткой величины в результате такого прогнозирования определяется мера достоверности заданной гипотезы.

С помощью представленной нечеткой модели были выполнены проверочные расчеты для гипотезы о достижении НП грунтового слоя геологической среды. Расчеты показали, что объемы НП до 10 м^3 не способны проникнуть сквозь почвенный слой, гипотезы о достижении объемами от 11 до 16 м^3 имеют меру вероятности больше 0, но меньше 1, а начиная с объема 17 м^3 , НП всегда достигает грунтового слоя.

Список литературы

1. Бурмакова А. В., Смелов В. В., Захаров А. А. Реализация комплексной математической модели прогнозирования последствий аварийного пролива нефтепродуктов. Труды БГТУ. 2018. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. № 1(206). С. 82–87.
2. Оношко М. П., Абсаметов М. К., Смелов В. В. Разработка Экспертной системы реабилитации геологической среды, загрязненной нефтепродуктами, на этапе опытно-конструкторских работ: материалы Междунар. науч.-практ. конф. «Минералогия Казахстана». Алматы, 2017. С. 143–145.
3. Смелов В. В., Блинова Е. А. Экспертная система прогнозирования последствий аварийного пролива нефтепродуктов: материалы V Междунар. водного форума «Водные ресурсы и климат»: в 2 ч. Минск, 2017. Ч. 1. С. 196–198.
4. Методика расчета минимальной оснащенности аварийно-спасательных служб (формирований), предназначенных для локализации и ликвидации разливов нефти и нефтепродуктов на территории Российской Федерации, на континентальном шельфе и в исключительной экономической зоне Российской Федерации: прил. 1 к Проекту приказа МЧС Российской Федерации. М. С. 4–5, 39.
5. Белькова С. В. Определение ущерба окружающей среде при авариях на магистральных нефтепроводах. Омск, ОмГТУ 2010. С. 14–18.
6. Бурмакова А. В., Смелов В. В., Буснюк Н. Н. Эвристический алгоритм вычисления формы пятна загрязнения поверхности земли нефтепродуктами // Труды БГТУ. 2018. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. № 1(206). С. 125–127.
7. Гольдберг В. М., Газда С. Гидрогеологические основы охраны подземных вод от загрязнения. М.: Недра, 1984. С. 262.
8. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 167 с.
9. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. С. 33–40.
10. Борисов А. Н., Крумберг О. А., Федоров И. П. Принятие решений на основе нечетких моделей: примеры использования. Рига: Зинатне, 1990. С. 32–34.

References

1. Burmakova A. V., Smelov V. V., Zakharov A. A. Rehabilitation of the complex mathematical model of predicting the consequences of an emergency spill of oil products. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1 (206), pp. 82–87 (In Russian).
2. Onoshko M. P., Absametov M. K., Smelov V. V. [Development of an expert system for the rehabilitation of the geological environment contaminated with oil products, at the stage of development work]. *Materialy Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. ("Minerageniya Kazakhstana")* [Materials of the International Scientific and Practical Conference ("Minerageny of Kazakhstan")]. Almaty, 2017, pp. 143–145 (In Russian).
3. Smelov V. V., Blinova E. A. Expert system for predicting the consequences of emergency spillage of petroleum products. *Materialy V Mezhdunar. vodnogo foruma ("Vodnyye resursy i klimat")* [Materials of the V International Water Forum ("Water Resources and Climate")]. Minsk, 2017, part 1, pp. 196–198 (In Russian).
4. *Metodika rascheta minimal'noy osnashchennosti avariyno-spatatel'nykh sluzhzb (formirovaniy), prednaznachennykh dlya lokalizatsii i likvidatsii razlivov nefi i nefteproduktov na territorii Rossiyskoy Federatsii, na kontinental'nom shel'fe i v isklyuchitel'noy ekonomicheskoy zone Rossiyskoy Federatsii. pril. 1 k Proyektu prikaza MChS Rossiyskoy Federatsii* [Methodology for calculating the minimum equipment of rescue services (formations) intended for localization and liquidation of oil and oil products spills in the Russian Federation, on the continental shelf and in the exclusive economic zone of the Russian Federation: Appendix 1 to the Draft Order of the Ministry of Emergency Situations of the Russian Federation]. Moscow, pp. 4–5, 39 (In Russian).

5. Bel'kova S. V. *Opredeleniye ushcherba okruzhayshchey srede pri avariyaх na magistral'nykh nefteprovodakh* [Definition of damage to the environment during accidents on main oil pipelines]. Omsk, OmGTU Publ., 2010, pp. 14–18.
6. Burmakova A. V., Smelov V. V., Busnyuk N. N. Hydrogeological basis for protection of groundwater from pollution. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1 (206), pp. 125–127 (In Russian).
7. Goldberg V. M., Gazda S. *Gydrogeologicheskkiye osnovy okhrany podzemnykh vod ot zagryazneniya* [Hydrogeological basis for protection of groundwater from pollution]. Moscow, Nedra Publ., 1984. P. 262.
8. Zade L. *Ponyatiye lingvisticheskoy peremennoy i ego primeneniye k ponyatiyu priblizhennykh resheniy* [The concept of a linguistic variable and its application to the adoption of approximate decisions]. Moscow, Mir Publ., 1976. P. 167.
9. Leonenkov A. V. *Nechetkoye modelirovaniye v srede MATLAB i fuzzyTECH* [Fuzzy modeling in MATLAB and fuzzyTECH]. St. Petersburg, BKhV-Petersburg Publ., 2005, pp. 33–40.
10. Borisov A. N., Krumberg O. A., Fedorov I. P. *Prinyatiye resheniy na osnove nechetkikh modeley: primery ispol'zovaniya* [Decision-making based on fuzzy models: Examples of use]. Riga, Zinatne Publ., 1990, pp. 32–34.

Информация об авторах

Бурмакова Анастасия Владимировна – аспирант кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: burmakova@belstu.by

Смелов Владимир Владиславович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: smw@belstu.by

Information about the authors

Burmakova Anastasia Vladimirovna – Phd student, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University. (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: burmakova@belstu.by

Smelov Vladimir Vladislavovich – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: smw@belstu.by

Поступила после доработки 08.02.2021

УДК 004.421.2:511.344

А. В. Курилец¹, В. В. Смелов¹, Н. Горанин²¹Белорусский государственный технологический университет²Вильнюсский технический университет имени Гедеминаса**МЕТОД АВТОРИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЧИСЕЛ
НА ПРОСТЫЕ СОМНОЖИТЕЛИ**

Статья посвящена описанию метода авторизации на основе разложения чисел на простые сомножители. В ней представлено формальное описание системы авторизации, включающей субъекты и объекты авторизации, а также алгоритмы процедуры авторизации. Предлагаемая система авторизации предусматривает единственный тип привилегии, который описывает взаимоотношения между субъектами и объектами системы и может интерпретироваться в бинарной форме: доступен / не доступен или разрешен / запрещен. Вводится понятие составных объектов, доступ к которым обуславливается разрешением доступа к другим объектам авторизации. Рассматривается принцип построения иерархии объектов авторизации. Вводится понятие роли как поименованного набора привилегий, описывается алгоритм процедуры назначения роли субъекту авторизации. Описание системы авторизации сопровождается примерами, поясняющими принципы ее работы, а также оценками, обозначающими границы ее применения.

Ключевые слова: информационная безопасность, авторизация, система авторизации, субъект авторизации, объект авторизации, привилегия, роль.

Для цитирования: Курилец А. В., Смелов В. В., Горанин Н. Метод авторизации на основе разложения чисел на простые сомножители // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 1 (242). С. 43–47.

A. V. Kurylets¹, V. V. Smelov¹, N. Goranin²¹Belarusian State Technological University²Vilnius Gediminas Technical University**AUTHORIZATION METHOD BASED ON THE DECOMPOSITION
OF NUMBERS INTO SIMPLE MULTIPLIERS**

The article is devoted to the description of the authorization method based on the decomposition of numbers into simple somno-residents. The article presents a formal description of the authorization system, which includes subjects and objects of authorization, as well as algorithms for the authorization procedure. The proposed authorization system provides for a single type of privilege that describes the relationship between the subjects and objects of the system and can be interpreted in binary form: available / not available or allowed/denied. The concept of composite objects is introduced, access to which is determined by the permission of access to other authorization objects. The principle of constructing a hierarchy of authorization objects is considered. The concept of a role as a named set of privileges is introduced, an algorithm for assigning a role to an authorization subject is described. The description of the authorization system is accompanied by examples that explain the principles of its operation, as well as assessments indicating the boundaries of its application.

Key words: information security, authorization, authorization system, authorization subject, authorization object, privilege, role.

For citation: Kurylets A. V., Smelov V. V., Goranin N. Authorization method based on the decomposition of numbers into simple multipliers. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics Informatics*, 2021, no. 1 (242), pp. 43–47 (In Russian).

Введение. Построение системы информационной безопасности начинается с выявления (идентификации) субъектов и объектов информационной безопасности. В информационных системах под субъектами подразумеваются активные компоненты (пользователи, программные средства), а под объектами – пассивные компоненты системы (аппаратное обеспечение,

информационные ресурсы, каналы связи, программные коды). При этом все процессы, происходящие в информационной системе, с точки зрения информационной безопасности сводятся к взаимоотношению между субъектами и объектами, причем в некоторых случаях субъекты могут выступать в качестве объектов информационной безопасности и наоборот.

Взаимоотношение между субъектами и объектами регламентируется правилами, которые являются воплощением политики информационной безопасности информационной системы. Реализация правил обычно сводится к двум процедурам: аутентификации и авторизации.

Процедура аутентификации реализует алгоритм, который позволяет определить правомочность внешней по отношению к информационной системе сущности выполнять действия в информационной системе от имени ее субъекта. В простейшем случае в качестве сущности может выступать пользователь информационной системы, в качестве процедуры аутентификации – проверка имени и пароля, а субъект в этом случае – это регистрационная запись пользователя в системе.

Процедура авторизации реализует алгоритм проверки действий субъектов по отношению к объектам на соответствие правилам, воплощающим политику безопасности информационной системы. Элементарное действие, которое может быть разрешено или отменено, обычно называют привилегией. Проверка, как правило, сводится к сравнению формального описания (дескриптора) объекта с формальным описанием (дескриптором) субъекта.

Ниже рассматривается система авторизации, реализующая мандатную модель доступа [1] и основанная на представлении дескрипторов субъектов и объектов информационной безопасности в виде произведений простых сомножителей и предусматривающая единственный тип привилегии – доступ субъекта к объекту.

Основная часть. В общем случае формальное описание системы S авторизации произвольной информационной системы может быть описано в виде тройки

$$S = \langle R, U, A \rangle,$$

где $R = \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_N\}$ – конечное множество объектов (ресурсов) информационной системы, доступ к которым регулируется системой авторизации S ;

$U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_L\}$ – конечное множество субъектов информационной системы, доступ которых к объектам R регулируется системой авторизации S ;

$A \subset U \times R$ – бинарное отношение, определенное на декартовом произведении $U \times R$ и такое, что если $\langle u, r \rangle \in A$, то субъекту $u \in U$ разрешен доступ (привилегия) к объекту $r \in R$.

Бинарное отношение A может быть представлено в виде графа $G_A = \langle U \cup R, A \rangle$, где $U \cup R$ – множество вершин графа; A – множество дуг. На рис. 1 изображен пример графа G_A . Вершинам графа соответствуют субъекты $\{u_1, u_2, u_3\}$ и объекты $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$, а дугам – элементы отношения A . Например, дуга $\langle u_1, r_2 \rangle$

описывает возможность доступа субъекта u_1 к объекту r_2 , дуги, входящие в вершину r_1 , описывают возможность доступа всех субъектов к объекту r_1 , а изолированная вершина r_4 соответствует объекту, недоступному для всех субъектов.

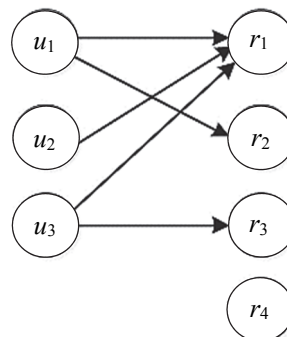


Рис. 1. Граф $G_A = \langle U \cup R, A \rangle$

По всей видимости, построение бинарного отношения A над множеством $U \times R$ можно свести к построению характеристической функции

$$H(u, r) = \begin{cases} 1, & \langle u, r \rangle \in A, \\ 0, & \langle u, r \rangle \notin A, \end{cases}$$

т. е. субъекту $u \in U$ разрешен доступ к объекту $r \in R$, если $H(u, r) = 1$. Тогда бинарное отношение A может быть записано в виде $A = \{\langle u, r \rangle \in A \mid H(u, r) = 1\}$.

Рассмотрим систему авторизации S , построенную на следующем известном свойстве натуральных чисел.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ натуральное число. Тогда верно следующее утверждение: $\forall n \in \mathbb{N} \wedge n > 1: n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$, где p_i – простые, а $\alpha_i, i = \overline{1, m}$ – натуральные числа. Другими словами, любое натуральное число, превышающее единицу, может быть представлено в виде произведения простых чисел. Причем такое разложение является единственным [2]. Например, $65\,340 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 11^2$.

Пусть $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_N\}$ – конечное множество простых чисел. Представим множество R объектов авторизации в виде множества пар $R = \{r_i = \langle \dot{r}_i, \ddot{r}_i \rangle, i = \overline{1, N}\}$, где \dot{r}_i – идентификатор объекта, а \ddot{r}_i – его дескриптор. Значение идентификатора может быть выбрано произвольно при условии его уникальности, а значение дескриптора $\ddot{r}_i = p_i, p_i \in P, i = \overline{1, N}$ – простое число.

Множество U субъектов информационной системы тоже представим в виде множества пар $U = \{u_j = \langle \dot{u}_j, \ddot{u}_j \rangle, j = \overline{1, L}\}$, где \dot{u}_j – идентификатор субъекта, а \ddot{u}_j – дескриптор. Как и прежде, значение идентификатора может быть выбрано произвольно при условии его уникальности, а дескриптор субъекта зададим в виде произведения:

$$\ddot{u}_j = x_1 x_2 x_3 \dots x_N,$$

$$\text{где } x_i = \begin{cases} 1, & \langle u_j, r_i \rangle \notin A, \\ \ddot{r}_i, & \langle u_j, r_i \rangle \in A. \end{cases}$$

Другими словами, \ddot{u}_j является произведением дескрипторов \ddot{r}_i тех объектов системы S , доступ к которым разрешен субъекту u_j .

