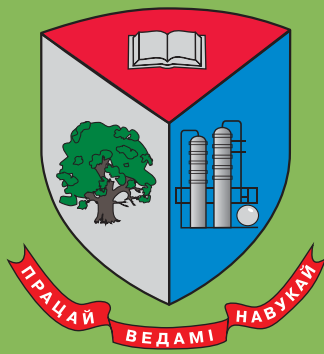


ISSN 2520-6141



# ТРУДЫ БГТУ

Научный журнал

---

Серия 3

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
НАУКИ И ИНФОРМАТИКА**

**№ 2 (212) 2018 год**

---

**Рубрики номера:**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Математика

Механика

Физика

ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Моделирование процессов  
и управление в технических системах

Системный анализ и обучающие системы

Алгоритмизация и программирование

Минск 2018

Учреждение образования  
«Белорусский государственный  
технологический университет»

# ТРУДЫ БГТУ

**Научный журнал**

*Издается с июля 1993 года*

**Серия 3**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
НАУКИ И ИНФОРМАТИКА**

**№ 2 (212) 2018 год**

*Выходит два раза в год*

Минск 2018

**Учредитель** – учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет»

**Главный редактор журнала** – Войтов Игорь Витальевич, доктор технических наук, доцент, Республика Беларусь

**Редакционная коллегия журнала:**

Дормешкин О. Б., доктор технических наук, профессор (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;  
Жарский И. М., кандидат химических наук, профессор (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;  
Кунтыш В. Б., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Прокопчук Н. Р., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор химических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Водопьянов П. А., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор философских наук, профессор, Республика Беларусь;  
Новикова И. В., доктор экономических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Торчик В. И., доктор биологических наук, Республика Беларусь;  
Долгова Т. А., кандидат физико-математических наук, доцент, Республика Беларусь;  
Захарук Т., доктор педагогических наук, профессор, Республика Польша;  
Пайвинен Ристо, доктор наук, профессор, Финляндская Республика;  
Барчик Стэфан, доктор наук, профессор, Словацкая Республика;  
Жантасов К. Т., доктор технических наук, профессор, Республика Казахстан;  
Харша Ратнавира, доктор наук, профессор, Королевство Норвегия;  
Рангелова Е. М., доктор педагогических наук, профессор, Республика Болгария;  
Шкляр Бенцион, профессор, Государство Израиль;  
Хассель Л. Г., доктор наук, профессор, Королевство Швеция;  
Файгле В., доктор наук, профессор, Федеративная Республика Германия;  
Флорик Е. А., кандидат биологических наук, доцент (секретарь), Республика Беларусь.

**Редакционная коллегия серии:**

Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор (главный редактор серии), Республика Беларусь;  
Урбанович П. П., доктор технических наук, профессор (заместитель главного редактора серии), Республика Беларусь;  
Вихренко В. С., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Колесников В. Л., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Калинин А. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Квасов Н. Т., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Леваков А. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Мазаник С. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Минченко Л. И., доктор физико-математических наук, Республика Беларусь;  
Сайко А. П., доктор физико-математических наук, Республика Беларусь;  
Головкин М. Ф., член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, Украина;  
Щекин А. К., член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, Российская Федерация;  
Аргиракис Панос, доктор наук, профессор, Греческая Республика;  
Бартосевич Збигнев, доктор габилитованный, Республика Польша;  
Горецкий Иржи, доктор габилитованный, Республика Польша;  
Орлюкас Антанас Феликсас, доктор наук, Литовская Республика;  
Шкляр Бенцион, профессор, Государство Израиль;  
Соловьева И. Ф., кандидат физико-математических наук, доцент (ответственный секретарь), Республика Беларусь;  
Кобайло А. С., кандидат технических наук, доцент (секретарь), Республика Беларусь.

**Адрес редакции:** ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.

Телефоны: главного редактора журнала – (+375 17) 226-14-32;

главного редактора серии – (+375 17) 399-49-60.

E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

Свидетельство о государственной регистрации средств массовой информации

№ 1329 от 23.04.2010, выданное Министерством информации Республики Беларусь.

Журнал включен в «Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований»

Educational institution  
“Belarusian State Technological University”

# PROCEEDINGS OF BSTU

**Scientific Journal**

*Published monthly since July 1993*

**Issue 3**

**PHYSICS  
AND MATHEMATICS.  
INFORMATICS**

**No. 2 (212) 2018**

*Published biannually*

Minsk 2018

**Publisher** – educational institution “Belarusian State Technological University”

**Editor-in-chief** – Voitau Ihar Vital’evich, DSc (Engineering), Associate Professor, Republic of Belarus

**Editorial (Journal):**

Dormeshkin O. B., DSc (Engineering), Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;  
Zharskiy I. M., PhD (Chemistry), Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;  
Kuntyshev V. B., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;  
Prokopchuk N. R., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Chemistry), Professor, Republic of Belarus;  
Vodop’yanov P. A., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Philosophy), Professor, Republic of Belarus;  
Novikova I. V., DSc (Economics), Professor, Republic of Belarus;  
Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Torchik V. I., DSc (Biology), Republic of Belarus;  
Dolgova T. A., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Republic of Belarus;  
Zakharuk T., DSc (Pedagogics), Professor, Republic of Poland;  
Paivinen Risto, DSc, Professor, Republic of Finland;  
Barcik Štefan, DSc, Professor, Slovak Republic;  
Zhantasov K. T., DSc (Engineering), Professor, Republic of Kazakhstan;  
Harsha Ratnaweera, DSc, Professor, Kingdom of Norway;  
Rangelova E. M., DSc (Pedagogics), Professor, Republic of Bulgaria;  
Shklyar Benzion, Professor, State of Israel;  
Hassel L. G., DSc, Professor, Kingdom of Sweden;  
Faigle W., DSc, Professor, Federal Republic of Germany;  
Flyurik E. A., PhD (Biology), Associate Professor (secretary), Republic of Belarus.

**Editorial (Issue):**

Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor (managing editor), Republic of Belarus;  
Urbanovich P. P., DSc (Engineering), Professor, (sub-editor), Republic of Belarus;  
Vikhrenko V. S., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Kolesnikov V. L., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;  
Kalinin A. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Kvasov N. T., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Levakov A. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Mazanik S. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Minchenko L. I., DSc (Physics and Mathematics), Republic of Belarus;  
Sayko A. P., DSc (Physics and Mathematics), Republic of Belarus;  
Golovko M. F., Corresponding Member, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Ukraine;  
Shchekin A. K., Corresponding Member, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Russian Federation;  
Argyarakis Panos, DSc, Professor, Republic of Greece;  
Bartosevich Zbigniew, DSc, Republic of Poland;  
Gorezki Irshi, DSc, Republic of Poland;  
Orlukas Antanas Feliksas, DSc, Republic of Lithuania;  
Shklyar Benzion, Professor, State of Israel;  
Solov’eva I. F., PhD (Physics and Mathematics) (executive editor), Republic of Belarus;  
Kobaylo A. S., PhD (Engineering) (secretary), Republic of Belarus.

**Contact:** 13a, Sverdlova str., 220006, Minsk.  
Telephones: editor-in-chief (+375 17) 226-14-32;  
managing editor (+375 17) 399-49-60.  
E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

---

## МАТЕМАТИКА

---

УДК 517.935.2+519.71

**И. М. Борковская, О. Н. Пыжкова**

Белорусский государственный технологический университет

### **ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ И СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Исследование гибридных систем, имеющих многочисленные приложения в автомобилестроении, авиастроении, робототехнике и других областях, и решение различных задач управления для них позволяет значительно расширить область применения математической теории управления. В работе приводятся результаты по задачам управления для некоторых классов гибридных систем, в частности по задачам относительной управляемости и достижимости для дискретно-непрерывных систем. Также выделяются результаты по исследованию возможности стабилизации дискретно-непрерывных систем и систем с многомерным (2D-мерным) временем. Анализируются и другие задачи качественной теории управления для гибридных динамических систем.

**Ключевые слова:** относительная управляемость, стабилизация, гибридные дискретно-непрерывные системы, системы с многомерным временем.

**I. M. Borkovskaya, O. N. Pyzhkova**

Belarusian State Technological University

### **THE PROBLEMS OF CONTROL AND STABILIZATION FOR HYBRID DYNAMIC SYSTEMS**

The study of hybrid systems that have numerous applications in the automobile industry, aircraft building, robotics and other areas and the solution of various control problems for them makes it possible to expand the scope of the mathematical control theory significantly. The paper provides the results on control problems classes of hybrid systems, for example, on problems of relative controllability and reachability for discrete-continuous systems. The results on the investigation of the possibility of stabilization of discrete-continuous systems and systems with multidimensional (2D-dimensional) time are also highlighted. Other problems of the qualitative control theory for hybrid dynamical systems are analyzed.

**Key words:** relative controllability, stabilization, hybrid discrete-continuous systems, systems with multidimensional time.

**Введение.** Изучение поведения и конструирование систем управления, обладающих требуемыми в приложениях свойствами, является ключевой задачей теории управления движением. Исследование гибридных систем, имеющих многочисленные приложения в автомобилестроении, авиастроении, робототехнике и других областях и решение различных задач управления для них позволяет значительно расширить область применения математической теории управления. Для гибридных систем могут быть сформулированы раз-

личные известные задачи оптимального управления, достижимости и верификации, исследования на устойчивость, задачи стабилизации, идентификации и др. Важнейшими являются вопросы представления решений гибридных систем, относительной управляемости, модального управления.

Задача достижимости во многих случаях рассматривается как задача построения множества достижимости гибридной системы, содержащего всевозможные состояния, в которые можно перейти при помощи допустимых управляющих

воздействий из фиксированного в заданный начальный момент времени состояния. К задачам достижимости примыкают задачи верификации, в которых требуется выяснить, может ли система попасть в одно из «нежелательных» состояний либо, наоборот, в «желательное» состояние. Это, например, может потребоваться с целью обеспечения безопасного функционирования системы. Свойствам гибридных систем посвящены многие работы [1–4].

Виды гибридных систем многообразны. Среди них выделяют ГДР-системы (дифференциально-разностные системы), которые описывают процессы, где наряду с динамическими встречаются и алгебраические зависимости, и ГДН-системы (дискретно-непрерывные системы), содержащие как непрерывные, так и дискретные переменные. Важным классом гибридных систем является класс систем с многомерным (2D-мерным) временем.

В работе приводятся результаты по задачам управления для некоторых классов гибридных систем, выделяются результаты по исследованию возможности стабилизации систем, т. е. получению условий на параметры системы, при которых существует регулятор, обеспечивающий важнейшее свойство – устойчивость замкнутой системы управления.

**Основная часть.** Управляемость – одно из важнейших свойств системы управления, описывающее возможность перевести систему из одного состояния в другое. Исследование системы на управляемость является одним из важных шагов в синтезе управляющих воздействий. Рассмотрим дискретно-непрерывную систему:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh), t \in [kh, (k+1)h); \quad (1)$$

$$y(kh+h) = A_{21}x(kh) + A_{22}y(kh) + Bu(kh); \quad (2)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

с точки зрения ее относительной управляемости и достижимости [5, 6]. В формулах (1), (2)  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(kh) \in \mathbb{R}^m$ ,  $u(kh) \in \mathbb{R}^r$ ,  $h > 0$ ,  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $B$  – постоянные матрицы соответствующих размеров с начальными условиями

$$x(0) = x(+0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (3)$$

При заданном моменте времени  $t_1 = qh$ ,  $q \in \mathbb{N}$  систему (1), (2) назовем  $t_1$ -относительно управляемой, если для любых начальных данных  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  в условиях (3) найдется управление  $u(kh) \in \mathbb{R}^r$ ,  $k = 0, 1, \dots, q-1$  такое, что соответствующее решение  $x(t), t \geq 0$ ,  $y(kh)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством  $x(t_1) = 0$ ,  $y(t_1) = 0$ . Если соответствующее решение

$x(t), t \geq 0$ ,  $y(kh), k = 0, 1, \dots$  системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством  $x(t_1) = 0$ , назовем систему  $t_1$ -относительно управляемой по  $x$ . При выполнении свойства  $y(t_1) = 0$  назовем систему  $t_1$ -относительно управляемой по  $y$ .

Систему (1), (2) назовем  $t_1$ -относительно достижимой, если для любых векторов  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ ;  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^m$  в условиях (3) найдется управление  $u(kh) \in \mathbb{R}^r$ ,  $k = 0, 1, \dots, q-1$ , такое, что соответствующее решение  $x(t), t \geq 0$ ,  $y(kh), k = 0, 1, \dots$  системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством  $x(t_1) = x_1$ ,  $y(t_1) = y_1$ . Систему назовем  $t_1$ -относительно достижимой по  $x$ , если для любых векторов  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ ;  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  в условиях (3) найдется управление  $u(kh) \in \mathbb{R}^r$ ,  $k = 0, 1, \dots, q-1$  такое, что соответствующее решение  $x(t), t \geq 0$ ,  $y(kh), k = 0, 1, \dots$  системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством  $x(t_1) = x_1$ . Система  $t_1$ -относительно достижима по  $y$ , если для любых векторов  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ;  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^m$  в условиях (3) найдется управление  $u(kh) \in \mathbb{R}^r$ ,  $k = 0, 1, \dots, q-1$  такое, что соответствующее решение  $x(t), t \geq 0$ ,  $y(kh), k = 0, 1, \dots$  системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством  $y(t_1) = y_1$ .

Применяя формулу Коши, получим:

$$\begin{aligned} x(kh+h) &= e^{A_{11}(kh+h-kh)}x(kh) + \\ &+ \int_{kh}^{kh+h} e^{A_{11}(kh+h-\tau)}A_{12}y(kh)d\tau = e^{A_{11}h}x(kh) + \\ &+ \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}d\tau A_{12}y(kh). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$z[k] = \begin{bmatrix} x(kh) \\ y(kh) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} = \Delta, \\ \Sigma_h = \begin{bmatrix} e^{A_{11}h} & \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}d\tau A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Для описания  $z[k]$  получаем дискретную систему:

$$z[k+1] = \Sigma_h z[k] + \Delta u(kh), \quad k = 0, 1, \dots$$

Рассматриваемые задачи управляемости и достижимости приводят к соответствующим проблемам для дискретных систем. Задача относительной управляемости дискретно-непрерывной системы (1), (2) сводится к задаче полной управляемости (в смысле Калмана) указанной выше дискретной системы.

**Теорема 1.** Условие

$$\begin{aligned} \text{rank}[\Delta, \sum_h \Delta, \dots, (\sum_h)^{q-1} \Delta, (\sum_h)^q] = \\ = \text{rank}[\Delta, \sum_h \Delta, \dots, (\sum_h)^{q-1} \Delta] \end{aligned}$$

является необходимым и достаточным для  $qh$ -относительной управляемости системы (1), (2).

**Теорема 2.** Условие

$$\begin{aligned} \text{rank}(H[\Delta, \sum_h \Delta, \dots, (\sum_h)^{q-1} \Delta, (\sum_h)^q]) = \\ = \text{rank}(H[\Delta, \sum_h \Delta, \dots, (\sum_h)^{q-1} \Delta]) \end{aligned}$$

является необходимым и достаточным для  $qh$ -относительной управляемости по  $x$  системы (1), (2) при  $H = [I_n \ 0]$ , для  $qh$ -относительной управляемости по  $y$  системы (1), (2) при  $H = [0 \ I_m]$ , где символ  $I_k$  обозначает единичную  $k \times k$  матрицу.