Характеристическая функция H проверки принадлежности пары $\langle u_j, r_j \rangle$, $j = 1, L$, $i = 1, N$ множеству A может быть записана в следующем виде:

$$H(u_j, r_i) = \begin{cases} 1, & \ddot{u}_j \bmod \ddot{r}_i = 0, \\ 0, & \ddot{u}_j \bmod \ddot{r}_i \neq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим пример системы авторизации $S = \langle R, U, A \rangle$, включающую пять объектов $R = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 7 \rangle, \langle 4, 11 \rangle, \langle 5, 13 \rangle \}$ и три субъекта $U = \{ \langle 1, \ddot{u}_1 \rangle, \langle 2, \ddot{u}_2 \rangle, \langle 3, \ddot{u}_3 \rangle \}$. Пусть отношение A описывается следующей таблицей.

R	$\langle 1, \ddot{u}_1 \rangle$	$\langle 2, \ddot{u}_2 \rangle$	$\langle 3, \ddot{u}_3 \rangle$
$\langle 1, 3 \rangle$	+	+	
$\langle 2, 5 \rangle$	+	+	
$\langle 3, 7 \rangle$	+	+	+
$\langle 4, 11 \rangle$	+		+
$\langle 5, 13 \rangle$	+		+

Строки таблицы соответствуют объектам с заданными дескрипторами, столбцы – субъектам системы авторизации S . На пересечении строки i и столбца j стоит плюс, если $\langle u_j, r_i \rangle \in A$ или, другими словами, субъекту u_j разрешен доступ к объекту r_i . Тогда дескрипторы авторизации \ddot{u}_j субъектов примут следующие значения:

$$\ddot{u}_1 = 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 15\ 015,$$

$$\ddot{u}_2 = 3 \times 5 \times 7 = 105,$$

$$\ddot{u}_3 = 7 \times 11 \times 13 = 1001.$$

Значения выражения $\ddot{u}_j \bmod \ddot{r}_i$, вычисляемого в характеристической функции H , представим в табличной форме.

R	$\langle 1, 15015 \rangle$	$\langle 2, 105 \rangle$	$\langle 3, 1001 \rangle$
$\langle 1, 3 \rangle$	0	0	2
$\langle 2, 5 \rangle$	0	0	1
$\langle 3, 7 \rangle$	0	0	0
$\langle 4, 11 \rangle$	0	6	0
$\langle 5, 13 \rangle$	0	1	0

Очевидно, что характеристическая функция H будет принимать значение 1, если субъекту разрешен доступ к объекту и 0 в другом случае.

В некоторых случаях объекты системы авторизации могут иметь более сложную схему доступа. Например, пусть r_1, r_2, r_3 – три объекта

системы авторизации S . При этом в системе должен быть обеспечен независимый авторизованный доступ к каждому из объектов r_1 и r_2 , а к объекту r_3 разрешен доступ только тем субъектам, которым разрешен доступ и к r_1 и к r_2 . Такая зависимость авторизованного доступа может быть разрешена, если выбрать в качестве дескриптора объекта r_3 приведенное произведение дескрипторов объектов r_1 и r_2 : $\ddot{r}_3 = \ddot{r}_1 \ddot{r}_2 / \text{gcd}(\ddot{r}_1, \ddot{r}_2)$, где gcd – функция, вычисляющая наибольший общий делитель для двух натуральных чисел. Очевидно, что верно следующее общее утверждение:

$$\begin{aligned} \forall u_j \in U, \{ r_{i_1}, r_{i_2}, r_{i_3} = \langle \ddot{r}_{i_3}, \ddot{r}_{i_1} \ddot{r}_{i_2} / \\ \text{gcd}(\ddot{r}_{i_1}, \ddot{r}_{i_2}) \rangle \} \subset R \mid H(u_j, r_{i_1}) = \\ = H(u_j, r_{i_2}) = 1 : H(u_j, r_{i_3}) = 1. \end{aligned}$$

Другими словами, для рассматриваемого примера, если дескриптор объекта r_3 равен приведенному произведению дескрипторов объектов r_1 и r_2 ($\ddot{r}_3 = \ddot{r}_1 \ddot{r}_2 / \text{gcd}(\ddot{r}_1, \ddot{r}_2)$), то субъект авторизации, имеющий доступ к объектам r_1 и r_2 , имеет доступ и к объекту r_3 . Далее, объекты, доступ к которым обусловлен доступом к другим объектам, будем называть составными объектами, а объекты, доступ к которым не зависит от доступа к другим объектам, – элементарными объектами авторизации. При этом будем говорить, что составные объекты составлены из других объектов.

Обобщив понятие составного объекта, можно строить иерархические системы объектов авторизации. На рис. 2 приведен пример ориентированного графа, описывающего иерархическую систему объектов авторизации: вершины графа соответствуют объектам авторизации, а ребра – зависимостям между ними.

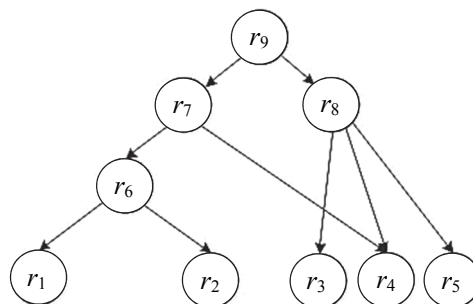


Рис. 2. Иерархическая система объектов авторизации

Система объектов, представленная на рис. 2, содержит пять элементарных r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 , четыре составных объекта авторизации r_6, r_7, r_8, r_9 . Следует обратить внимание на то, что объекты r_7, r_9 составлены из составных объектов, а r_6 и r_8 – из элементарных.

Пусть, например, $r_1 = \langle 1,3 \rangle$, $r_2 = \langle 2,5 \rangle$, $r_3 = \langle 3,7 \rangle$, $r_4 = \langle 4,11 \rangle$, $r_5 = \langle 5,13 \rangle$ – элементарные объекты авторизации, представленные на рис. 2. Тогда составные объекты будут выглядеть следующим образом:

$$r_6 = \langle 6, \frac{3 \times 5}{\gcd(3,5)} \rangle = \langle 6,15 \rangle,$$

$$r_7 = \langle 7, \frac{15 \times 11}{\gcd(15,11)} \rangle = \langle 7,165 \rangle,$$

$$r_8 = \langle 8, \frac{7 \times 11 \times 13}{\gcd(7,11)\gcd(77,13)} \rangle = \langle 8,1001 \rangle,$$

$$r_9 = \langle 9, \frac{165 \times 1001}{\gcd(165,1001)} \rangle = \langle 9,15015 \rangle.$$

В системах авторизации информационных систем используется понятие роли. Обычно роль – это поименованный (используется уникальный идентификатор) набор привилегий (в нашем случае привилегия – возможность доступа к объектам авторизации). Роль может быть назначена субъектам авторизации, в результате чего субъекты приобретают (наследуют) привилегии (возможности доступа), которыми обладала эта роль. При этом одному субъекту может быть назначено несколько ролей, а одна роль может быть назначена нескольким субъектам.

Пусть $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_M\}$ – множество ролей, заданных в системе авторизации S . По аналогии с субъектами, роль можно представить как множество пар $T = \{ \langle i_k, \ddot{i}_k \rangle, k = \overline{1, M} \}$, где i_k – идентификатор роли, выбранный из условия уникальности, а \ddot{i}_k – дескриптор.

Назначение роли t_k к субъекту u_j будем обозначать с помощью оператора grant и записывать в следующей форме: $t_k \text{grant} u_j$. Формально определим оператор grant следующим образом:

$$\forall u_j \in U, \langle \dot{u}_j, \ddot{u}_j \rangle \in U, t_k \\ \in T: t_k \text{grant} u_j \Leftrightarrow u_j = \\ = \langle \dot{u}_j, \ddot{u}_j \ddot{i}_k / \gcd(\ddot{u}_j, \ddot{i}_k) \rangle.$$

Дескриптор роли зададим в виде произведения:

$$\ddot{i}_k = x_1 x_2 x_3 \dots x_N,$$

$$\text{где } x_i = \begin{cases} 1, & \forall u_j \in U | t_k \text{grant} u_j : \langle u_j, r_i \rangle \notin A, \\ \ddot{i}_i, & \forall u_j \in U | t_k \text{grant} u_j : \langle u_j, r_i \rangle \in A. \end{cases}$$

Другими словами, \ddot{i}_k является произведением дескрипторов \ddot{i} тех объектов системы S , доступ к которым может обеспечиваться назначением роли t_k любому субъекту.

Продолжим пример, рассмотренный выше: $R = \{ \langle 1,3 \rangle, \langle 2,5 \rangle, \langle 3,7 \rangle, \langle 4,11 \rangle, \langle 5,13 \rangle \}$ – множество объектов; $U = \{ \langle 0,15015 \rangle, \langle 2,105 \rangle, \langle 3,1001 \rangle \}$ – множество субъектов авторизации.

Пусть $t = \langle A, \ddot{i} \rangle$ – набор привилегий доступа к объектам системы авторизации, которой задается с помощью следующей таблицы:

R	$\langle A, \ddot{i} \rangle$
$\langle 1,3 \rangle$	
$\langle 2,5 \rangle$	+
$\langle 3,7 \rangle$	
$\langle 4,11 \rangle$	
$\langle 5,13 \rangle$	+

Таблица состоит из пяти строк, соответствующих объектам авторизации, $r_i \in R$, $i = \overline{1,5}$, и единственного столбца, соответствующего роли с идентификатором A . При этом в строке i стоит плюс, если применение (grant) роли $\langle A, \ddot{i} \rangle$ к произвольному субъекту $u \in U$ приводит к изменению значения дескриптора \ddot{i} этого субъекта, разрешающему доступ субъекта u к соответствующему объекту $r_i \in R$. Очевидно, что $\ddot{i} = 5 \times 13 = 65$.

Применение роли $\langle A, 65 \rangle$ субъектам $\langle 1,15015 \rangle, \langle 2,105 \rangle, \langle 3,1001 \rangle$ приведет к следующим изменениям их дескрипторов:

$$\langle A, 65 \rangle \text{grant} \langle 1,15015 \rangle \Leftrightarrow u_1 = \langle 1,15015 \rangle;$$

$$\langle A, 65 \rangle \text{grant} \langle 2,105 \rangle \Leftrightarrow u_2 = \langle 2,1365 \rangle;$$

$$\langle A, 65 \rangle \text{grant} \langle 3,1001 \rangle \Leftrightarrow u_3 = \langle 3,5005 \rangle.$$

Заметим, что дескриптор субъекта u_1 не претерпел изменения после применения роли $\langle A, 65 \rangle$, так как роль предоставила привилегии доступа к объектам $\langle 2,5 \rangle$ и $\langle 5,13 \rangle$, доступ к которым у субъекта u_1 уже был. Дескрипторы субъектов u_2 и u_3 изменились – они приобрели дополнительные привилегии доступа: субъект u_2 к объекту $\langle 5,13 \rangle$, а субъект u_3 к объекту $\langle 2,5 \rangle$.

Заключение. Применение традиционных подходов авторизации, как правило, приводит к необходимости хранения дескрипторов авторизации на внешнем носителе, извлечении их и сверки при каждой операции, выполняемой субъектом информационной безопасности. При большой интенсивности операций прибегают к кэшированию дескрипторов, чтобы снизить затраты на процедуру проверки правомочности выполнения запрашиваемой операции. При этом обычно дескриптор авторизации применяется в форме списка ACL [3], каждый элемент которого в общем случае содержит информацию о субъекте, объекте и разрешенной (или запрещенной) привилегии. С другой стороны, разработчикам информационных систем часто приходится сталкиваться с необходимостью разработки простых приложений, доступ к которым регулируется простым правилом: доступен или не доступен. Характерным примером такого приложения может служить

микросервис [4], который по определению должен быть простым в использовании и разработке.

Основным достоинством предложенной системы авторизации является простота ее реализации, так как в основе лежат простейшие арифметические операции.

Основной недостаток – ограниченность применения, связанная с размерностью данных современных компьютеров. Deskriptory (произведение разных простых чисел), описывающие объекты и привилегии доступа к ним субъектов информационной безопасности, представляют собой беззнаковые положительные числа, размерность которых в современных компьютерах не превышает 64 бита. Такое ограничение приводит к тому, что максимальное количество элементарных объектов в предлагаемой системе не может превышать 15. Даже если размерность

данных возрастет до 128 бит, это ограничение сдвигается лишь до 26. Применение вычисления с применением алгоритмов «длинной арифметики» усложняет программную реализацию и, главное, значительно увеличивают процедуру авторизации, основанную на операции деления – наиболее трудоемкой операции в «длинных» вычислениях.

Применение предложенного метода авторизации для такого рода программных приложений, по мнению авторов, является целесообразным: программная реализация является простой, проверка правомочности доступа не требует больших вычислительных ресурсов, предлагаемая процедура авторизации просто встраивается в существующие сетевые протоколы (например, протокол RFC 7519 для создания токенов доступа, основанных на формате JSON [5]).

Список литературы

1. Хоффман Л. Современные методы защиты информации. М.: Сов. радио, 1980.
2. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.
3. Материал из Национальной библиотеки им. Н. Э. Баумана [Электронный ресурс]. URL: [https://ru.bmstu.wiki/ACL_\(Access_Control_List\)](https://ru.bmstu.wiki/ACL_(Access_Control_List)) (дата доступа 23.09.2020).
4. Ньюмен С. Создание микросервисов. СПб.: Питер, 2016.
5. Предлагаемый стандарт RFC 7519 [Электронный ресурс]. URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc7519> (дата доступа 10.10.2020).

References

1. Hoffman L. *Sovremennyye metody zashchity informatsii* [Modern methods of information security]. Moscow, Sov. radio Publ., 1980.
2. Ayerland K., Rosen M. *Klasicheskoye vvedeniye v sovremennuyu teoriyu chisel* [A Classical Introduction to Modern Number Theory]. Moscow, Mir Publ., 1987.
3. *Material iz Natsional'noy biblioteki im. N. E. Baumana* [Material from the National Library N. E. Bauman] [Electronic resource]. Available at: [https://ru.bmstu.wiki/ACL_\(accessed 23.09.2020\)](https://ru.bmstu.wiki/ACL_(accessed 23.09.2020)).
4. Newman S. *Sozdaniye mikroservisov* [Building Microservices]. St. Petersburg, Piter Publ., 2016.
5. *Predlagayemyy standart RFC 7519* [Proposed Standart RFC 7519] [Electronic resource]. Available at: <https://tools.ietf.org/html/rfc7519> (accessed 10.10.2020).