Отметим, что если система (1), (2) не является  $qh$ -относительно управляемой при  $q = n + m$ , то она не будет  $qh$ -относительно управляемой и при  $q > n + m$ .

Систему (1), (2) считают относительно управляемой, если она  $qh$ -относительно управляема хотя бы при одном натуральном числе  $q$ . Тогда из теоремы 1 вытекает критерий относительной управляемости системы (1), (2), заключающийся в требовании

$$\begin{aligned} \text{rank}[\Delta, \sum_h \Delta, \dots, (\sum_h)^{m+n-1} \Delta, (\sum_h)^{m+n}] = \\ = \text{rank}[\Delta, \sum_h \Delta, \dots, (\sum_h)^{m+n-1} \Delta]. \end{aligned}$$

Условие

$$\begin{aligned} \text{rank}(H[\Delta, \sum_h \Delta, \dots, (\sum_h)^{m+n-1} \Delta, (\sum_h)^{m+n}]) = \\ = \text{rank}(H[\Delta, \sum_h \Delta, \dots, (\sum_h)^{m+n-1} \Delta]) \end{aligned}$$

является необходимым и достаточным для относительной управляемости по  $x$  системы (1), (2) при  $H = [I_n \ 0]$  и для относительной управляемости по  $y$  при  $H = [0 \ I_m]$ .

Имеют место следующие (теоремы 3, 4) условия  $t_1$ -относительной достижимости системы (1), (2):

**Теорема 3.** Условие

$$\text{rank}[\Delta, \sum_h \Delta, \dots, (\sum_h)^{q-1} \Delta] = n + m$$

является необходимым и достаточным для  $qh$ -относительной достижимости системы (1), (2).

**Теорема 4.** Условие

$$\text{rank}(H[\Delta, \sum_h \Delta, \dots, (\sum_h)^{q-1} \Delta, (\sum_h)^q]) = \text{rank} H$$

является необходимым и достаточным для  $qh$ -относительной достижимости по  $x$  системы (1), (2) при  $H = [I_n \ 0]$ , для  $qh$ -относительной достижимости по  $y$  системы (1), (2) при  $H = [0 \ I_m]$ .

тижимости по  $y$  системы (1), (2) при  $H = [0 \ I_m]$ .

Если система (1), (2) не является  $qh$ -относительно достижимой при  $q = n + m$ , то она не будет  $qh$ -относительно управляемой и при  $q > n + m$ . Введем понятие относительной достижимости как  $qh$ -относительной достижимости хотя бы при одном натуральном числе  $q$ , тогда критерий относительной достижимости можно сформулировать следующим образом: система (1), (2) является относительно достижимой тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\text{rank}[\Delta, \sum_h \Delta, \dots, (\sum_h)^{n+m-1} \Delta] = n + m.$$

В дальнейшем предстоит исследовать вопросы  $qh$ -относительной управляемости и достижимости по  $x$  в случае произвольного конечного момента времени  $t_1 \neq qh$ ,  $q \in \mathbb{N}$ .

Рассмотрим теперь такой класс гибридных систем, как гибридные системы с многомерным (2D-мерным) временем:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t, k) = A_{11}x_1(t, k) + A_{12}x_2(t, k) + B_1u(t, k), \quad (4) \\ t \in [0, +\infty); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t, k+1) = A_{21}x_1(t, k) + A_{22}x_2(t, k) + B_2u(t, k), \quad (5) \\ k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где  $\dot{x}_1(t, k) = \frac{\partial x_1(t, k)}{\partial t}$ ;  $x_1(t, k) \in \mathbb{R}^{n_1}$ ;  $x_2(t, k) \in \mathbb{R}^{n_2}$ ;

$x_1(t, k), x_2(t, k)$  –  $n_1$ - и  $n_2$ -векторы состояния системы;  $u(t, k) \in \mathbb{R}^r$  – вектор управляющего воздействия,  $t \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$  – постоянные матрицы соответствующих размеров, с граничными (начальными) условиями:

$$\begin{aligned} x_1(0, k) = x_1(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad x_2(t, 0) = x_2(t), \\ t \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

В работе [5] исследована  $(t_1, k_1)$ -управляемость системы (4), (5) относительно  $x_1$  и представлен параметрический критерий управляемости с использованием решений определяющего уравнения. В дальнейшем методика может быть применена для исследования управляемости относительно  $x_2$ , а также относительно  $x_1, x_2$ .

Исследуем стабилизируемость указанных выше видов систем [7–9]. Свойство стабилизируемости является важнейшим требованием, предъявляемым к реальным системам управления. Присоединим к дискретно-непрерывной системе (1), (2) регулятор вида

$$u(kh) = Q_1 x(kh) + Q_2 y(kh), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6)$$



где  $Q_1$  и  $Q_2$  – постоянные матрицы размеров  $r \times n$  и  $r \times m$  соответственно. Замкнутая система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}y(kh), t \in [kh, (k+1)h); \\ y(kh+h) &= (A_{21} + BQ_1)x(kh) + \\ &+ (A_{22} + BQ_2)y(kh). \end{aligned}$$

**Теорема 5.** Система (1), (2) является стабилизируемой дискретным регулятором (6) тогда и только тогда, когда

$$\text{rank}[\lambda I_{n+m} - \sum_h, \Delta] = n + m$$

для всех комплексных чисел  $\lambda$ , таких, что  $|\lambda| \geq 1$ .

Рассмотрим теперь гибридную 2D-систему (4), (5). Уравнение вида

$$\det \begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \mu I_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

назовем характеристическим уравнением, а его корни (в общем случае комплексные) – характеристическими числами (значениями) системы (4), (5). В работе [8] введены определения разных видов устойчивости. Необходимые условия асимптотической устойчивости сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 6.** Если система (4), (5) слабо асимптотически устойчива, то для корней  $(\lambda, \mu)$  характеристического уравнения (7) выполняется условие:  $\text{Re} \lambda < 0$  и  $|\mu| \leq 1$  или  $\text{Re} \lambda \leq 0$  и  $|\mu| < 1$ ; если система (4), (5) сильно асимптотически устойчива, то для корней  $(\lambda, \mu)$  характеристического уравнения (7) соблюдается условие:  $\text{Re} \lambda < 0$  и  $|\mu| < 1$ ; если система (4), (5)  $(\alpha, \gamma)$ -устойчива, то для корней  $(\lambda, \mu)$  характеристического уравнения (7) выполняется условие  $\text{Re} \lambda \leq -\alpha$  и  $|\mu| \leq \gamma$ .

В скалярном случае, когда  $A_{11} = a_{11}$ ,  $A_{12} = a_{12}$ ,  $A_{21} = a_{21}$ ,  $A_{22} = a_{22}$  – действительные числа, верны теоремы 7, 8.

**Теорема 7.** Для того чтобы система (4), (5) скалярных уравнений была сильно асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$1) a_{12}a_{21} = 0; \quad 2) |a_{22}| < 1, a_{11} < 0.$$

**Теорема 8.** Для того чтобы система (4), (5) скалярных уравнений была  $(\alpha, \gamma)$ -устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$1) a_{12}a_{21} = 0; \quad 2) a_{11} \leq -\alpha, |a_{22}| < \gamma.$$

Присоединим к системе (4), (5) регулятор, не выводящий ее за пределы заданного класса:

$$u(t, k) = Q_1x_1(t, k) + Q_2x_2(t, k), \quad (8)$$

где  $Q_1$  – матрица  $r \times n_1$ ;  $Q_2$  – матрица  $r \times n_2$ .