Информация об авторах

Курилец Анастасия Витальевна – ассистент кафедры программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: oav@belstu.by

Смелов Владимир Владиславович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: smw@belstu.by

Горанин Николай – доктор наук, доцент кафедры «Информационные системы». Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса (10223, Вильнюс, ул. Саулетекио, 11, Литовская Республика). E-mail: nikolaj.goranin@vgtu.lt

Information about the authors

Kurylets Anastasiya Vitalievna – assistant lecturer, the Department of Software Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: oav@belstu.by

Smelov Vladimir Vladislavovich – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: smw@belstu.by

Goranin Nikolaj – DSc, Associate Professor, the Department of Information Systems. Vilnius Gediminas Technical University (11, Sauletekio str., 10223, Vilnius, Republic of Lithuania). E-mail: nikolaj.goranin@vgtu.lt

Поступила после доработки 15.01.2021

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ОБУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ

SYSTEMS ANALYSIS AND TRAINING SYSTEMS

УДК 004.853

Н. И. Гурин, Е. С. Сахонь

Белорусский государственный технологический университет

ТЕХНОЛОГИЯ РАЗРАБОТКИ СИМУЛЯТОРОВ ЛАБОРАТОРНЫХ УСТАНОВОК ДЛЯ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Статья посвящена описанию разработанного технологического стандарта по созданию симуляторов лабораторных установок для выполнения лабораторных работ студентами технических вузов в дистанционном режиме. Предложена технология разработки симуляторов на основе 3D-моделирования объектов в среде 3ds MAX с обеспечением их интерактивности в среде Unity на основе языка C#. Разработаны методы и приемы реалистичного представления и использования рабочих элементов симулятора, меню элементов управления на основе Canvas, общая схема управления скриптами и последовательностью выполнения эксперимента на установке с заполнением таблицы результатов и их анализом. Предложен технологический шаблон симулятора, который может быть использован для разработки симулятора любой лабораторной установки при условии внесения в предлагаемый шаблон соответствующих визуальных и функциональных особенностей установки, но без изменения ее базового программного кода и пользовательского интерфейса, что позволяет существенно сократить сроки разработки симуляторов для проведения лабораторных работ в дистанционном режиме.

Ключевые слова: дистанционное обучение, компьютерные обучающие системы, интерактивная графика, симуляторы лабораторных установок.

Для цитирования: Гурин Н. И., Сахонь Е. С. Технология разработки симуляторов лабораторных установок для дистанционного обучения // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 1 (242). С. 48–53.

N. I. Gurin, E. S. Sahon

Belarusian State Technological University

TECHNOLOGY FOR THE DEVELOPMENT OF LABORATORY SIMULATORS FOR DISTANCE LEARNING

The article is devoted to the description of the developed technological standard for the creation of simulators of laboratory installations for the performance of laboratory work by students of technical universities in remote mode. The technology for developing simulators based on 3D modeling of objects in the 3ds MAX environment is proposed, ensuring their interactivity in the Unity environment based on the language of C#. Methods and techniques have been developed to realistically represent and use the simulator's work elements, canvas-based control menus, a general script management scheme, and a sequence of experiment execution on the installation with the filling of the results table and their analysis. Offered a technological simulator template, which can be used to develop a simulator of any laboratory installation, provided that the proposed template includes the appropriate visual and functional features of the installation, but without changing its basic code and user interface, which allows to significantly reduce the time of development of simulators for laboratory work in remote mode.

Key words: distance learning, computer training systems, interactive graphics, laboratory simulators.

For citation: Gurin N. I., Sahon E. S. Technology for the development of laboratory simulators for distance learning. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2021, no. 1 (242), pp. 48–53 (In Russian).*

Введение. Современные технологии дистанционного обучения широко применяются в различных учреждениях образования и обучающих центрах. Вместе с этим недостаточное развитие получила технология разработки симуляторов установок для проведения лабораторных работ в виртуальном режиме. Обучающая среда для дистанционного обучения в основном ограничивается текстовыми, графическими, анимационными и мультимедийными учебными материалами, представляемыми в электронном виде. Для полного охвата учебного процесса, проводимого в дистанционном режиме [1], такой обучающей среде обычно недостает симуляторов для выполнения работ на лабораторных установках, а также функции диалога обучаемого с виртуальным преподавателем, роль которого выполняет сама среда в онлайн режиме [2]. В работе представлена технология создания симуляторов установок для выполнения лабораторных работ студентами технических вузов в дистанционном режиме.

Имитационные модели динамических процессов, которые используются при создании таких симуляторов, позволяют имитировать реальные установки и объекты исследования, виртуально обеспечивают условия для проведения реального эксперимента, позволяют получить адекватные и реалистичные результаты. В принципе для любого реального динамического процесса методами имитационного моделирования можно разработать его имитацию на экране компьютера и полностью управлять его проведением. Другими словами, любая задача, в которой нужно учесть определенные закономерности, может быть представлена визуальной имитационной моделью поведения взаимосвязанных объектов, в которой исходные данные являются начальными значениями параметров взаимодействующих объектов, а их изменение будет немедленно отражаться в визуализации динамического процесса, отображаемого на экране компьютера в ходе его выполнения.

Основная часть. Подготовленный технологический стандарт предлагает готовые решения для следующих задач при разработке компьютерных симуляторов:

- разработки интуитивно понятного интерфейса для симуляторов лабораторного практикума;
- функционала динамических процессов при выполнении виртуальных лабораторных работ на симуляторе;
- сборки разработанного приложения для симулятора под разные платформы, используемые в дистанционном обучении.

Технологический стандарт разработан на основе межплатформенной среды Unity и языка

программирования C# для управления интерактивными элементами симулятора, а также среды 3ds MAX для разработки и экспорта в Unity 3D-моделей элементов установки. Экспорт разработанных приложений обеспечен под веб-ресурсы и мобильные кросс-платформенные приложения для использования в дистанционном обучении и самостоятельной работе студентов.

Обучение с помощью данного ресурса может быть осуществлено:

- на сайте, на котором располагается полная версия КОС;
- персональном компьютере посредством скачивания (Desktop);
- с помощью мобильного приложения в виртуальной реальности.

Разработанный на основе стандарта веб-ресурс симулятора располагает полным функционалом для осуществления лабораторных работ в виртуальном режиме.

Выполнение лабораторной работы на симуляторе происходит аналогично действиям, осуществляемым при выполнении лабораторной работы на занятии в учебной аудитории с преподавателем. В первую очередь пользователю предлагается ознакомиться с теорией к данной лабораторной работе, при этом полная версия теоретического материала по данной тематике всегда доступна на веб-ресурсе симулятора установки. При наведении курсора мыши на отдельные элементы установок выводится информация о их назначении, а при щелчке мышью камера приближается к элементу для его рассмотрения в удобном ракурсе.

Ход выполнения лабораторной работы задается программно по этапам, последовательность которых указывается соответствующими подсказками в информационном окне. Причем лишь после выполнения задачи на определенном этапе эксперимента пользователь может приступить к следующей. После выполнения лабораторной работы на симуляторе все сделанные пользователем измерения результатов работы сохраняются в таблицу, которую можно экспортировать в отдельный файл.

Для использования шаблона симулятора под реализацию проекта симулятора конкретной лабораторной установки необходимо в проекте Unity шаблона выполнить следующие действия:

1) создать 3D-модели всех элементов данной установки и ее окружения в 3ds MAX и импортировать их на сцену в проект Unity вместо элементов шаблонной установки;

2) переименовать UI-элементы в проекте шаблона в соответствии с элементами данной лабораторной установки и добавить по аналогии недостающие элементы;

3) внести свое описание для каждого элемента в код класса ScriptableObject (лист. 1), хранящийся в ресурсах используемого шаблонного проекта Unity, который позволяет создавать в приложении объекты для хранения больших объемов общих данных, не зависящих от экземпляров скриптов;

4) внести соответствующие корректировки в используемые шаблонные скрипты для данной лабораторной установки, которые определяются ее функционалом.

Лист. 1. Код класса ScriptableObject

```
public class Info : ScriptableObject {
    [SerializeField]
    private string information;
    [SerializeField]
    private Sprite image;
    public string GetInfo()
    { return information; }
    public Sprite GetImage()
    { return image; }
}
```

Основные модули разработанного шаблона для симулятора лабораторной установки продемонстрированы на примере работы с симулятором лабораторной установки «Наблюдения колец Ньютона» (рис. 1). Цель этой лабораторной работы на данной установке заключается в том, чтобы, используя интерференцию света, определить в результате проведенных измерений радиусов колец Ньютона красного, желтого, зеленого и синего цветов радиус кривизны исследуемой линзы.

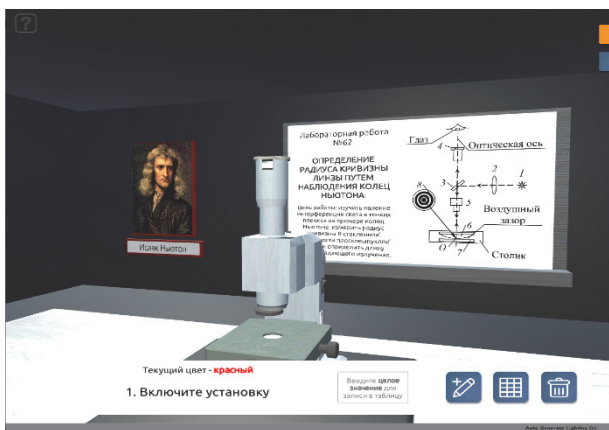


Рис. 1. Общий вид симулятора установки с его окружением на сцене

В первую очередь необходимо ознакомиться с установкой в разделе меню «УСТАНОВКА». Для этого следует просто нажимать на выпадающие пункты меню – будут подсвечиваться соответствующие части лабораторной установки (рис. 2).

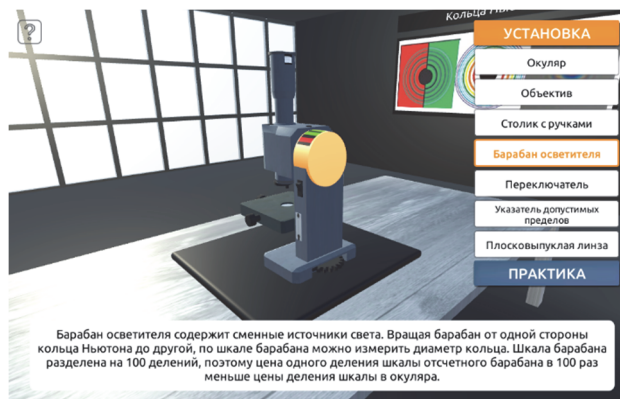


Рис. 2. Симулятор в режиме ознакомления с элементами установки

Для выполнения практической части лабораторной работы необходимо нажать мышью кнопку «ПРАКТИКА» и последовательно выполнять те действия, которые выводятся на информационную панель в нижней части экрана (рис. 1). При этом на данной панели присутствует окно для ввода измерений и кнопки занесения значений в таблицу, вывод таблицы на экран и очистка таблицы для проведения нового эксперимента.

Управление камерой реализовано стандартными средствами языка C# для среды Unity (лист. 2). Для перемещения камеры по окружности вокруг установки с помощью зажатой правой клавиши мыши в добавленном к ней скрипте прежде всего переменная типа Transform связывается с базовым объектом установки – точкой, вокруг которой будет вращаться камера с использованием метода RotateAroundTargetPos. Кроме того, отдаление и приближение камеры реализовано посредством вращения колесика мыши, а пределы перемещения камеры по сторонам проверяются отдельной функцией ControlDistance.

Лист. 2. Код управления камерой

```
public class Scroll : MonoBehaviour {
    [SerializeField]
    float scrollSpeed = 10f;
    [SerializeField]
    int sensivity = 3; int maxdistance = 20;
    int mindistance = 1;
    [SerializeField]
    Transform targetPos;
    void FixedUpdate() {
        float x = Input.GetAxis("Horizontal");
        float y = Input.GetAxis("Vertical");
        if (x != 0 || y != 0) {
            Vector3 newPos = transform.position + (transform.TransformDirection(new Vector3(x, 0, 0)) + Vector3.up * y) / sensivity;
            if (ControlDistance(Vector3.Distance(newPos, targetPos.position)))

```

```

transform.position = newPos; }
if (Input.GetAxis("Mouse ScrollWheel") != 0) {
Vector3 newPos = transform.position + transform.TransformDirection(Vector3.forward * Input.GetAxis("Mouse ScrollWheel") * scrollSpeed);
if (ControlDistance(Vector3.Distance(newPos, targetPos.position)))
transform.position = newPos;}
if (Input.GetMouseButton(1)) {
transform.RotateAround(targetPos.position, Vector3.up, Input.GetAxis("Mouse X")*sensitivity);
transform.Rotate(Vector3.left, Input.GetAxis("Mouse Y")*sensitivity); } }
bool ControlDistance (float distance)
{if (distance > mindistance && distance < maxdistance) return true; return false; }}

```

При разработке главного меню в шаблоне симулятора выделены два раздела: «УСТАНОВКА» и «ПРАКТИКА», выбор которых происходит после щелчка по соответствующей кнопке. Для того чтобы кнопки всегда находились в правом верхнем углу экрана вне зависимости от его разрешения, контейнеру UI, содержащему меню, добавлена соответствующая точка привязки к холсту Canvas. Данные кнопки имеют четыре разных состояния (покоя, наведения, нажатия и недоступности), в соответствии с которыми разработан их дизайн.

UI-интерфейс симулятора работает следующим образом:

- по умолчанию установка находится в рабочем состоянии и готова к выполнению эксперимента;
- не включая установку, можно осмотреть ее и окружение управляя камерой (клавишами клавиатуры для движения по осям координат и курсором мыши с нажатой правой клавишей для вращения камеры вокруг центра привязки установки);
- при наведении курсора мыши на пункт меню «УСТАНОВКА» выпадает вниз список всех элементов установки (рис. 2);
- при наведении курсора мыши на каждый элемент в списке подсвечивается его название, а также соответствующий элемент установки на сцене и в информационном окне отображается краткая информация об этом элементе;
- при щелчке мышью на элементе в списке камера плавно перейдет в положение для удобного просмотра выбранного элемента установки на сцене;
- при наведении на пункт меню «ПРАКТИКА» происходит исчезновение меню и симулятор переходит в режим начала работы (рис. 1).

Для программирования функциональности работы симулятора конкретной лабораторной установки на основе базового программного

кода шаблонного симулятора придется заново запрограммировать взаимосвязи всех элементов создаваемого симулятора в соответствии с их предназначением в конкретной лабораторной установке. При использовании разработанного шаблона симулятора эта часть разработки нового симулятора является наиболее трудоемкой.

Прежде всего для каждого разрабатываемого симулятора лабораторной установки необходимо составить блок-схему взаимодействия всех ее функциональных объектов. При составлении такой блок-схемы нужно пройти следующие этапы:

1. Выделить те события, которые могут происходить (включение / выключение установки, поворот или перемещение какого-нибудь объекта, нажатие кнопки и т. д.).

2. Продумать, какие объекты должны инициировать эти события (например, нажатие по переключателю инициирует событие по включению / выключению установки).

3. Выбрать, какие элементы должны реагировать на то или иное событие (например, на включение и выключение установки может реагировать большое количество элементов, начиная от отображения показаний дисплеев до запуска механизмов).

4. Указать в блок-схеме, при каких условиях подписчики подписываются и отписываются от прослушивания требуемых событий и какие методы при этом будут вызываться.

Виртуальная лабораторная работа, выполняемая на симуляторе, содержит целый комплекс взаимосвязанных программных модулей. Для удобного и оптимизированного взаимодействия между модулями в шаблон симулятора внедрена система событий. Фактически система событий отражает архитектуру взаимодействия скриптов приложения и тесно связывается с построенной для каждого конкретного симулятора блок-схемой взаимодействия его объектов. Она представляет собой набор скриптов и правил, по которым в симуляторе происходит передача информации и взаимодействие между функциональными элементами установки. Система событий состоит из трех элементов: *Менеджер событий*, *Переключатель* и *Подписчик*.

Менеджер событий (лист. 3) содержит список всех событий, которые могут произойти во время работы с установкой.

Лист. 3. Фрагмент кода *Менеджера событий*

```

public class EventManager : MonoBehaviour {
public delegate void SwitchHandler(bool work); public
delegate void MoveHandler();
//... делегаты для других событий

```

```

public static event SwitchHandler Switch; //создание
события – переключение
//... создание других событий
private void Start()
{
    Switch(false);
}
public static void SwitchWork(bool work) {
Switch(work);
}
public static void MovedCamera()
{
    Moved();
}
//... методы вызова других событий
}

```

Переключатель (лист. 4) вызывает перечисленные в менеджере события.

Лист. 4. Код *Переключателя*

```

public class Switcher : MonoBehaviour {
    bool work = false;
//изначально установка не работает
private void OnMouseDown() {
//при нажатии мыши на переключатель
work = !work;
//меняется флаг на противоположный
    Power(work);
//вызывается метод инициирования события
}
public void Power(bool work) {
    EventManager.SwitchWork(work);
//инициализация события
}
}

```

Экземпляр *Подписчика* (лист. 5) должен находиться на каждом элементе, который должен реагировать на событие.

Лист. 5. Код *Подписчика*

```

public class Follower : MonoBehaviour {
    new Renderer renderer;
    private void Start(){
        renderer = GetComponent<Renderer>();
        renderer.enabled = false;}
    void OnEnable(){
        EventManager.Switch += SwithWork; }
    private void OnDisable(){
        EventManager.Switch -= SwithWork; }
    void SwithWork(bool work{
        if(work) renderer.enabled = true;
        else renderer.enabled = false; }}
}

```

В момент инициализации *Подписчика* он должен подписаться на требуемые события, а элементы на сцене должны содержать код вызова методов, находящихся в *Переключателе*. При вызове метода в *Переключателе* вызывается событие, соответствующее этому методу в *Менеджере событий*. При возникновении

события подписанные на него подписчики обрабатывают соответствующую реакцию.

При разработке симулятора конкретной лабораторной установки необходимо, используя составленную для программирования работы симулятора блок-схему взаимодействия объектов, откорректировать в проекте Unity шаблонной установки код скриптов соответствующих классов системы событий: *EventManager* для *Менеджера событий* (лист. 3), *Switcher* для *Переключателя* (лист. 4), *Follower* для *Подписчика* (лист. 5).

Конечным этапом разработки симулятора является разработка последовательности заданий, выполняемых пользователем в ходе проведения эксперимента на виртуальной лабораторной установке. Последовательность выполняемых заданий фактически является ключевым модулем при работе с симулятором и опирается в свою очередь на использование заданной системы событий. В лист. 6 приведен фрагмент кода выполнения заданий в шаблонном симуляторе.

Лист. 6. Фрагмент кода выполнения заданий

```

public class Tasks : MonoBehaviour
private void Start(){
taskText.enabled = false;
taskText.text = ++numberOfTask + ". " + "Включите
установку";
EventManager.Switch += WorkingControl;
EventManager.Switch+=Task1;
//подписываем первое задание на включение
}
Void WorkingControl(bool work)
// отслеживание, включена ли установка
{ isWorking = work; }
void Task1(bool w)
//первое задание, если включена установка
{if (w) {
    EventManager.Switch -= Task1;
//отписывание от выполненного задания
taskText.text = ++numberOfTask + ". " + "Поворотом
барабана установите светодиод";
//вывод сообщения о новом задании
EventManager.ColorChanger += Task2;
//подписывание на второе задание и т. д.
}}
}

```

Каждое задание *Task1*, *Task2*, ... сопровождается подпиской на конкретное событие и выводом соответствующего текстового сообщения. Первое задание для любого симулятора – это включить установку. Первое задание подписывается на событие включения установки и выводит в информационное окно текст: «Включите установку» (рис. 1). После нажатия пользователем мышью на включатель симулятора это приведет к выполнению первого задания. Затем программа отписывается от события включения для

экономии ресурсов. Далее программа откроет второе задание с подпиской на новое событие с соответствующим текстовым сообщением «Поворотом барабана установите светодиод». Таким образом, все задания будут последовательно выполнены.

Разработка 3D-моделей элементов для шаблонного симулятора лабораторной установки, а также его окружения в помещении выполнена в среде 3ds MAX, экспортирована в формате файла *.fbx, а затем импортирована в среду Unity для задания интерактивности функциональным объектам симулятора.

Для публикации разработанных симуляторов лабораторных установок из среды Unity на сайте используется программная библиотека WebGL – контекст элемента Canvas HTML, который обеспечивает API 3D-графики без использования плагинов. Макет сайта для доступа к теоретическим и практическим ресурсам виртуального лабораторного практикума разработан с использованием технологий HTML, CSS, Bootstrap и JavaScript.

Заключение. Предложенная технология и разработанный шаблон для симулятора лабораторной установки позволяют разрабатывать симуляторы лабораторных установок на основе заданного стандарта, что дает возможность существенно сократить время их разработки. Такие симуляторы полностью повторяют действия экспериментатора на реальной лабораторной установке благодаря запрограммированному функционалу их работы. Пользователь может получить все необходимые навыки работы с такими установками, чтобы затем применить их при работе в реальных условиях.

Таким образом, использование симуляторов лабораторных установок для выполнения практических заданий по различным техническим дисциплинам позволяет в принципе проводить такие практикумы индивидуально, вне лабораторных помещений и без присутствия преподавателя, что полностью соответствует целям обучения студентов в дистанционном режиме.

Список литературы

1. Гурин Н. И., Герман О. В. Компьютерные обучающие системы в издательском деле: в 2 ч. Минск: БГТУ, 2015. Ч. 1, 2. 372 с.
2. Гурин Н. И., Жук Я. А. Генератор семантической сети информационной системы в таблицу реляционной базы данных // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 181–185.

References

1. Gurin N. I., German O. V. *Komp'yuternyye obuchayshchiye systemy v izdatel'skom dele* [Computer training systems in publishing]. Minsk, BGTU, Publ., 2015, part 1, 2. 372 p.
2. Gurin N. I., Zhuk Ya. A. The information system semantic network generator to a relational database table generator. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6, Physics and Mathematics. Informatics, pp. 181–185 (In Russian).

Информация об авторах

Гурин Николай Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ngourine@mail.ru

Сахонь Елизавета Сергеевна – магистрант кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: elizavetakotik@gmail.com

Information about the authors

Gurin Nikolay Ivanovich – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ngourine@mail.ru

Sahon Elisaveta Sergeevna – Master's degree student, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: elizavetakotik@gmail.com

Поступила после доработки 12.01.2021

УДК 004.023

Н. С. Каргин, Н. И. Гурин

Белорусский государственный технологический университет

**ИЗВЛЕЧЕНИЕ ОСНОВНОГО СОДЕРЖИМОГО ИЗ ВЕБ-СТРАНИЦ
НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ВИЗУАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕМЕНТОВ
И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В JSON ФОРМАТ**

В статье рассматриваются алгоритмы извлечения основного содержимого из веб-страниц и предлагается метод решения проблем, затрудняющих извлечение основного содержимого, на основе визуальных характеристик и внутреннего содержимого элементов страницы. В разработанном методе основное содержимое определяется одним корневым элементом и преобразуется в JSON формат, содержащий однозначные типы данных, описывающих абзацы, заголовки, изображения, видеозаписи, галереи и другие элементы страницы. Для отображения JSON формата не требуется браузер, что значительно расширяет его возможности применения в мобильной и встраиваемой технике ввиду большей эффективности. Применение в методе поиска корневого элемента позволяет улучшить качество и ускорить извлечение основного содержимого при обработке большого количества веб-страниц одного сайта и использовании персистентного хранилища для обработанных страниц.

Ключевые слова: веб, браузеры, HTML, CSS, JSON.

Для цитирования: Каргин Н. С., Гурин Н. И. Извлечение основного содержимого из веб-страниц на основе анализа визуальных характеристик элементов и преобразования в JSON формат // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 1 (242). С. 54–60.

N. S. Kargin, N. I. Gurin

Belarusian State Technological University

**EXTRACTING THE MAIN CONTENT FROM WEB PAGES BY ANALYSING
THE VISUAL CHARACTERISTICS OF THE ELEMENTS AND CONVERTING TO
THE JSON FORMAT**

The article discusses the algorithms of extraction of the main context from web pages. In addition, the article proposed the method of solving problems related to the difficulties of extraction of the main content. This method is based on the visual characteristics and internal content of web page elements. In the developed method the main content is defined by a single root element; this root element is converted to a JSON format containing unambiguous data types describing paragraphs, titles, images, videos, galleries, and other web page elements. The web browser is not required to display the JSON format; and this fact significantly expands its application capabilities in mobile and embedded technologies due to greater efficiency. Using the root element in the search method allows you to improve the quality of the extraction of the main content. Besides this, it speeds up the extraction during processing a large number of web pages on a single site and using permanent storage for the processed pages.

Key words: web, browsers, HTML, CSS, JSON.

For citation: Gurin N. I., Sahon E. S. Extracting the main content from web pages by analysing the visual characteristics of the elements and converting to the JSON format. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2021, no. 1 (242), pp. 54–60 (In Russian).*

Введение. Современные веб-стандарты и развитие инструментов для веб-разработки значительно упростили публикацию веб-документов, позволяя при этом достигать одинакового визуального результата десятками различных способов. Однако такое разнообразие стандартов и различных подходов к разработке веб-страниц усложняет автоматизированный анализ основного содержимого. При этом задача извлечения основного содержимого является базовой:

- 1) для новостных агрегаторов;
- 2) поисковых систем;

3) приложений для людей с ограниченными возможностями (озвучивание основного содержимого, изменение визуального представления при проблемах со зрением);

4) приложений, связанных с обработкой естественного языка (классификация текста по темам, создание краткого содержания и др.).

Средний размер веб-страниц стремительно растет уже десять лет. По данным HTTPArchive, на август 2020 г. медианное значение размера веб-страницы со всем его содержимым превышает 2 мегабайта [1]. Такой объем данных

снижает доступность веб-сайтов для пользователей с ограниченным каналом связи. Для решения данной проблемы появляются такие технологии, как Google AMP, Yandex Турбо, позволяющие пользователям получать облегченные версии страниц, содержащих только контент [2, 3]. В этой связи развитие и применение подобных технологий для извлечения основного содержимого веб-страниц является весьма актуальной задачей.

Процесс извлечения основного содержимого затрудняется тем, что веб-документы содержат в себе множество неинформативной или нетекстовой информации: CSS стили, JavaScript код, навигационные и декоративные элементы, генерируемый пользователями контент (например, комментарии).

Для решения данной проблемы в настоящее время применяются два основных подхода: на основе правил и семантики веб-документов.

Подход на основе правил показывает хороший результат, но при этом является крайне трудоемким и неустойчивым к изменению верстки веб-страниц, что значительно усложняет его использование.

Подходы на основе семантики веб-документов ориентируются на название элементов, классов, идентификаторов, размещении в веб-документе, однако современные стандарты HTML и JavaScript уже сейчас позволяют разработчикам создавать собственные элементы разметки с собственными названиями. При бурном развитии веб-технологий и браузеров данный подход становится неэффективным, по крайней мере на страницах, на которых применяются собственные элементы.

В работе предлагаются собственные алгоритмы извлечения основного содержимого из веб-страниц и методы решения проблем, затрудняющих извлечение основного содержимого на основе визуальных характеристик и внутреннего содержимого элементов страницы.

Основная часть. Базовая структура HTML документа включает в себя:

- DOCTYPE, декларация о типе документа;
- HTML, корневой элемент страницы;
- HEAD, элемент, содержащий метainформацию о странице, подключаемые файлы скриптов, стилей и т. д.;
- BODY, элемент, выступающий контейнером для всего видимого содержимого.

HTML элементы определяются открывающимся и закрывающимся тегом. Некоторые элементы, например BR, не содержат закрывающегося тега и являются «пустыми».

HTML разметка определяет содержание и структуру веб-контента; другие технологии обычно используются для описания внешнего вида (CSS) или поведения веб-страницы (JS).

Сложности при извлечении основного содержимого:

- 1) множество неинформативной или нетекстовой информации (CSS, JS);
- 2) скрытые элементы, обеспечивающие правильную работу веб-страницы;
- 3) источником данных не всегда является HTML разметка;
- 4) применение несемантической верстки веб-разработчиками;
- 5) неоднозначность элементов;
- 6) вариативность подходов к верстке.

Веб-разработчики часто скрывают какие-то данные, связанные с работой веб-страницы, в скрытые элементы TEXTAREA, INPUT или прячут блоки за видимой областью экрана. Такие элементы могут располагаться в любой части страницы или, например, в элементе статьи (рекламный блок). Исключение таких элементов – дополнительная сложность при извлечении основного содержимого.

Распространение SPA (Single Page Application) – одностраничных приложений – и инструментов для их разработки вносит еще одну сложность с правильной интерпретацией содержимого страницы [4]. В таких веб-приложениях источник данных (например, содержимое статьи) может располагаться в JavaScript коде в формате JSON или подгружаться через XMLHttpRequest, Fetch API. Для автоматической обработки и извлечения информации из таких документов недостаточно только обработчика HTML, необходим полноценный браузер. Использование браузера требует отдельных ресурсов: процессорное время, оперативная и видеопамять. Это может быть критичным в приложениях, в которых извлечение основного содержимого происходит не на стороне клиента, а на стороне сервера.