Систему (4), (5) назовем стабилизируемой (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (8), если найдутся такие матрицы  $Q_1, Q_2$  из (14), что замкнутая система (4), (5), (8) является сильно асимптотически устойчивой. Можно показать, что верны следующие утверждения о возможности стабилизации системы (4), (5) в скалярном случае.

**Теорема 9.** Для того чтобы система (4), (5) в скалярном случае была стабилизируема (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (8), достаточно выполнения хотя бы одного из условий:

$$1) \left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < 1; \quad 2) a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0.$$

**Теорема 10.** Для того чтобы система (4), (5) в скалярном случае была стабилизируема (в смысле  $(\alpha, \gamma)$ -устойчивости) регулятором (8), достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$1) \left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < \gamma; \quad 2) a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} \leq -\alpha.$$

**Закключение.** В работе проведен анализ результатов по задачам теории управления для некоторых классов гибридных систем, в частности, по относительной управляемости и достижимости, а также стабилизации дискретно-непрерывных систем. Исследованы возможности стабилизации линейной гибридной 2D-системы в симметрической форме. Представлены достаточные условия стабилизируемости системы регулятором, не выводящим систему за пределы заданного класса.

## Литература

1. De la Sen M. A note about total stability of a class of hybrid systems // Informatica. 2006. Vol. 17, no. 4. P. 565–576.
2. Van der Schaft A., Schumacher H. An introduction to hybrid dynamical systems. Berlin: Springer, 2000. 324 p.
3. Ахундов А. А. Управляемость линейных гибридных систем // Управляемые системы: сб. ст. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1975. Вып. 14. С. 4–10.
4. Точилин П. А., Куржанский А. Б. Задачи достижимости и синтеза управлений для гибридных систем. М.: МГУ, 2008. 176 с.

5. Марченко В. М., Пыжкова О. Н. Относительная управляемость линейных стационарных гибридных систем с многомерным временем // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. 2008. Вып. XVI. С. 3–5.

6. Марченко В. М., Пыжкова О. Н. Относительная достижимость линейных стационарных систем, управляемых дискретным регулятором // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 11–13.

7. Марченко В. М., Борковская И. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 7–10.

8. Марченко В. М., Борковская И. М., Пыжкова О. Н. Устойчивость гибридных динамических систем с многомерным временем // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 5–9.

9. Борковская И. М., Пыжкова О. Н. О стабилизации некоторых видов гибридных динамических систем // Труды БГТУ. 2017. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 5–10.

### References

1. De la Sen M. A note about total stability of a class of hybrid systems. *Informatica*, 2006, vol. 17, no. 4, pp. 565–576.

2. Van der Schaft A., Schumacher H. An introduction to hybrid dynamical systems. Berlin, Springer, 2000. 324 p.

3. Akhundov A. A. Controllability of the linear hybrid systems. *Upravlyaemye sistemy: sbornik statey* [Controlled systems: digest of articles]. Novosibirsk, Institut matematiki Publ., 1975, pp. 4–10 (In Russian).

4. Tochilin P. A., Kurzhanский A. B. *Zadachi dostizhimosti i sinteza upravleniy dlya gibridnykh sistem* [The tasks of reachability and control synthesis for hybrid systems]. Moscow, MGU Publ., 2008. 176 p.

5. Marchenko V. M., Pyzhkova O. N. Relative controllability of the linear stationary hybrid systems with multidimensional time. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physics and Mathematics. Informatics, 2008, issue XVI, pp. 3–5 (In Russian).

6. Marchenko V. M., Pyzhkova O. N. Relative reachability of the linear stationary hybrid systems controlled by the discrete regulator. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 11–13 (In Russian).

7. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M. Stability and stabilization of the linear hybrid discrete-continuous stationary systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 7–10 (In Russian).

8. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N. The stability of hybrid dynamic 2-D-systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 5–9 (In Russian).

9. Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N. On the stabilization of some kinds of hybrid dynamic systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2017, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 5–10 (In Russian).

### Информация об авторах

**Борковская Инна Мечиславовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: borkovskaia@gmail.com

**Пыжкова Ольга Николаевна** – кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olga.pyzhkova@gmail.com

### Information about the authors

**Borkovskaya Inna Mechislavovna** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: borkovskaia@gmail.com

**Pyzhkova Olga Nikolaevna** – PhD (Physics and Mathematics), Head of the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olga.pyzhkova@gmail.com

Поступила 10.05.2018

УДК 517.987.1

**С. В. Пономарева<sup>1</sup>, О. Н. Пыжкова<sup>2</sup>, Л. Д. Яроцкая<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Белорусский государственный университет<sup>2</sup>Белорусский государственный технологический университет**К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ  
СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ  
НА МНОГОМЕРНОЙ ПИРАМИДАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

Рассматриваются уравнения первого рода со степенно-логарифмическими ядрами с действительными степенями логарифмов в пространстве абсолютно непрерывных на ограниченной пирамидальной области функций. К таким уравнениям приводят задачи как из некоторых разделов математики, в частности дифференциальных уравнений, так и из физики, механики и других естественных наук. При этом проблема обращения с точки зрения приложений является одной из центральных. С этой проблемой тесно связана задача получения условий разрешимости рассматриваемых уравнений в различных пространствах.

Ограничимся в данной работе случаем абсолютной непрерывности весовой функции и значениями параметра на промежутке  $0 < \alpha < 1$  ( $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ). Решение подобного уравнения с целыми степенями логарифма было представлено в работе [1], но с использованием производной от выражения, содержащего интеграл от свободного члена с функцией Вольтерра в ядре. Там же была предложена идея решения уравнения с действительной степенью логарифма. В публикации [2] были анонсированы достаточные условия разрешимости рассматриваемого уравнения в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций и представлен другой вид решения в терминах правой части (одномерный случай). Данная работа является продолжением исследования задачи в этом направлении и расширяет результаты [2] на случай многомерной пирамидальной области. Уравнение решается методами дробного интегрирования с использованием обобщения на многомерную пирамидальную область классических интегралов Римана – Лиувилля, специальных функций Вольтерра и операторов типа свертки. Теория дробных интегралов и методика их применения к решению различного рода прикладных задач достаточно полно описана в работах [1] и [3].

**Ключевые слова:** интегральное уравнение, уравнения со степенно-логарифмическими ядрами, интегральный оператор типа свертки.

**S. V. Ponomareva<sup>1</sup>, O. N. Pyzhkova<sup>2</sup>, L. D. Yarotskaya<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Belarusian State University<sup>2</sup>Belarusian State Technological University**TO THE QUESTION ON THE SOLVABILITY OF EQUATIONS  
WITH POWER-LOGARITHMIC KERNELS  
ON A MULTIDIMENSIONAL PYRAMIDAL DOMAIN**

We consider equations of the first kind with power-logarithmic kernels with real powers of logarithms in the space of absolutely continuous functions on a bounded pyramidal domain. Such equations are caused by the problems from certain sections of mathematics, in particular, from differential equations, and from physics, mechanics, and other natural sciences. At the same time, the problem of addressing from the point of view of applications is one of the central ones. The problem of obtaining conditions for the solvability of the equations in different spaces is closely related to this problem.

We confine ourselves in this paper to the case of absolute continuity of the weight function and the values of the parameter on the interval  $0 < \alpha < 1$  ( $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ). The solution of such an equation with integer powers of the logarithm was presented in [1], but using the derivative of the expression containing the integral of the free term with the Volterra function in the nucleus. In the same place, the idea of solving an equation with real power of the logarithm was proposed. In [2], sufficient conditions were stated for the solvability of the equation in the space of functions that are absolutely continuous on the interval and another solution is presented in terms of the right-hand side (one-dimensional case). This paper is a continuation of the investigation of the problem in this direction and extends the results of [2] to the case of a multidimensional pyramidal region. The equation is solved by fractional integration methods using generalization to the multidimensional pyramidal region of classical Riemann – Liouville integrals, special Volterra functions, and convolution type operators. The theory of fractional integrals and the method of their application to the solution of various kinds of applied problems are sufficiently described in [1] and [3].