Проблема кросс-платформенности веб-приложений касается и приложений, связанных с извлечением основного содержимого. Неоднозначность интерпретации некоторых элементов, JavaScript или CSS может происходить и на уровне различных браузеров.

HTML позволяет разработчикам верстать страницы абсолютно разными способами и по разным методологиям, но получать одинаковый визуальный результат в браузере. Стандарты дают возможность разработчикам размещать текстовые узлы рядом с блочными, оборачивать их и т. д., но для правильной интерпретации таких сценариев требуется веб-браузер, чтобы учитывать визуальную составляющую веб-страницы.

Семантические HTML элементы описывают свое смысловое значение для браузера и разработчика. Например, к семантическим элементам

можно отнести: article, header, main, summary; к несемантическим: div, span. По названию семантического элемента можно понять его содержимое. Для того чтобы проанализировать возможность использования семантической верстки в качестве «индикатора» для поиска основного содержимого статьи, были проанализированы топ-15 новостных сайтов в мире по состоянию на август 2020 г. [5]. В табл. 1 приведен результат анализа верстки сайтов.

Таблица 1
Результат анализа верстки 15 самых популярных новостных сайтов в мире

Сайт	Семантические элементы
news.yahoo.com	Используются
huffpost.com	То же
cnn.com	Элемент article включает лишнее содержимое
nytimes.com	То же
foxnews.com	– // –
nbcnews.com	Используются
dailymail.co.uk	Отсутствуют
washingtonpost.com	Используются
theguardian.com	То же
wsj.com	Элемент article включает лишнее содержимое
abcnews.go.com	То же
bbc.com	– // –
usatoday.com	– // –
latimes.com	Используются

В результате анализа самых популярных новостных сайтов выявлено, что на одном сайте семантические элементы отсутствуют полностью, на семи сайтах семантические элементы применяются, но проанализировать веб-страницы только на основе данного признака и извлечь основное содержимое (текст новости) было бы невозможно, так как семантические элементы включали в себя лишнее содержимое (комментарии, рекламу, рекомендации и т. д.).

Таким образом, более чем 50% из выборки не используют семантическую верстку или используют ее таким образом, что смысловое значение элемента не передает его содержимое.

Для решения задачи извлечения основного содержимого разработан метод, который ориентируется на визуальные характеристики элементов, текстовые узлы документа и стремится определить только один корневой элемент с основным содержимым веб-страницы. Основные шаги метода:

1) сбор метаданных веб-страницы;

2) формирование множества всех текстовых узлов веб-страницы;

3) определение корневого элемента с основным содержимым;

4) преобразование корневого элемента в JSON формат.

Все шаги выполняются в браузере с помощью подключения JS скриптов в тело страницы. Скрипт извлечения основного содержимого может быть выполнен как на сервере, например в среде NodeJS с применением библиотеки Puppeteer, так и в браузере пользователя с помощью расширений [7].

Сбор метаданных веб-страницы. На данном шаге формируется JS объект, содержащий метаданные веб-страницы: заголовок, описание, изображение, время публикации, время редактирования, название хоста и сайта, ссылку на документ, иконку сайта. Для извлечения данной информации используются теги из элемента HEAD по стандартам OpenGraph [8] или их альтернативы. В табл. 2 приведены названия полей объекта с метаданными и объекты, из которых происходит извлечение.

Таблица 2
Объект метаданных о странице

Поле объекта	Место извлечения
title	Метатеги og:title, twitter:title, title
description	Метатеги description, og:description
publishedTime	Метатег article:published_time
modifiedTime	Метатег article:modified_time
image	Метатег og:image, twitter:image
host	Переменная window.location.host
siteName	Метатеги og:site_name, apple-mobile-web-app-title, application-name
href	Переменная window.location.href
favicon	Элементы типа LINK apple-touch-icon, icon

Данная информация может использоваться для отображения краткой информации о странице, группировке по сайтам, времени публикации и т. д.

Формирование множества текстовых узлов. Скрипт извлечения делает обход всех элементов документа. Если текстовый узел содержит более одного слова, то он попадает в множество.

Элемент и его дочерние текстовые узлы не обходятся и не попадают в множество при наступлении одного из следующих условий:

1) название элемента `style`, `link`, `script`, `noscript`, `input`, `textarea`, `svg`, `button` и некоторые другие «технические» элементы;

2) в названии класса элемента или его идентификатора есть вхождения со словами `comment`, `related`, `tags`, `date`, `share`, `author`, `promo` и некоторые др.;

3) реальный визуальный размер элемента меньше 8 пикселей в ширину или высоту и свойство `display` не равен `inline` или `inline-block`;

4) элемент расположен за границами видимой области браузера;

5) элемент визуально скрыт (`display` равен `none` или `hidden`, `opacity` равно 0).

Определение корневого элемента с основным содержимым. Данный этап алгоритма может выполняться несколько раз в случае, если корневой элемент не обнаружен (в реализации алгоритма 3 раза максимум). В список кандидатов на роль корневого элемента попадают все элементы из множества, сформированного на предыдущем этапе (при первом выполнении — это все элементы из множества текстовых узлов), плюс их родительские элементы.

Для каждого кандидата высчитывается количество слов, которое он содержит. Список кандидатов сортируется по убыванию по данному признаку. Затем из списка кандидатов удаляются все элементы, которые меньше порога — процентное значение от наибольшего элемента (в реализации алгоритма используется 80%).

Если в списке остался только один кандидат, то он и будет являться корневым для основного содержимого веб-страницы. Если в списке более одного элемента, то происходит проверка на родственность кандидатов. Родственными считаются элементы, которые являются родителями или потомками друг друга. Если элементы не являются родственными между собой, то считается, что корневой элемент не обнаружен и происходит повторное выполнение данного шага при условии, что не превышен лимит поиска. Если элементы являются родственными, то корневым считается элемент с наибольшим количеством слов.

Схематичное изображение работы данного шага и его итераций представлено на рисунке. Повторный проход необходим для того, чтобы избежать ситуации, при которой абзацы текста имеют двойную или тройную вложенность в другие HTML элементы.

Данную проблему можно было бы решить, применяя алгоритм упрощения DOM дерева: если у элемента только один дочерний, то содержимое данного элемента заменяется на содержимое его дочернего элемента. Однако применение такого алгоритма приводило бы к тому, что элементы теряли свои визуальные характеристики,

так как CSS селекторы являлись неактуальными для обновленного DOM дерева.

<code><article></code>	<code><article></code>	<code><article></code>
<code><div></code>	<code><div></code>	<code><div></code>
<code><p>Lorem ipsum</p></code>	<code><p>Lorem ipsum</p></code>	<code><p>Lorem ipsum</p></code>
<code></div></code>	<code></div></code>	<code></div></code>
<code><div></code>	<code><div></code>	<code><div></code>
<code><p>dolor sit amet</p></code>	<code><p>dolor sit amet</p></code>	<code><p>dolor sit amet</p></code>
<code></div></code>	<code></div></code>	<code></div></code>
<code></article></code>	<code></article></code>	<code></article></code>

Пример итераций шага поиска корневого элемента

Преобразование корневого элемента в JSON формат. Целью данного преобразования является упрощение сложных и неоднозначных HTML элементов в простые и однозначные JSON объекты, которые могут быть обработаны другими программами без применения XML-парсера или браузера.

Основные шаги преобразования:

- 1) очистка корневого элемента по тем же правилам, по которым исключались элементы при формировании множества текстовых узлов;
- 2) формирование массива абзацев текста;
- 3) преобразование дочерних элементов в альтернативные JSON объекты.

Формирование массива абзацев текста происходит следующим образом: содержимый текст (свойство `innerText` у `HTMLElement`) корневого элемента очищается от повторяющихся и лишних пробелов и переносов текста, разбиение на массив происходит по символу переноса текста. Каждый абзац сопоставляется с узлом страницы, в котором он начинается и заканчивается. В процессе сопоставления для абзаца формируется массив атрибутов, применяемых к тексту. Атрибут представляет собой объект, содержащий тип форматирования (жирный, курсив, подчеркивание, ссылка), числовые позиции `from` и `to`, определяющие границы форматирования. Ссылки дополнительно содержат поле `href`. Все атрибуты текста, за исключением ссылки, определяются на основе визуальных характеристик (CSS свойства `font-weight`, `font-style`).

После формирования списка абзацев с их атрибутами происходит обход всех дочерних элементов корневого узла. На данном шаге HTML элементы соотносятся с JSON альтернативами, представленными в табл. 3.

Важно отметить, что этапы формирования множества текстовых узлов и поиска корневого элемента могут быть пропущены при условии, что в процессе преобразования других страниц с этого же веб-сайта происходит сохранение XPath или CSS селектора к корневому элементу с основным содержимым.

Описание типов элементов в JSON формате

Тип элемента	Альтернативный HTML элемент	Описание
header	H1, H2, H3, H4, H5, H6	Заголовок. Дополнительно содержит поле l, указывающее на уровень заголовка (от 1 до 6). В поле text находится текстовое содержимое элемента
paragraph	Наиболее близкий P, но может быть любой блочный элемент	Абзац текста. В поле text находится текстовое содержимое элемента. Может содержать массив attributes
image	FIGURE с дочерними элементами IMG и FIGCAPTION	Изображение. Содержит в себе: 1) url – адрес изображения 2) size – объект с шириной и высотой изображения 3) thumbnail – превью изображения в строке base64 с максимальным размером 40 пикселей по большей стороне 4) caption – массив с объектами типа paragraph, подпись к изображению
list	UL, OL	Список. В поле children содержит массив объектов paragraph. В поле style указывается стиль списка (нумерованный, нумерованный)
remoteVideo	IFRAME	Видео из сервиса YouTube или Vimeo. Содержит: 1) information с объектом, содержащим название сервиса и идентификатор видео 2) caption – массив с объектами типа paragraph, подписи к видео
video	VIDEO	Видео. Содержит: 1) src, указывающее на адрес видеофайла 2) булево поле isAnimation (true, если у элемента есть атрибут loop) 3) ratio – соотношение сторон видео 4) caption – массив с объектами типа paragraph, подписи к видео
audio	AUDIO	Аудио. Содержит поле src со ссылкой на файл и поле caption – массив объектов типа paragraph
gallery	Прямой альтернативы нет	Галерея изображений. Содержит поле caption с объектами типа paragraph и поле images с объектами типа image
delimiter	HR, но может быть любой элемент, представляющий собой горизонтальную линию	Горизонтальный разделитель

Большинство контент-ориентированных веб-сайтов используют шаблонизаторы для рендеринга HTML и у страниц меняется только часть с основным содержимым. Следовательно, при накоплении некоторого количества таких селекторов для новых страниц искать этот элемент уже нет необходимости: достаточно получить из базы данных наиболее часто встречающийся путь, что позволяет ускорить извлечение основного содержимого.

Разработанный метод был протестирован на 111 веб-страницах с 25 различными веб-сайтов, включая упомянутые ранее популярные веб-сайты из табл. 1. Тестирование включало в себя ручное сравнение извлеченного содержимого и оригинальных веб-страниц.

В результате тестирования было выявлено 6 веб-страниц, для которых не удалось корректно

определить корневой элемент, что составляет 5,41% от всех страниц. Следует учитывать, что сканирование выполнялось для небольшого количества веб-страниц с одного веб-сайта и не применялась оптимизация с «запоминанием» корневого элемента для веб-сайта.

На 8 веб-страницах были выявлены недостатки, связанные с некорректным преобразованием рекламных блоков или «ленивых» изображений (изображения, которые начинают загружаться только при приближении видимой области окна браузера к ним).

Для реализации ленивых изображений применяются различные техники с помощью JavaScript, а HTML в исходной разметке выглядит исключительно как заглушка и данную проблему нельзя решить только с помощью анализа HTML. Для ее решения была реализована функция,

которая выполняет прокрутку страницы до конца корневого элемента с основным содержимым и ожидает загрузку изображений в нем.

Для оценки эффективности представления основного содержимого в JSON формате был произведен замер исходных HTML документов (без учета подключаемого JavaScript, CSS) и преобразованного основного содержимого:

– средний размер HTML документа составляет 291 килобайт;

– средний размер извлеченного содержимого в JSON формате 16 килобайт.

Таким образом, представление основного содержимого в JSON формате в 18 раз эффективнее. Минимальный размер JSON документа составил 3 килобайта, максимальный – 63; минимальный размер HTML документа 16 килобайт, максимальный размер – 1462 килобайта. При этом следует учитывать, что JSON документы уже содержат подробную информацию об изображениях и их уменьшенные копии.

Было проведено сравнительное тестирование разработанного метода и реализации алгоритма Readability в браузерах Mozilla Firefox и Apple Safari. Для данного тестирования было разработано две визуально одинаковые страницы. Одна из страниц использует стандарт собственных элементов для представления содержимого, а вторая применяет семантические HTML элементы. Разработанные веб-страницы содержат небольшой текст, навигационные элементы и комментарии.

Браузер Firefox не смог определить элемент с основным содержимым на странице, на которой присутствуют собственные элементы. На странице с семантическими HTML элементами проблемы не возникло.

Браузер Safari смог корректно определить элемент с основным содержимым для двух страниц, но не смог корректно отобразить его на странице, на которой присутствуют собственные элементы: все подряд идущие абзацы текста сливаются в один.

Разработанный метод корректно определил и преобразовал основное содержимое на двух страницах, так как не ориентируется на семантику HTML элементов.

Заключение. Технологии извлечения основного содержимого веб-страниц встречаются в самых разных приложениях и сервисах, которыми пользуются миллионы людей ежедневно: поисковые системы, новостные агрегаторы, приложения для чтения новостей, мессенджеры и многие др.

Разработанный метод извлечения основного содержимого на основе визуальных характеристик и внутреннего содержимого элементов не ориентируется на семантику элементов HTML документа, что делает алгоритм устойчивым к разнообразию подходов к верстке и применению на странице собственных элементов.

Выделение корневого элемента с основным содержимым веб-страницы позволяет улучшить качество работы алгоритма (неправильное определение основного содержимого, скорость работы) при обработке большого количества страниц из одного источника.

Конвертирование основного содержимого в JSON формат позволяет избавиться от сложности и неоднозначности HTML разметки, что значительно упрощает машинную обработку основного содержимого, а для отображения или озвучивания статей в таком формате не требуется браузер, что особенно актуально для мобильных устройств и встраиваемой техники с ограниченными ресурсами.

Список литературы

1. State of the Web [Электронный ресурс] // HTTPArchive, 2020. URL: <https://httparchive.org/reports/state-of-the-web> (дата обращения: 05.11.2020).
2. AMP on Google [Электронный ресурс] // Google Developers. URL: <https://developers.google.com/amp> (дата обращения: 05.11.2020).
3. Турбо-страницы для владельцев сайтов [Электронный ресурс] // Яндекс. URL: <https://yandex.ru/adv/turbo> (дата обращения: 05.11.2020).
4. SPA (Single-page application) [Электронный ресурс] // MDN. URL: <https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Glossary/SPA> (дата обращения: 05.11.2020).
5. Top 15 Most Popular News Websites [Электронный ресурс] // eBiz, 2020. Август. URL: <http://www.ebizmba.com/articles/news-websites> (дата обращения: 05.11.2020).
6. Custom Elements [Электронный ресурс] // W3C, 2018. 3 мая. URL: <https://www.w3.org/TR/custom-elements/> (дата обращения: 05.11.2020).
7. Puppeteer v 5.4.1 [Электронный ресурс] // Puppeteer. URL: <https://pptr.dev> (дата обращения: 05.11.2020).
8. The Open Graph protocol [Электронный ресурс] // Facebook, 2010. URL: <https://ogp.me> (дата обращения: 05.11.2020).

References

1. State of the Web. Available at: <https://httparchive.org/reports/state-of-the-web> (accessed 05.11.2020).
2. AMP on Google. Available at: <https://developers.google.com/amp> (accessed 05.11.2020).

3. Turbo-stranitsy dlya vladel'tsev saytov [Turbo pages for website owners]. Available at: <https://yandex.ru/adv/turbo> (accessed 05.11.2020).
4. SPA (Single-page application). Available at: <https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Glossary/SPA> (accessed 05.11.2020).
5. Top 15 Most Popular News Websites. August. 2020. Available at: <http://www.ebizmba.com/articles/news-websites> (accessed 05.11.2020).
6. Custom Elements. 3 May. 2018. Available at: <https://www.w3.org/TR/custom-elements/> (accessed: 05.11.2020).
7. Puppeteer v 5.4.1. Available at: <https://pptr.dev> (accessed 05.11.2020).
8. The Open Graph protocol. 2010. Available at: <https://ogp.me> (accessed 05.11.2020).

Информация об авторах

Каргин Николай Сергеевич – магистрант кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: hello@karh.in

Гурин Николай Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ngourine@mail.ru

Information about the authors

Kargin Nikolay Sergeevich – Master's degree student, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hello@karh.in

Gurin Nikolay Ivanovich – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ngourine@mail.ru

Поступила после доработки 12.01.2021

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

BRIEF MESSAGES

УДК 519.86

Н. Н. Буснюк

Белорусский государственный технологический университет

КРИТЕРИЙ КОЛИЧЕСТВА РАБОТНИКОВ В СЕТИ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРОЕКТА БЕЗ ПРОСТОЕВ РАБОТ

В классической задаче сетевого планирования длительность выполнения проекта равна длине критического пути в соответствующем графе-сети. Критические пути могут быть разными для одного и того же графа в зависимости от значений весов дуг. На практике это соответствует тому, что над одинаковыми проектами могут работать люди с разной производительностью труда. От способа их расстановки на соответствующие работы будет зависеть длительность выполнения проекта (длина критического пути).

Работы, лежащие на одном пути, могут выполняться лишь последовательно, поэтому для их реализации необходимо и даже достаточно одного работника. Работы, не лежащие на одном пути, могут выполняться одновременно, при условии наличия незанятых на других работах работников. Возможность начала очередной работы зависит от того, как быстро завершены предшествующие ей работы. Менеджеру проекта важно знать, сколько нужно иметь в наличии работников в каждый момент времени для того, чтобы, во-первых, работы не простаивали и критический путь не удлинился; а во-вторых, чтобы не держать в резерве работников, которые не понадобятся.

В статье доказана теорема о том, какое количество работников необходимо и достаточно для того, чтобы любой проект в зависимости от структуры соответствующего графа-сети выполнялся без простоев работ.

Ключевые слова: сетевой график, критический путь, полный путь, параллельные работы, задача сетевого планирования, длительность выполнения проекта, достаточное количество работников.

Для цитирования: Буснюк Н. Н. Критерий количества работников в сети для выполнения проекта без простоев работ // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 1 (242). С. 61–64.

N. N. Busnyuk

Belarusian State Technological University

CRITERION FOR THE NUMBER OF EMPLOYEES IN THE NETWORK FOR PROJECT IMPLEMENTATION WITHOUT DOWNTIME JOBS

In the classical problem of network planning the project duration is equal to the critical path length in the corresponding graph network. The critical paths can be different for the same graph, depending on the values of the arcs weights. In practice this corresponds to the fact that employees with different labor productivity can work on the same projects. The project duration (the length of the critical path) will depend on the way as employees are placed on the corresponding jobs.

Jobs lying on the same path can only be performed sequentially; therefore, one employee is necessary and sufficient for their implementation. Jobs that do not lie on the same path can be performed simultaneously, provided that there are employees not employed in other jobs. The possibility of starting the next job depends on how quickly the previous job is completed. It is important for the project manager to know how many employees must be available at each moment of time in order to: firstly, the jobs do not stand idle and the critical path does not lengthen; and secondly, so as not to keep in reserve employees who are not needed.

The article proves a theorem about how many employees are necessary and sufficient for any project, depending on the structure of the corresponding graph-network, to be carried out without downtime.

Key words: network chart, critical path, full path, parallel works, network planning task, project duration, sufficient number of employees.

For citation: Busnyuk N. N. Criterion for the number of employees in the network for project implementation without downtime jobs. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2021, no. 1 (242), pp. 61–64 (In Russian).*

Введение. В классической задаче сетевого планирования задана последовательность выполнения работ некоторого проекта и их длительность [1]. В соответствующем ориентированном взвешенном по дугам графе (сети) отыскивается наиболее длинный путь из исходного узла (источника) в завершающий узел (сток). Этот путь называется критическим и задает время выполнения всего проекта. Критические пути могут быть разными для одного и того же графа в зависимости от значений весов дуг. На практике это соответствует тому, что над одинаковыми проектами могут работать работники с разной производительностью труда. От способа их расстановки на соответствующие работы будет зависеть длительность выполнения проекта (длина критического пути).

Основная часть. При применении алгоритма построения критического пути [2] находят резервы времени для некритических работ (не принадлежащих критическим путям); критических путей может быть несколько. В случае превышения резерва времени соответствующая работа будет начата с опозданием и в итоге проект будет завершён позже времени, определённого критическим путем.

Работы, лежащие на одном пути, могут выполняться лишь последовательно, поэтому для их реализации необходимо и достаточно одного работника. Работы, не лежащие на одном пути, могут выполняться одновременно. Их будем называть *параллельными*; несколько взаимно параллельных работ могут одновременно выполняться таким же количеством работников. Возможность начала очередной работы зависит от того, как быстро завершены предшествующие ей работы.

Введем следующие обозначения:

G – граф-сеть проекта; дуги соответствуют работам, узлы – событиям окончания одних работ и начала других;

$V = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_z)$ – упорядоченное множество событий начала и окончания работ; v_0 – источник; v_z – сток;

Θ – оптимальная длительность выполнения проекта;

K – критический путь. $T(K)$ – длительность критического пути;

g – наибольшее количество попарно параллельных работ в сети;

g_k – количество параллельных работ после наступления события v_k ;

m – количество работников;

$d(v_i)$ – степень узла v_i ;

$d^+(v_i)$ (для краткости d_i^+) – полустепень захода узла (v_i), означает, сколько работ закончилось и работников освободилось в момент наступления события v_i ;

$d^-(v_i)$ (для краткости d_i^-) – полустепень исхода узла v_i , означает, сколько работ может начать выполняться одновременно;

$\Delta d^i = d_i^- - d_i^+$ – задает минимальное (по модулю) изменение требуемого количества работников в момент события v_i для того, чтобы работы не простаивали.

Путь, соединяющий источник со стоком, назовем *полным*.

Количество работников для выполнения проекта назовем *достаточным*, если все работы проекта могут быть выполнены этими работниками без простоев работ. Другими словами, каждая работа может быть начата сразу же после выполнения всех предшествующих событию работ. В таком случае $\Theta = T(K)$.

Можно построить сеть, в которой все полные пути критические, их g штук (g – целое положительное число) и они попарно не пересекаются за исключением источника и стока. Для упрощения решения задачи на графах отступим от определения классической сети планирования и допустим существование мультидуг. Тогда предложенный выше пример будет выглядеть как сеть из двух узлов (источник и сток), соединенных g дугами одинакового веса.

Лемма 1. В любой сети можно задать веса дуг так, что все полные пути будут критическими.

Доказательство. Приведем алгоритм присвоения весов дугам. Вначале присвоим всем дугам веса, равные единице, и воспользуемся алгоритмом нахождения критических путей [2]. Это будут полные пути, содержащие наибольшее количество дуг (число k). В результате применения алгоритма у некритических дуг будут найдены положительные резервы времени. Поочередно (в любой последовательности) увеличивая вес некритической дуги на величину резерва и пересчитывая критические пути, в конечном итоге за время, не превышающее $O(n)$, мы присвоим дугам такие веса, что у них не останется положительных резервов времени, т. е. все пути станут критическими и длины k . *Лемма доказана.*

В источнике [3] сформулировано утверждение о том, что минимальное достаточное

количество работников m не превышает g , где g – максимальное для данной сети количество параллельных дуг.

Покажем, что условие $m = g$ является необходимым. Если у некоторых работ есть резерв времени, то они могут заканчиваться не одновременно с другими предшествующими тому же событию работами; также они могут не начинаться одновременно с другими работами, следующими за данным событием. Но если веса дугам сети присвоены в соответствии с алгоритмом леммы 1, то резерва времени у работ нет и все предшествующие событию работы заканчиваются одновременно; в этот же момент начинается выполнение всех следующих за событием работ.

Занумеруем узлы сети в соответствии с порядком наступления соответствующих событий v_0, v_1, \dots, v_z . Подсчитаем количество одновременно выполняемых работ в сети, взвешенной по правилу леммы 1, в момент наступления каждого события.

Лемма 2. Количество параллельных работ $g_k = \sum_{i=0}^k \Delta d^i$ в момент события v_k .

Доказательство. Методом математической индукции. В момент v_0 имеем $g_0 = d(v_0) = d^-(v_0)$. Пусть в момент v_{k-1} справедливо равенство $g_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta d^i$. В момент $v_k d_k^+$ работы закончились, d_k^- работ могут начаться одновременно, поэтому количество параллельных работ в момент v_k меняется на величину Δd^k . В момент события $v_k g_k = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta d^i + \Delta d^k - \sum_{i=0}^k \Delta d^i$. Лемма доказана.

Величина $g = \max_{1 \leq k \leq z} g_k = \max_{1 \leq k \leq z} \sum_{i=0}^k \Delta d^i$ есть максимальное количество параллельных работ в сети G при заданных весах дуг. При других весах эта величина может принимать иные значения. На рис. 1 и 2 приведены примеры одной и той же сети, в которой все пути – критические, но в зависимости от весов дуг в одном случае $m = g = 4$, а в другом случае $m = g = 3$.

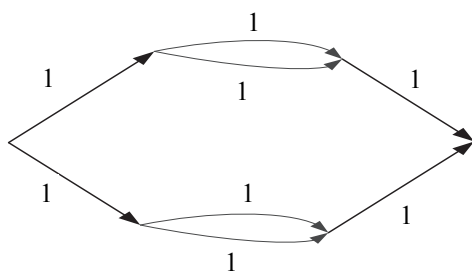


Рис. 1. Сеть для случая $m = g = 4$

Веса дуг проставлены на рисунках возле соответствующих дуг. На первом рисунке все веса равны 1.

На втором рисунке в каждом из критических путей по одной дуге имеют вес, равный 2, и эти дуги не параллельны при упорядочении событий в соответствии со временем их наступления.

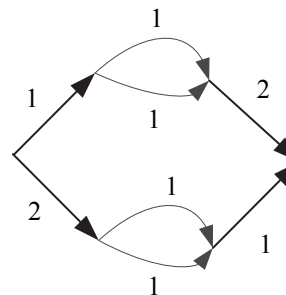


Рис. 2. Сеть для случая $m = g = 3$

Для рис. 1 $T(K) = 3, g = 4$. Если $m = 2$ или $m = 3$, то $\Theta = 4$, т. е. $\Theta > T(K)$. Если $m = 4$, то $\Theta = T(K)$.

Для рисунка 2 $T(K) = 4, g = 3$. Если $m = 2$, то $\Theta = 5$, т. е. $\Theta > T(K)$. Если $m = 3$, то $\Theta = T(K)$.

Любой сети независимо от значений весов дуг присуща частичная упорядоченность ее узлов. Эта частичная упорядоченность определяется путями из источника в сток. Вычисляя значения величины g_k в соответствии с частичной упорядоченностью узлов, можно получать разные значения g_k для одного и того же v_k . В соответствии с частичной упорядоченностью можно разными способами получить топологическую сортировку всех узлов сети. И для различных топологических сортировок могут оказываться разными значения параметра g .

Из лемм 1 и 2 следует критерий количества работников для работы над проектом, чтобы работы не простаивали и не было лишних работников.

Теорема. Для того чтобы время выполнения проекта равнялось длине критического пути соответствующей сети, необходимо и достаточно $m = g$ работников.

Доказательство. Необходимость. Проследим ход выполнения работ проекта. Пока выполняется условие $m \geq g$, проект выполняется оптимальным образом (без простоев), т. е. $\Theta = T(K)$.

Пусть в момент наступления события v_k выполнено условие $\sum_{i=1}^k \Delta d_i > m$, тогда $g_k - m$ работ в этот момент будут простаивать и начнут выполняться позже. С учетом леммы 1 получаем $\Theta > T(K)$.

Достаточность. Поскольку в любой момент времени не возникнет необходимости выполнять одновременно более g работ, то $m = g$ работников достаточно для работы без простоев. В случае $m > g$ один или более работников

будут простаивать и без их участия продолжительность выполнения проекта не увеличится, т. е. $\Theta = T(K)$. Теорема доказана.

Замечание. На практике, если работы имеют резерв времени, некоторые из них можно распараллелить и таким образом уменьшить количество параллельных работ [4].

Заключение. Рассмотренная теорема позволяет по структуре сети оценить количество работников для выполнения проекта при условии, что критический путь не удлинился из-за простоев части работ в какой-то промежуток времени в связи с занятостью всех исполнителей

на других работах. Также теорема позволяет оценить это количество таким образом, чтобы каждый запланированный исполнитель принял участие в выполнении проекта, т. е. чтобы не оказалось незадействованных работников.

Количество параллельных работ в проекте, т. е. работ, которые можно выполнять одновременно, влияет на общую численность привлекаемых к работе над проектом исполнителей. Это количество зависит как от очередности выполнения работ (структуры сети), так и от производительностей труда работников (весов дуг графа).