**Key words:** integral equation, equation with power-logarithmic kernels, operator of convolution type.

**Введение.** Решение интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами с целыми степенями логарифмов в пространствах интегрируемых и непрерывных на конечном отрезке действительной прямой функций исследовалось в монографии [1], другой вид решения и достаточные условия разрешимости в тех же пространствах были получены в публикации [2]. Основной техникой решения подобных уравнений является использование методов дробного интегрирования и дифференцирования. В работе [1] был предложен метод решения уравнений с действительными степенями логарифмов, однако не было получено условий разрешимости этого уравнения в определенных пространствах функций, при которых решение может выражаться в терминах правой части исходного уравнения. Для решения указанной задачи понадобилось исследование некоторых интегральных операторов в определенных функциональных пространствах.

**Предварительные сведения.** Пусть  $R^n$  –  $n$ -мерное Евклидово пространство. Для  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$  и  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in R^n$  обозначим через  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{k=1}^n x_k t_k$  их скалярное произведение; в частности для  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$   $\mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = \sum_{k=1}^n x_k$ . Пусть  $d\mathbf{x} = dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n$ , а  $\mathbf{x} > \mathbf{t}$ , значит,  $x_1 > t_1, \dots, x_n > t_n$ .

Пусть  $R_+^n = \{x \in R^n : x > 0\}$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in N_0^n$ , ( $k_i \in N_0, i = 1, \dots, n$ ) – мультииндекс с  $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_n$ . Для  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\mathbf{k} \in N_0^n$ ,  $\mathbf{D} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$  и  $\alpha \in R_+^n$  положим:

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n};$$

$$\mathbf{D}^{|\mathbf{k}|} = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{\partial x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \partial x_n^{k_n}};$$

$$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1) \cdot \dots \cdot \Gamma(\alpha_n),$$

где  $\Gamma(z)$  – гамма-функция Эйлера.

Пусть  $\mathbf{A} = \|a_{jk}\|$  ( $a_{jk} \in R$ ) – матрица порядка  $n \times n$  с определителем  $|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} \neq 0$ , вектор-строки которой обозначим через  $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ , а элементы обратной матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$  обозначим  $\tilde{a}_{jk}$ . Без ограничения общности положим  $|\mathbf{A}| = 1$ . Пусть еще

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}, \dots, \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x});$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})^\alpha = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x})^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x})^{\alpha_n};$$

$$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in R^n, \quad \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in R^n;$$

$$-\infty < b_j, c_j < \infty,$$

где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

**Основная часть.** Рассмотрим уравнения

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{c,r}(x)} c(\mathbf{x}-\mathbf{t})(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{\mathbf{x}-\mathbf{t}} \phi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f(\mathbf{x});$$

$$\mathbf{x} \in A_{c,r}(\mathbf{b}), \quad \mathbf{0} < \alpha < \mathbf{1} \quad (1)$$

со степенно-логарифмическими ядрами по  $n$ -мерной пирамидальной области:

$$A_{c,r}(\mathbf{b}) = \{ \mathbf{t} \in R^n : \mathbf{A} \cdot (\mathbf{b}-\mathbf{t}) \geq 0, \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{t} + r \geq 0 \}$$

в  $R^n$  с вершиной в точке  $\mathbf{b}$ , основанием на гиперплоскости  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{t} + r = 0$  и с боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях  $\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{b}-\mathbf{t}) = 0, j = 1, \dots, n$  в предположении абсолютной непрерывности функции  $c(x)$  и  $\mathbf{0} < \alpha < \mathbf{1}, \beta > -1$ .

В частности, когда  $\mathbf{A} = \mathbf{E} = \|\delta_{jk}\|$  – единичная матрица, а  $\mathbf{c} = \mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  и  $r = 0$ , то  $A_{c,r}(\mathbf{b})$  является простейшей модельной пирамидой вида  $E_1(\mathbf{b}) = \{ \mathbf{t} \in R^n : \mathbf{b} \geq \mathbf{t}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{1} \geq 0 \}$ .

Известно [1, лемма 28.2], что необходимым и достаточным условием непустоты пирамиды  $A_{c,r}(\mathbf{b})$  является условие  $(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} + r > 0$ .

В дальнейшем нам понадобится также формула перестановки порядка пределов интегрирования [1 (28.63)]:

$$\int_{A_{c,r}(\mathbf{b})} d\mathbf{t} \int_{A_{c,r}(\mathbf{t})} f(\mathbf{t}, \tau) d\tau = \int_{A_{c,r}(\mathbf{b})} d\tau \int_{\sigma(\mathbf{b}, \tau)} f(\mathbf{t}, \tau) d\mathbf{t},$$

где  $\sigma(\mathbf{b}, \tau) = \{ \mathbf{t} \in R^n : \mathbf{A} \cdot \tau \leq \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \leq \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} \}$ .

Заметим, что уравнение (1) можно с помощью замены переменных

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}^{-1} \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{d}} - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{c}|}; \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{c}|}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{d} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{c}, \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} = \left( \frac{y_1}{d_1}, \dots, \frac{y_n}{d_n} \right), |\mathbf{c}| = c_1 + \dots + c_n$ ,

свести к уравнению по модельной пирамидальной области:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{E_1(x)} c(\mathbf{x}-\mathbf{t})(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{\mathbf{x}-\mathbf{t}} \phi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f(\mathbf{x});$$

$$\mathbf{x} \in E_1(\mathbf{b}), \quad \mathbf{0} < \alpha < \mathbf{1}, \quad (3)$$

и поэтому в дальнейшем будем рассматривать уравнение (3) вместо (1), считая (с учетом (2)) их идентичными.

Несмотря на то, что в общем случае многомерные уравнения по пирамидальной области нельзя свести к простому повторному интегрированию, в нашем случае (классы функций, в которых это возможно, будут описаны ниже) с помощью формулы перестановки порядка интегрирования это оказывается выполнимо.

Для решения нам необходимы некоторые специальные функции и следующие обозначения, в частности:

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{x}, \sigma, \alpha) &= \prod_{k=1}^n \mu(x_k, \sigma_k, \alpha_k); \\ v(\mathbf{x}) &= \prod_{k=1}^n v(x_k) \equiv \prod_{k=1}^n \mu(x_k, 0, 0); \\ v_h(\mathbf{x}) &= \prod_{k=1}^n v_{h_k}(x_k); \\ \mu(\mathbf{x}, \sigma, \alpha) &= \mathbf{x}^\alpha \left( \ln \frac{1}{\mathbf{x}} \right)^{-1-\alpha} \times \\ &\times \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n (\sigma+1)_n}{n!} \mu(1, -\mathbf{n}-1, \alpha) \ln \left( \frac{1}{\mathbf{x}} \right)^{-n} + \right. \\ &+ O \left( \left( \ln \frac{1}{\mathbf{x}} \right)^{-N} \right) \left. \right] = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \left( \ln \frac{1}{x_1} \right)^{-\sigma_1-1} \cdots \times \\ &\times \left( \ln \frac{1}{x_n} \right)^{-\sigma_n-1} \prod_{k=1}^n \left[ \sum_{n_k=0}^{N_k-1} \frac{(-1)^{n_k} (\sigma_k+1)_{n_k}}{n_k!} \times \right. \\ &\times \mu(1, -1-n_k, \alpha_k) \ln \left( \frac{1}{x_k} \right)^{-n_k} + O \left( \left( \ln \frac{1}{x_k} \right)^{-N_k} \right) \left. \right], \end{aligned}$$

где  $\operatorname{Re} \sigma_i > -1$ ,  $\left| \arg \ln \left( \frac{1}{x_i} \right) \right| < \pi$ ,  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}, \sigma, \alpha \in \mathbf{R}^n$ .