Список литературы

1. Плескунов М. А. Задачи сетевого планирования. Екатеринбург: Уральский ун-т, 2014. 92 с.
2. Буснюк Н. Н., Черняк А. А. Математическое моделирование. Минск: Беларусь, 2014. 216 с.
3. Буснюк Н. Н. Разновидности задачи сетевого планирования, некоторые методы их решения и алгоритмические оценки // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2019. № 2. С. 101–104.
4. Буснюк Н. Н., Новиков В. А. Метод оптимального решения задачи о назначениях в сетевом планировании // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 170–172.

References

1. Pleskunov M. A. *Zadachi setevogo planirovaniya* [Network planning problems]. Ekaterinburg, Ural'skiy universitet Publ., 2014. 92 p.
2. Busnyuk N. N., Chernyak A. A. *Matematicheskoye modelirovaniye* [Mathematical modeling]. Minsk, Belarus' Publ., 2014. 216 p.
3. Busnyuk N. N. Varieties of the network planning problem, some methods of their solution and algorithmic estimates. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics. 2019, no. 2, pp. 101–104 (In Russian).
4. Busnyuk N. N., Novikov V. A. Optimal solution method of assignment problem in network planning. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6, Physics and Mathematics. Informatics, pp. 170–172 (In Russian).

Информация об авторе

Буснюк Николай Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: busnnn@belstu.by

Information about the author

Busnyuk Nikolay Nikolaevich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: busnnn@belstu.by

Поступила после доработки 01.12.2020

К ЮБИЛЕЮ FOR THE ANNIVERSARY

**К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Л. А. РОТТА, ОСНОВАТЕЛЯ
БЕЛОРУССКОЙ НАУЧНОЙ ШКОЛЫ В ОБЛАСТИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ
ТЕРМОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД**

**TO THE 100 TH ANNIVERSARY OF THE BIRTH OF L. A. ROTT,
THE FOUNDER OF THE BELARUSIAN SCIENTIFIC SCHOOL IN THE FIELD
OF STATISTICAL THERMODYNAMICS AND CONTINUOUS MEDIA MECHANICS**



Лазарь Артурович Ротт (1920–2006)

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики (1964–1992), профессор (1992–2005).

Работал в Белорусском лесотехническом институте (переименованном впоследствии в Белорусский технологический институт, а затем в Белорусский государственный технологический университет) с 1953 по 2005 г., с 1964 по 1992 г. заведовал созданной им кафедрой теоретической механики. Деятельность Л. А. Ротта оказала большое влияние на подготовку специалистов физико-математического профиля и на развитие нашего университета в целом.

Л. А. Ротт родился 13 декабря 1920 г. в г. Кургане Челябинской (в то время Курганской) области в семье служащих. В 1934 г. вместе с семьей переехал в Оршу. После окончания средней школы в 1938 г. поступил на физический факультет Московского государственного университета, в котором в это время преподавали такие выдающиеся физики, как Капица П. Л., Ландау Л. Д. и др. 21 июня 1941 г. он сдал последний экзамен за третий курс на физфаке МГУ. В связи с началом Великой Отечественной

войны был призван в армию и вместе с сокурсниками в полном составе переведен в Военно-воздушную инженерную академию имени Жуковского, которую окончил в 1944 г. С августа 1944 г. и до конца войны находился в авиационных частях в составе 1-го Украинского, 3-го Прибалтийского, 3-го Белорусского фронтов. К лету 1953 г. появилась возможность демобилизоваться из армии, чем Лазарь Артурович (значительно чаще его называли Леонидом Артуровичем), имевший к тому времени воинское звание капитана, не замедлил воспользоваться, чтобы заняться научной работой, к которой он стремился. В сентябре 1953 г. был избран по конкурсу для работы в должности ассистента кафедры высшей математики и теоретической механики Белорусского лесотехнического института и фактически до конца своей жизни непрерывно проработал в этом институте, который в дальнейшем был преобразован в технологический университет.

Еще проходя службу в армии, в 1949 и 1950 гг. сдал кандидатские экзамены физико-математического профиля, открывшие ему возможность защиты кандидатской диссертации по теоретической физике. Отличная базовая подготовка по фундаментальным физико-математическим дисциплинам, изученным в МГУ, а также приобретенная подготовка по ряду технических дисциплин, изученных в ВВИА имени Н. Е. Жуковского, стали основой для правильного и быстрого выбора научного направления Леонидом Артуровичем. Он начал работать над практически важной и мало разработанной в то время проблемой описания свойств газов и их смесей при высоких и сверхвысоких давлениях. 3 января 1956 г. на объединенном совете химического и физико-математического факультетов БГУ Леонид Артурович защитил диссертацию «Газовые системы при высоких и сверхвысоких давлениях». Следует отметить, что он и впоследствии всегда выбирал

наиболее важные и перспективные направления научной деятельности и активно участвовал в их разработке.

При подготовке диссертации и после ее защиты Леонид Артурович интенсивно работал над статистико-механическим обоснованием явлений, происходящих в плотных газах. С этой целью им был разработан метод условных распределений, который на первых порах рассматривался как метод обоснования имевшей в то время широкое распространение теории «свободного объема», но в дальнейшем показавший свою применимость далеко за пределами возможностей упомянутой теории и ставший одним из эффективных методов исследования конденсированных молекулярных и ионных систем. Появляется ряд его публикаций в авторитетных советских журналах, таких как «Доклады АН СССР», «Журнал физической химии», «Физика твердого тела», «Доклады АН БССР», в которых дано обоснование предложенного метода, а также его приложения к решению конкретных задач статистической термодинамики. В частности, были получены принципиальные результаты по фазовым равновесиям и расслоению двух- и трехкомпонентных газовых смесей при высоких давлениях, предложены уравнения состояния сжатых газов.

Пионерские работы по экспериментальному исследованию газовых систем при высоких давлениях были выполнены в 50-е гг. прошлого столетия в Государственном институте азотной промышленности (г. Москва) в лаборатории профессора Кричевского И. Р. Были получены интересные результаты по экзотическим на то время фазовым равновесиям газ – газ, необычному поведению парциальных мольных величин при стремлении к нулю концентрации одного из компонентов смеси, кинетическим явлениям в критической области фазовых переходов жидкость – газ (например, критическое замедление химической диффузии). Леонид Артурович установил творческие связи с этой лабораторией, которые поддерживались на протяжении нескольких десятилетий. Им были выполнены важные работы по статистической теории диффузии в критической области, а затем в «Инженерно-физическом журнале» в 1963 г. совместно с Н. Е. Хазановой (сотрудница лаборатории И. Р. Кричевского) опубликован обзор по этой тематике. Также необходимо упомянуть обзор «Фазовые равновесия между двумя несмешивающимися фазами», опубликованный в журнале «Успехи химии» в 1967 г. совместно с искусным экспериментатором Циклисом Д. С.

Еще в 1956 г. Л. А. Ротт, имея соответствующее образование и понимая важность фундаментальных дисциплин для инженерной подготовки, организовал для студентов тогда еще Белорусского

лесотехнического института систему факультативных курсов по физико-математическим дисциплинам на уровне физико-математического факультета классического университета. Слушателями были отлично успевающие студенты. Посещали факультативы и сотрудники академических институтов: Шашков А. Г., впоследствии академик АН БССР, Гуревич И. Г., впоследствии доктор наук. В числе первых слушателей были Немцов В. Б. и Левин М. А., студенты лесоинженерного факультета, будущие доктора наук, профессора. Они закончили БЛТИ в 1959 г. и по распределению были направлены для работы на промышленных предприятиях. Попытки Л. А. Ротта оставить их для работы преподавателями в институте оказались безуспешными. Однако по истечении двух лет Леонид Артурович, будучи в хороших отношениях с заведующим кафедрой теоретической механики Белорусского политехнического института (БПИ) профессором Татуром Г. К., рекомендовал своих бывших студентов к нему в аспирантуру. В. Б. Немцов и М. А. Левин в 1964 г. успешно закончили аспирантуру и вскоре защитили кандидатские диссертации.

В связи с дальнейшим развитием института за счет открытия новых специальностей химико-технологического профиля летом 1964 г. кафедра высшей математики и теоретической механики была разделена на две. Заведующим кафедрой теоретической механики был избран по конкурсу в то время доцент Ротт Л. А., и у него появилась возможность создания и развития своей научной школы. В течение короткого времени кафедра была укомплектована в основном его учениками. В 1966 г. из БПИ возвратился кандидат технических наук Немцов В. Б., начал работу ассистентом выпускник лесоинженерного факультета Вихренко В. С. При кафедре со времени ее создания начал работать руководимый Л. А. Роттом научный семинар, который быстро приобрел широкую известность: на нем регулярно выступали как сотрудники кафедры, так и многие ученые Минска и других городов Советского Союза. Были установлены творческие связи с группой исследователей профессора Голика А. З. из Киевского государственного университета, в котором были сосредоточены разноплановые исследования свойств жидкостей, а также со многими другими научными центрами Советского Союза. Установлены контакты и с представителями Боголюбовской школы по статистической механике. Значительную поддержку в научных исследованиях оказывали видные ученые – профессор Зубарев Д. Н. (Математический институт АН СССР имени В. А. Стеклова) и профессор Климонтович Ю. Л. (Московский государственный университет).

Важную роль в становлении научной школы Л. А. Ротта сыграл III Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, состоявшийся при широком представительстве ученых (около 7 тыс. человек, включая свыше ста зарубежных участников) в 1968 г. в МГУ. Съезд был открыт торжественным заседанием в Кремлевском Дворце съездов. На нем были представлены два доклада Л. А. Ротта, В. Б. Немцова и В. С. Вихренко по статистико-механическому обоснованию уравнений механики сплошных сред, встреченные с большим интересом и способствовавшие укреплению авторитета Леонида Артуровича среди ученых-механиков. В Институте механики МГУ у академика Седова Л. И. состоялось обсуждение принципиальных вопросов построения микроскопических моделей сплошных сред и вывода на их основе феноменологических уравнений механики таких сред.

В последующем научные интересы сотрудников кафедры переместились в область статистической теории и термодинамики конденсированных систем. Доцент Немцов В. Б. сосредоточил усилия на разработке последовательной микроскопической теории вязкоупругих свойств молекулярных систем с учетом и без учета вращательных степеней свободы. В. С. Вихренко принимал участие в обосновании метода условных распределений, его обобщении на неравновесные процессы, анализе на основе этого метода различных физических явлений, в частности молекулярного рассеяния света. В 1970 г. он защитил диссертацию по теоретической и математической физике – это была первая диссертация, выполненная под руководством Л. А. Ротта. В следующем году Э. Т. Брук-Левинсоном, выпускником БГУ, была защищена вторая кандидатская диссертация на основе метода условных распределений.

Далее последовали кандидатские диссертации выпускников химического факультета: Наркевича И. И. (1973 г.), ныне профессора кафедры физики, доктора физико-математических наук, который с 1986 по 2013 г. заведовал кафедрой физики, и Бокуна Г. С. (1977 г.), ныне кандидата физико-математических наук, доцента кафедры механики и конструирования. В 1982 г. защитил кандидатскую диссертацию выпускник лесотехнического факультета Кулак М. И., который в дальнейшем создал кафедру полиграфических производств и был ее заведующим до 2017 г., защитил диссертацию доктор технических наук. В 2003 г. под руководством В. С. Вихренко кандидатскую диссертацию защитил выпускник физического факультета БГУ Грода Я. Г., ныне доцент кафедры механики и конструирования, который с 2011 по 2017 г. заведовал кафедрой теоретической механики.

Несколько диссертаций по методу условных распределений было защищено в Институте тепло- и массообмена АН БССР, которыми руководил Э. Т. Брук-Левинсон, и на кафедре физики под руководством И. И. Наркевича (С. И. Клинецевич, А. В. Жаркевич, Е. В. Фарафонтон).

В 1975 г. Л. А. Ротт защитил в БГУ докторскую диссертацию по методу коррелятивных функций условных распределений и его приложениям. В 1978 г. ему было присвоено ученое звание профессора. В 1979 г. опубликована монография Л. А. Ротта «Статистическая теория молекулярных систем. Метод коррелятивных функций условных распределений» (М.: Наука, 1979), подытожившая полученные к тому времени научные результаты. Далее последовали докторские диссертации его учеников: Немцова В. Б. (1987 г., Институт физики НАН Украины), Брук-Левинсона Э. Т. (1988 г., Московский институт стали и сплавов), Наркевича И. И. (1993 г., СПбГУ), Вихренко В. С. (1994 г., Институт физики НАН Беларуси). В целом учениками Леонида Артуровича было защищено свыше 15 кандидатских и 7 докторских диссертаций, опубликовано большое количество статей в наиболее авторитетных международных журналах, несколько монографий.

Наряду с интенсивной научной деятельностью Леонид Артурович много внимания уделял организации учебного процесса, научно-методической работе. Во главу угла были поставлены учет в читаемых курсах межпредметных связей и использование при изложении материала методов проблемного обучения. В результате совместно с сотрудниками кафедры были разработаны оригинальные курсы теоретической механики для будущих инженеров-механиков и инженеров-химиков. В особенности следует отметить разработку такого курса для студентов химиков-технологов. В то время существовало расхожее мнение, что знания теоретической механики студентам-химикам не очень-то и нужны. В процессе разработки курса было показано, что существуют глубокие межпредметные связи теоретической механики с различными химическими дисциплинами как фундаментального (объяснение сущности квантовых чисел как интегралов движения механических систем; а также установление соответствия, так и принципиального различия между классической и квантовой механикой), так и прикладного (работа химико-технологического оборудования и технологические процессы во многом основаны на использовании механического движения) характера. Результаты этой работы были опубликованы в сборнике «Теоретическая механика во вузах» (М.: Высшая школа) под ред. профессора Яблонского А. А. двумя изданиями (1971 г. и 1975 г.), а также в

нескольких статьях во всесоюзных сборниках научно-методических статей по теоретической механике в издательстве «Высшая школа» и в журнале «Вестник высшей школы». Опыт кафедры широко использовался в других химико-технологических вузах Советского Союза. К сожалению, реформы Высшей школы последних лет в России и у нас, в Беларуси, привели к значительной утрате возможностей для использования ранее накопленного учебно-методического опыта кафедры.