Их определения и свойства описываются, например, в работах [1] и [4].

**Специальные классы функций.** Для многомерного пространства введем классы функций  $I_{A_{c,r}}(L_1)$ , аналогичные классам  $AC$  абсолютно непрерывных функций одномерного пространства, используя свойство абсолютно непрерывных функций быть представимыми интегралами от интегрируемых функций:

$$\begin{aligned} I_{A_{c,r}}(L_1) &= \left\{ f : f(\mathbf{x}) = \int_{A_{c,r}(b)} \phi(\mathbf{t}) d\mathbf{t}; \right. \\ &\left. \phi(\mathbf{t}) \in AC(A_{c,r}(\mathbf{b})) \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что если  $f(\mathbf{x}) \in I_{A_{c,r}}(L_1)$ , то существуют частные производные от  $f$  до порядка  $n$  включительно, и

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f(\mathbf{x}),$$

где  $\tilde{a}_{jk}$  – элементы обратной матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Аналогично классу  $AC_0[a, b]$  введем класс функций  $I_{A_{c,r}}^0(L_1)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{A_{c,r}}^0(L_1) &= \left\{ f(\mathbf{x}) \in I_{A_{c,r}}(L_1) : f(\mathbf{x})|_{c \cdot \mathbf{x} + r = 0} = \right. \\ &= \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jn} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f(\mathbf{x})|_{c \cdot \mathbf{x} + r = 0} = \cdots = \\ &= \left. \prod_{k=2}^n \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f(\mathbf{x})|_{c \cdot \mathbf{x} + r = 0} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что при  $n=1$  пространство  $I_{A_{c,r}}^0(L_1)$  совпадает с пространством  $AC_0[a, b]$  и является классом функций, представимых интегралами по пирамидальной области от своих производных.

**Интегральный оператор типа свертки.** В монографии [1] приводится формула обращения одномерного интегрального оператора типа свертки:

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha, \beta} \phi)(x) &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t} \phi(t) dt = f(x); \quad (4) \\ &a < x < b < \infty \end{aligned}$$

и условия разрешимости уравнения (4) в формулировке, приведенной в теореме 1.

**Теорема 1.** Для разрешимости уравнения (4) в пространстве  $L_p(a, b)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  необходимо и достаточно, чтобы свободный член  $f$  был представим в виде

$$f(x) = \int_a^x \mu_{\alpha, \beta}(x-t) \chi(t) dt, \quad \chi(t) \in L_p(a, b). \quad (5)$$

При выполнении этого условия решение  $\phi$  единственно и выражается формулой

$$\phi(x) = (E + T_\psi)^{-1} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\gamma} \int_a^x \mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t) f(t) dt \right), \quad (6)$$

где оператор  $(T_\psi \phi)(x) = \int_a^x \psi(x-t) \phi(t) dt$  [1, с. 487].

Сформулируем многомерный аналог этого утверждения для модельной пирамиды  $\mathbf{E}_1(\mathbf{b}) = \{ \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{b} \geq \mathbf{t}, \mathbf{t} \cdot \mathbf{1} \geq 0 \}$ . Введем аналог оператора (4).

*Теорема 2.* Для разрешимости уравнения

$$\begin{aligned} & \left( I_{E_1(x)}^{\alpha, \beta} \phi \right) (x) \equiv \\ & \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{E_1(x)} c(\mathbf{x}-\mathbf{t})(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{\mathbf{x}-\mathbf{t}} \phi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

в пространстве  $\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L}_1)$  необходимо и достаточно, чтобы свободный член  $f$  был представим в виде

$$f(\mathbf{x}) = \int_{E_1(x)} \mu_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}-\mathbf{t}) \chi(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \chi(\mathbf{t}) \in \mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L}_1). \quad (7)$$

При выполнении этого условия решение  $\phi$  единственно и выражается формулой

$$\begin{aligned} & \phi(\mathbf{x}) = \\ & = (\mathbf{E} + \mathbf{T}_\Psi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{1}{\gamma} \int_{E_1(x)} \mu_{1-\alpha, -\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right), \quad (8) \end{aligned}$$

где  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ , оператор  $(\mathbf{T}_\Psi \phi)(\mathbf{x}) =$

$$= \int_{E_1(x)} \psi(\mathbf{x}-\mathbf{t}) \phi(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

*Доказательство.* Используем формулу перестановки пределов интегрирования и принадлежность функции классу  $\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L}_1)$ . Далее будем следовать той же схеме доказательства, что и в одномерном случае [4].

Для того чтобы получить другой вид решения уравнения (3), введем обозначение по аналогии с целочисленным случаем [1, с. 483]:

$$\left( J_{\gamma, \alpha, \beta}^{E_1} f \right) (\mathbf{x}) = \frac{1}{\gamma} \int_{E_1(x)} \mu_{1-\alpha, -\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (9)$$

Для оператора  $\left( J_{\gamma, \alpha, \beta}^{E_1} f \right) (\mathbf{x})$  в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций выполняется следующая теорема.

*Теорема 3.* Пусть  $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L}_1)$ . Тогда  $\left( J_{\gamma, \alpha, \beta}^{E_1} f \right) (\mathbf{x}) \in \mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L}_1)$ .

*Доказательство.* Так как функция  $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L}_1)$ , то она представима в виде

$$f(\mathbf{x}) = \int \prod_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial t_j} \right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} + f(\mathbf{x})|_{1, \mathbf{x}=0}.$$

Подставляя это выражение в (9), осуществляя перестановку порядка интегрирования во втором слагаемом по формуле Дирихле, имеем

$$\begin{aligned} \left( J_{\gamma, \alpha, \beta}^{E_1} f \right) (\mathbf{x}) & = \frac{1}{\gamma} \int_{E_1(x)} \mu_{1-\alpha, -\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{t}) \left[ f(\mathbf{t})|_{1, \mathbf{t}=0} + \right. \\ & \left. + \int \prod_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial \tau_j} \right) f(\tau) d\tau \right] d\mathbf{t} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \frac{f(\mathbf{x})|_{1, \mathbf{x}=0}}{\gamma} \int_{E_1(x)} \mu_{1-\alpha, -\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{t}) d\mathbf{t} + \\ & + \frac{1}{\gamma} \int \prod_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial \tau_j} \right) f(\tau) d\tau \int_{E_1(x)} \mu_{1-\alpha, -\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \end{aligned}$$

В силу свойств функции  $\mu_{\alpha, \beta}$  [4, с. 230]

имеем  $|\mu_{1-\alpha, -\beta}(\mathbf{x})| \leq K$  на  $\mathbf{E}_1(\mathbf{b})$ , где

$K = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$ . Отсюда следует принадлежность

классу  $\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L}_1)$  первого слагаемого.

Для второго слагаемого снова используем оценку  $|\mu_{1-\alpha, -\beta}(\mathbf{x})| \leq K$  и ограниченность функции  $f(\mathbf{x})$  на  $\mathbf{E}_1(\mathbf{b})$ , откуда следует, что и второе слагаемое принадлежит классу  $\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L}_1)$ . Это и завершает доказательство теоремы.

*Следствие.* Оператор  $J_{\gamma, \alpha, \beta}^{E_1} f$  ограничен в пространстве  $\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L}_1)$ .

*Лемма 4.* Пусть функция  $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L}_1)$ . Тогда она может быть представлена в виде

$$f(\mathbf{x}) = \int_{E_1(x)} \mu_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}-\mathbf{t}) \chi(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \chi(\mathbf{t}) \in \mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L}_1). \quad (10)$$

*Доказательство.* Для доказательства используется представление, отраженное в работе [1, с. 487], а в качестве функции  $\chi(\mathbf{t}) \in \mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L}_1)$  можно взять  $\chi(\mathbf{t}) = (\mathbf{E} + \mathbf{T}_\Psi)(\phi(\mathbf{t}))$ .

Далее рассматриваем пространство функций  $\mathbf{I}_{E_1}^0(\mathbf{L}_1)$ .

*Теорема 5.* Пусть  $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{I}_{E_1}^0(\mathbf{L}_1)$ . Тогда  $\left( J_{\gamma, \alpha, \beta}^{E_1} f \right) (\mathbf{x}) \in \mathbf{I}_{E_1}^0(\mathbf{L}_1)$ , при этом

$$\prod_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left( J_{\gamma, \alpha, \beta}^{E_1} f \right) = J_{\gamma, \alpha, \beta}^{E_1} \left( \prod_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f \right).$$

*Доказательство.* По аналогии с доказательством теоремы 2, используя формулу изменения порядка интегрирования, учитывая свойства функции  $\mu_{\alpha, \beta}$  и принадлежность функции  $f(\mathbf{x})$  классу  $\mathbf{I}_{E_1}^0(\mathbf{L}_1)$ , получим требуемое представление.

*Достаточные условия разрешимости уравнения (3).* И наконец, сформулируем следующую теорему, дающую достаточные условия разрешимости уравнения (3) и другую форму его решения.

*Теорема 6.* Пусть  $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{I}_{E_1}^0(\mathbf{L}_1)$ . Тогда уравнение (3) разрешимо в  $\mathbf{I}_{E_1}(\mathbf{L}_1)$  и его единственное решение дается формулой

$$\begin{aligned} & \phi(\mathbf{x}) = \\ & = (\mathbf{E} + \mathbf{T}_\Psi)^{-1} J_{\gamma, \alpha, \beta}^{E_1} \left( \prod_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f \right) (\mathbf{x}). \quad (11) \end{aligned}$$

**Доказательство.** Согласно лемме 4, функция  $f(x)$  представима в виде выражения (10), а значит, по теореме 2 уравнение (3) разрешимо в  $I_{E_1}(\mathbf{L}_1)$  и его единственное решение может быть представлено в виде уравнения (8). Далее, используя теорему 5, обозначение (9) и [1, теорема 32.2], получим

$$\varphi(\mathbf{x}) = (E + \mathbf{T}_\Psi)^{-1} \prod_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) (J_{\gamma, \alpha, \beta}^{E_1} f) =$$

$$= (E + \mathbf{T}_\Psi)^{-1} J_{\gamma, \alpha, \beta}^{E_1} \left( \prod_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f \right) (x),$$

что равносильно формуле (11).

**Заключение.** Получены достаточные условия разрешимости уравнений со степенно-логарифмическими ядрами с действительной степенью логарифма в пространстве абсолютно непрерывных на ограниченной пирамидальной области функций; дано решение рассматриваемых уравнений в терминах правой части.

### Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. Пономарева С. В., Пыжкова О. Н. Достаточные условия разрешимости уравнений со степенно-логарифмическими ядрами с действительной степенью логарифма // Труды БГТУ. 2017. № 2 (200): Физ.-мат. науки и информатика. С. 11–14.
3. Килбас А. А. Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка. Самара: СГУ, 2009. 121 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. М.: Наука, 1965–1967. Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции. 1967. 299 с.

### References

1. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integrals i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk: Nauka i tekhnika Publ., 1987. 688 p.
2. Ponomareva S. V., Pyzhkova O. N. Sufficient conditions for the solvability of equations with power-logarithmic kernels with the real power of the logarithm. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2017, no. 2: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 11–14 (In Russian).
3. Kilbas A. A. *Teoriya i prilozheniya differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka* [Theory and applications of fractional differential equations]. Samara: SGU Publ., 2009. 121 p.
4. Beytmen G., Erdeyi A. *Vysshie transsendentnye funktsii: v 3 tomakh* [Higher transcendental functions: in 3 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1965–1967, vol. 3: Elliptic and automorphic functions, 1967. 299 p.

### Информация об авторах

**Пономарева Светлана Владимировна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики и информатики. Белорусский государственный университет (220050, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: demyanko@bsu.by

**Пыжкова Ольга Николаевна** – кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olga.pyzhkova@gmail.com

**Яроцкая Людмила Дмитриевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yarockaya@belstu.by

### Information about the authors

**Ponomareva Svetlana Vladamirovna** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of General Mathematics and Informatics. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: demyanko@bsu.by

**Pyzhkova Olga Nikolaevna** – PhD (Physics and Mathematics), Head of the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olga.pyzhkova@gmail.com

**Yarotskaya Lyudmila Dmitrievna** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yarockaya@belstu.by

Поступила 25.04.2018

УДК 621.373.826+544.53+517.912

**В. А. Савва**

Белорусский государственный технологический университет

**ЛАЗЕРЫ, СЕЛЕКТИВНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ МОЛЕКУЛ  
И УПРАВЛЕНИЕ ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКЦИЯМИ – ФЕМТОХИМИЯ**

Статья содержит физические принципы работы и этапы создания уникальных приборов – мазеров и лазеров, изменивших жизнь и широко используемых в разнообразных технологиях. Кратко перечислены уникальные свойства лазерного излучения, обеспечивающие его широкое применение. Большой прогресс в создании сверхкоротких лазерных импульсов позволил когерентно и селективно возбуждать молекулы, создавая в них особые когерентные состояния, осуществлять управление химическими реакциями и открыл путь к созданию квантовых компьютеров. С применением сверхкоротких лазерных и электронных импульсов удалось «увидеть» в деталях ход химических реакций. В статье представлен метод построения точного решения уравнений когерентной динамики молекул (многоуровневых квантовых систем), использующий преобразование и спектры Фурье, ортогональные полиномы дискретной переменной в Фурье-пространстве, статистические функции распределения вероятностей. Показано, что решение сложных проблем требует специалистов с широким арсеналом знаний и методов из различных областей науки.

Предназначена для преподавателей и всех, кто использует лазеры в технологиях, для студентов, желающих расширить сведения о разных разделах знаний, для тех, кто понимает современную потребность не только быть высококвалифицированным специалистом, но и иметь широкий научный кругозор, ибо крупные достижения возникают на стыке наук, на границах наук и технологий.

**Ключевые слова:** вынужденное испускание, мазер, лазер, фемтохимия, когерентная динамика возбуждения квантовых систем, точные решения, ортогональные полиномы в пространствах Фурье.

**V. A. Savva**

Belarusian State Technological University

**LASERS, SELECTIVE EXCITATION OF ATOMS AND MOLECULES  
AND CONTROL OF CHEMICAL REACTIONS – FEMTOCHEMISTRY**

The article contains physical principles of work and stages of creating unique sources of coherent radiation (masers and lasers). They have changed life and are used in diverse technologies widely. This paper contains description of the unique properties of laser radiation which provided its various applications. Great progress in the creation of ultrashort laser pulses made it possible to excite molecules coherently and selectively, creating special coherent states in them to control chemical reactions and opened the way to the creation of quantum computers. The method described allowed one "to see" the dynamics of chemical reactions in details with the use of laser and electronic pulses. Also a new way of construction of exact solution of coherent dynamics equations is stated for multilevel quantum systems. It uses the Fourier transform and spectra, orthogonal polynomials of a discrete variable in Fourier space, and statistical distribution functions. The examples show that the solution of complex problems requires specialists with a wide range of knowledge and methods from different fields of science.

For teachers and all those who use lasers and chemical reactions in technologies, for students wanting to expand knowledge, for those who understand the modern need to be not only a narrow specialist, but also to be more open minded, because major achievements occur at the intersection of fields of science, at the boundaries of science and technologies.