В 70–80-е гг. прошлого столетия активная методическая работа проводилась НМС по теоретической механике при Минвузе СССР, в который входили профессоры Яблонский А. А., Тарг С. М. и др. Леонид Артурович Ротт был членом Президиума этого совета, одновременно он возглавлял Республиканское научно-методическое объединение по теоретической механике и теории механизмов и машин и Республиканское методическое объединение преподавателей кафедр теоретической механики. По предложению НМС кафедра составила для коллегии Минвуза СССР развернутую справку, в которой раскрывалась роль теоретической механики в подготовке инженеров-химиков. Леонид Артурович совместно с сотрудниками возглавляемой им кафедры выступили соавторами программы по теоретической механике для химических специальностей втузов, утвержденной Минвузом СССР в 1984 г.

Вспомогается многоплановая работа Республиканского методического объединения преподавателей кафедр теоретической механики, способствовавшая существенному повышению качества преподавания теоретической механики в республике. Заседания объединения проводились поочередно в разных республиках, в том числе и выездные в разных городах. На заседаниях обсуждались методика преподавания курса для различных специальностей, использование межпредметных связей, внедрение прогрессивных методов преподавания, в частности проблемного обучения, индивидуализация работы со студентами. Регулярно издавался сборник научно-методических статей, редактором которого был Ротт Л. А. Вышло шесть выпусков этого сборника, который был известен не только в республике, но и за рубежом.

Последние годы жизни Л. А. Ротт посвятил разработке нового квантово-механического формализма, а также исследованию проблем турбулентности и ряду вопросов биофизики.

Леонид Артурович был свидетелем многих как драматических, так и триумфальных событий XX века. Свое отношение к этим событиям он изложил в книге «За спиной двадцатый век. Удушающее дыхание сталинизма» (1999 г.). В книге есть разделы, в которых автор рассуждает о

судьбах Высшей школы, о необходимости всемерно поддерживать творческую молодежь и способствовать ее всестороннему развитию.

Леонид Артурович был в высшей степени интеллигентным человеком, способным поддерживать беседы на различные темы профессиональной и повседневной жизни. Это в равной степени относится как к вопросам науки и техники, так и искусства, литературы, спорта и т. д. Руководя кафедрой, никогда не позволял себе повышать голос, и при этом поддерживался высочайший уровень дисциплины сотрудников, что обеспечивалось неоспоримым авторитетом заведующего, четкими и понятными общими установками высокопрофессионального отношения к служебным обязанностям. До преклонных лет занимался спортом. Любимым видом спорта был большой теннис. Увлекался спортивной ходьбой.

Л. А. Ротт был награжден орденом Отечественной войны II степени; медалями «За боевые заслуги», «За победу в Великой Отечественной войне», «20 лет Победы в Великой Отечественной войне», «30 лет Победы в Великой Отечественной войне», «40 лет Победы в Великой Отечественной войне», «50 лет Вооруженных сил СССР», «60 лет Вооруженных сил СССР», «70 лет Вооруженных сил СССР», Ветеран труда; Грамотой Верховного Совета БССР; Знаком «За отличные успехи в области высшего образования СССР»; Почетными грамотами Министерства высшего образования БССР (1970, 1978 и 1980 гг.), а также Почетными грамотами БТИ и БГТУ.

С 2006 г. научной школой руководил профессор Вихренко В. С., один из первых учеников Л. А. Ротта. За это время научные направления школы получили дальнейшее развитие как вглубь, так и вширь за счет рассмотрения новых физических объектов и систем. Прежде всего это касается изучения макроскопических систем с конкурирующими взаимодействиями притяжения и отталкивания, а также систем с наноразмерными и мезоскопическими неоднородностями, в которых наблюдаются, как правило, необычные свойства, не реализуемые в молекулярных системах с обычным короткодействующим взаимодействием типа Леннард-Джонса.

По результатам выполненных исследований за этот период кандидатские диссертации защитили А. В. Жаркевич (2005 г.), А. В. Ширко (2007 г.), Д. В. Гапанюк (2009 г.), Р. Н. Ласовский (2011 г.), Е. В. Фарафонтова (2012 г.), С. А. Борисевич (2016 г.).

Профессором Вихренко В. С. совместно с доцентами Бокуном Г. С., Гродой Я. Г., Гапанюком Д. В. и Ласовским Р. Н. разработан новый приближенный метод вычисления и анализа

равновесных характеристик решеточных газов, сочетающий в себе точность получаемых результатов с относительной простотой используемых вычислительных алгоритмов. Получены формально строгие статистико-механические выражения для коэффициентов диффузии, которые использованы для количественных расчетов, в том числе электрофизических характеристик ионных кристаллов и интеркаляционных соединений (1998 – 2003 гг.). Построена статистико-механическая теория неравновесных процессов (диффузии, термодиффузии, структурной релаксации) в решеточных системах. Рассмотрена кинетика захвата электронов на ловушках, их диффузии и межфазных переходов в солнечных элементах на основе красителей, дано объяснение наблюдающихся особенностей в зависимости времени жизни электронов от их концентрации. Получены кинетические дифференциально-разностные уравнения для решеточных систем в приближении среднего поля, в квазихимическом и диаграммном приближениях, показана их эффективность применительно к задаче разряда интеркаляционного источника тока, сопровождаемого фазовым переходом первого рода. Изучены процессы наноразмерного структурирования среды, обусловленные фазовыми переходами первого рода (2001–2011 гг.).

Получены интегральные уравнения для систем заряженных частиц, которые не содержат расходящихся членов, и рассчитаны радиальные функции распределения, а также фактор сжимаемости для симметричного случая (одновалентные ионы). Рассмотрена также симметричная система заряженных частиц в полярном растворителе. Разработана процедура статистико-механического описания твердотельной системы, взаимодействие частиц в которой описывается как коротко-, так и дальнедействующим потенциалами. Для этого применено разложение конфигурационного интеграла системы по обобщенным майеровским функциям, включающим в себя (помимо короткодействующего потенциала) потенциалы средних сил. Тем самым в базисное распределение системы включено дальнедействие на фоне среднего поля, создаваемого потенциалами средних сил. Числовые значения характеристик базисной системы определены с помощью результатов, полученных в рамках метода коллективных переменных. Теория использована для исследования описывающих керамические ионные материалы моделей, в которых рассматривается подвижность катионов в поле неподвижных анионов, обеспечивающих компенсацию электрического заряда, т. е. электронейтральность всей системы.

Разработаны методы исследования сложных систем с различными типами конкурирующих

взаимодействий (2015–2020 гг.). Например, межчастичное притяжение на малых расстояниях и отталкивание на больших – SALR-системы (Short-range Attraction and Long-range Repulsion), либо наоборот – SRLA-системы. Такие взаимодействия приводят к образованию либо четко определенных структур, таких как мицеллы, кластеры, слои, сети, многокомпонентные биослои, в частности биологические мембраны, белки или более слабые микрогетерогенности в сложных жидкостях, особенно ионных жидкостях и их смесях с различными растворителями, твердых электролитах и в интеркалированных соединениях. Исследованы равновесные свойства и структура таких систем на поверхностях, влияние на них ограничивающих поверхностей. Изучены кинетические особенности процесса адсорбции в системах с конкурирующими взаимодействиями.

В кандидатских диссертациях А. В. Жаркевича (2005 г.) и Е. В. Фарафоновой (2012 г.) выполнены исследования по практическому применению разработанного ранее (1993 г.) профессором Наркевичем И. И. двухуровневого статистического метода описания структуры и равновесных характеристик неоднородных систем в различных агрегатных состояниях. Этот метод позволил получить единое уравнение состояния для различных агрегатных состояний простых молекулярных систем (кристалл, жидкость, сильно сжатый газ). Статистическая модель для кристаллического состояния явно учитывает, что источником локальных деформаций в объеме кристалла являются дефекты (точечные, линейные либо объемные, например, поры в объеме кристалла), а макроскопические поля деформации возникают под действием внешних силовых полей либо поверхностных сил, создаваемых каким-либо внешним механическим воздействием.

В рамках этого метода А. В. Жаркевичем разработана статистическая модель одноосного деформирования линейных кристаллических образцов (2005 г.). В первом приближении по малому параметру нелинейного интегрального уравнения в статистической теории упругости получены аналитические выражения для младших коррелятивных функций и свободной энергии деформированной молекулярной цепочки с занятыми и свободными (вакантными) узлами линейной цепочки. В результате решения вариационной задачи с использованием большого термодинамического потенциала построена теоретическая диаграмма напряжение – деформация при растяжении – сжатии.

Е. В. Фарафоновой совместно с А. В. Жаркевичем и И. И. Наркевичем было построено молекулярно-статистическое описание теплоемкости

молекулярных кристаллов с тепловыми вакансиями (2010–2012 гг.), а с 2014 по 2018 г. проведено статистическое изучение микро- и макроструктуры, а также термодинамических характеристик одиночных сферических кристаллических наночастиц. Их уникальные свойства приводят к необычному поведению новых модифицированных наноструктурных материалов, которые получаются на их основе. При этом впервые получено статистическое выражение для функционала свободной энергии кристаллической сферической наночастицы с неоднородным распределением поля плотности. Это выражение используется при комплексном решении вариационной задачи по определению равновесного радиального дискретного профиля чисел заполнения элементарных ячеек в объеме сферической наночастицы с одновременным решением системы интегральных и алгебраических уравнений для потенциалов средних сил модифицированного метода условных распределений Л. А. Ротта. Разработана итерационная процедура численного поиска решений этой задачи для наночастиц разных размеров при разных температурах и исследована ее сходимость при использовании различных пробных функций для искомых зависимостей. В результате рассчитаны профили радиальных смещений узлов ГЦК решетки в объеме наночастицы и среднеквадратичных отклонений атомов либо молекул

от новых (смещенных) узлов деформированной решетки, а также зависимость температуры плавления таких наночастиц от их размеров.

Численное исследование большого термодинамического потенциала Ω как функционала поля плотности для коллоидных растворов, выполненное профессором Наркевичем И. И. в 2016–2020 гг. с использованием потенциала SALR, показало, что этот функционал для таких систем с пространственными гармоническими неоднородностями имеет несколько минимумов при разных значениях волнового числа. При меньшем из этих волновых чисел функционал Ω имеет значение, которое меньше, чем для однородного распределения плотности, т. е. неоднородное распределение плотности коллоидной системы является термодинамически более выгодным по сравнению с однородным, для которого волновое число равно нулю.

Основные результаты проведенных исследований опубликованы в двух монографиях: В. С. Вихренко, Г. С. Бокун, Я. Г. Грода «Равновесные и диффузионные характеристики интеркаляционных систем на основе решеточных моделей» (Минск: БГТУ, 2008, отдельные главы написаны совместно с Д. В. Гапанюком и Р. Н. Ласовским); И. И. Наркевич «Двухуровневый статистический метод описания неоднородных систем» (Германия, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2019).

Благодарные ученики Л. А. Ротта
Поступила после доработки 10.12.2020

СОДЕРЖАНИЕ

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ	5
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ	5
МАТЕМАТИКА	5
Горячкин В. В., Крахотко В. В., Широканова Н. И., Игнатенко В. В. Управление ансамблем линейных систем с запаздыванием по управлению в классе кусочно-постоянных функций	5
Якименко А. А. К вопросу о модальном управлении одной трехмерной системой нейтрального типа в общециклическом случае	9
Можей Н. П. Четырехмерные однородные пространства с почти симплектической структурой. Комплексный случай	13
МЕХАНИКА	19
Бильданов Э. Э. Основные состояния ламеллярной структуры SALR-системы в гексагональном окружении	19
ФИЗИКА	25
Сохибова А. М., Крук Н. Н. Анализ кислотно-основных равновесий в нижнем возбужденном синглетном S_1 состоянии порфиринов с использованием цикла Фёрстера	25
ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ	31
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ	31
Дубовик М. В., Смелов В. В. Математическая модель для анализа алгоритмов распределения запросов между серверами	31
Бурмакова А. В., Смелов В. В. Применение нечетких вычислений для проверки гипотез на основе модели прогнозирования процесса загрязнения геологической среды в результате аварийного пролива нефтепродуктов	36
Курилец А. В., Смелов В. В., Горанин Н. Метод авторизации на основе разложения чисел на простые сомножители	43
СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ОБУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ	48
Гурин Н. Н., Сахонь Е. С. Технология разработки симуляторов лабораторных установок для дистанционного обучения	48
Каргин Н. С., Гурин Н. И. Извлечение основного содержимого из веб-страниц на основе анализа визуальных характеристик элементов и преобразования в JSON формат	54
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	61
Буснюк Н. Н. Критерий количества работников в сети для выполнения проекта без простоев работ.....	61
К ЮБИЛЕЮ	65
К 100-летию со дня рождения Л. А. Ротта, основателя белорусской научной школы в области статистической термодинамике и механике сплошных сред	65

CONTENTS

SCIENCE ARTICLES	5
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES	5
MATHEMATICS	5
Goryachkin V. V., Krahotko V. V., Shirokanova N. I., Ignatenko V. V. Control of an ensemble of linear systems with a delay in control in the class of piecewise constant functions	5
Yakimenka A. A. To the question of modal control for one three-dimensional neutral type system in general cyclic case	9
Mozhey N. P. Four-dimensional homogeneous spaces with almost symplectic structure. The complex case	13
MECHANICS	19
Bildanau E. E. Ground state of the salt lamellar structure in a hexagonal environment	19
PHYSICS	25
Sokhibova A. M., Kruk M. M. Analysis of the acid-base equilibria in the lowest excited singlet S_1 state of porphyrins using Forster cycle	25
COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING SCIENCES	31
MODELLING OF PROCESSES AND MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS	31
Dubovik M. V., Smelov V. V. Mathematical model for analyzing algorithms for distributing requests between servers	31
Burmakova A. V., Smelov V. V. Application of fuzzy calculations to test hypotheses based on a model for predicting the process of contamination of the geological environment as a result of an emergency spill of oil products	36
Kurylets A. V., Smelov V. V., Goranin N. Authorization method based on the decomposition of numbers into simple multipliers	43
SYSTEMS ANALYSIS AND TRAINING SYSTEMS	48
Gurin N. I., Sahon E. S. Technology for the development of laboratory simulators for distance learning	48
Kargin N. S., Gurin N. I. Extracting the main content from web-pages by analysing the visual characteristics of the elements and converting to the JSON format	54
BRIEF MESSAGES	61
Busnyuk N. N. Criterion for the number of employees in the network for project implementation without downtime jobs	61
FOR THE ANNIVERSARY	65
To the 100 th anniversary of the birth of L. A. Rott, the founder of the belarusian scientific school in the field of statistical thermodynamics and continuous media mechanics	65

Редактор *Е. И. Гоман*
Компьютерная верстка *Е. В. Ильченко, Д. С. Жих*
Корректор *Е. И. Гоман*

Подписано в печать 12.03.2021. Формат 60×84¹/₈.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 9,1.
Тираж 100 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:
УО «Белорусский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/227 от 20.03.2014.
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.