**Key words:** stimulated emission, maser, laser, femtochemistry, coherent dynamics of excitation of quantum systems, exact solutions, orthogonal polynomials in a Fourier space.

**Введение.** Свет – электромагнитное излучение оптического диапазона, играет огромную роль в природе и в жизни. Мы видим мир благодаря способности воспринимать свет. До создания лазера *световая волна* была разве что в учебниках, но не в природе, не в устройствах, созданных человеком. Костер, свеча, лампа (накаливания, люминесцентная) – это *шумовые*

*источники света.* Причина в том, что физический процесс производства света в них – *спонтанное испускание* оптического излучения. Это статистический (случайный, шумовой) процесс. В лазере «работает» иной процесс создания света – *вынужденное испускание* излучения. Существование его было предсказано А. Эйнштейном в 1917 г., экспериментально



подтверждено примерно через 30 лет и в 1960 г. впервые реализовано в оптическом диапазоне в устройстве, которое называют *лазер*.

**Новый тип генераторов электромагнитного излучения сверхвысоких радиочастот и света – мазеры и лазеры.** Название LASER происходит от первых букв фразы: Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation – усиление света посредством вынужденного испускания излучения.

Человек долго шел к постижению сущности спонтанного и вынужденного испускания, того, что представляет собой свет, как его использовать. Линзы, очки, микроскоп, телескоп известны давно. Сначала люди поняли электрические и магнитные явления, установили их тесную связь, когда они изменяются во времени. Майкл Фарадей открыл закон электромагнитной индукции, что позволило создать электрогенераторы и электромоторы, а также привело к формированию цивилизации нового уровня. Дж. Максвелл сформулировал знаменитые уравнения, предсказал существование электромагнитного излучения, показал, что это волновой процесс, причем электромагнитные волны обладают огромной скоростью и в отличие от звуковых волн могут распространяться в пустоте.

Генрих Герц создал первое в мире устройство (вibrator, колебательный контур), производящее электромагнитное излучение – радиоволны. Максвелл предположил, что свет такое же излучение, только очень малых длин волн и высоких частот. Радиодиапазон осваивался многие десятилетия: радио, телевидение, радиотелескопы. Были разработаны методы модуляции радиоволн, на них записывают речь, музыку, изображение. Пришло понимание, что диапазон этого излучения огромен, простирается от километровых радиоволн к волнам все меньших длин и более высоким частот. В этом гигантском диапазоне есть «узенькое окошко» – такие волны и есть свет, который мы способны видеть! Природа скупой одарила нас способностью непосредственно ощущать лишь «крохотный кусочек» электромагнитного диапазона. Но она не поскупилась, дав человеку уникальный интеллект, способный развиваться, совершенствоваться, обучаться, не только ощущать явления природы, но и познавать их сущность. Человек создал огромную разветвленную систему образования, мощную науку и художественную культуру. Много веков он идет этим трудным путем, все убыстряющимся темпом, не утрачивая любопытства познавать мир Природы, постигать тайны Вселенной, жизни, себя самого, искать ответы на вопросы: зачем он здесь, в чем смысл его жизни и деяний. Стрем-

ление человека познать все возможное, продвигаться вглубь и вширь побудило перейти от генерации радиоволн в оптическую область и далее к рентгеновскому и гамма-излучению.

Важным достижением на этом пути было освоение СВЧ (сверхвысоких частот), т. е. микроволнового (по-английски) излучения. Это волны сантиметрового диапазона. Далее стало ясно, что продвигаться в сторону малых длин волн с колебательным контуром, пластинами и проволочками, с радиолампами и потоком электронов в них, с резонаторами в виде металлических коробочек уже невозможно. Нужен иной принцип. И родилась новая идея: генераторами могут быть сами *атомы и молекулы* – квантовые объекты. Их описывает квантовая физика. Они хорошо излучают свет в широком диапазоне частот, правда, это шумовое излучение. Как заставить их испускать короткие радио- и световые когерентные волны? Так возникла идея квантовой радиофизики (теперь почти забытый термин), или квантовой электроники. Радиофизики «вспомнили», что Альберт Эйнштейн в работе 1917 г. предсказал существование иного процесса излучения света квантовыми системами – *вынужденное испускание*. Но как его реализовать, сделать доминирующим? Оно почти не наблюдается в оптической области, где господствует спонтанное испускание света. В радиодиапазоне спонтанное испускание ничтожно, но при переходе к более высоким частотам оно резко растет, пропорционально кубу частоты! Как сделать, чтобы вынужденное испускание усилило затравочные шумы с помощью обратной связи – резонатора, как в радиофизике, и создавало бы когерентную волну? И такой способ был найден и осуществлен!

**Мазер – молекулярный/атомный генератор излучения ультракоротких длин радиоволн, работающий на новом принципе.** Этот принцип генерации электромагнитных волн малых длин порядка 1 см осуществлен был в 1954 г., когда одновременно в СССР и США появились первые МАЗЕРЫ – генераторы микроволнового (сверхвысокочастотного) излучения сантиметрового диапазона. Это еще не свет, но настоящая, не шумовая волна. Мазер – первый в мире квантовый генератор, где волну создают молекулы, объекты квантовой физики. Это принципиальная новизна. Второе новшество, воплощенное в устройстве, в том, что физический процесс создания света не спонтанное, а вынужденное испускание, чего не было в атомной физике и оптике. Первые квантовые генераторы, мазеры, были созданы в США и СССР, работают они на пучке молекул аммиака. Осуществили их независимо Ч. Таунс (Колум-

бийский университет), а также А. М. Прохоров и Н. Г. Басов (Физический институт АН СССР).

Название генератора MASER – МАЗЕР складывается из первых букв английской фразы, точно описывающей существо дела, – Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation – усилитель микроволнового излучения посредством процесса вынужденного испускания. Название указывает спектральный диапазон излучения, физическое явление, лежащее в основе его работы, и основное свойство любого генератора – усиливать затравочные шумы, превращая их в когерентную волну благодаря обратной связи.

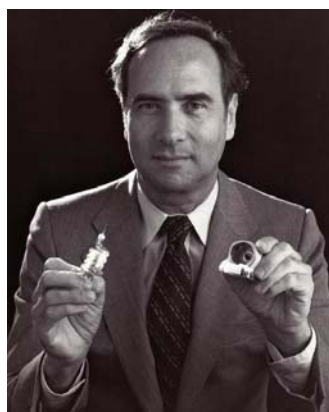
В 1960 г. был создан мазер на пучке летящих атомов водорода  $H$ ,  $\lambda \approx 21$  см. За реализацию нового принципа генерации, позволившего создавать когерентную волну излучения высоких частот, упомянутые физики были удостоены Нобелевской премии в 1964 г. Мазеры широко используются в космической связи, они позволили создать сверхточные атомные часы, обеспечить работу навигаторов (GPS, ГЛОНАСС) при движении автомобилей на земле. Они определяют положения спутников и кораблей в космосе, ракет, подводных лодок. Мазеры – это служба точного времени. Не менее важным является и то, что реализованный в них принцип работы долгие годы считали очень сложным, едва ли возможным в осуществлении. Потому мазер – великое достижение, огромный прорыв в познании природы. Он открыл путь к освоению оптического диапазона, на что были выделены огромные средства в США. Исследования велись и в СССР, и в других странах.

**Лазер – источник света нового типа.** Идея создать генератор света была весьма привлекательной, увлекла многие научные коллективы, университеты и фирмы мира, радиофизиков, электронщиков, оптиков, спектроскопистов. Возникло новое направление – квантовая электроника. И вот 16 мая 1960 г. – свершилось! В Калифорнии, США был создан первый в мире лазер на кристалле рубина, длина волны 694.3 нм. Это красный луч света. Лазер, безусловно, изменил мир, это одно из десяти самых выдающихся технологических достижений в XX в.

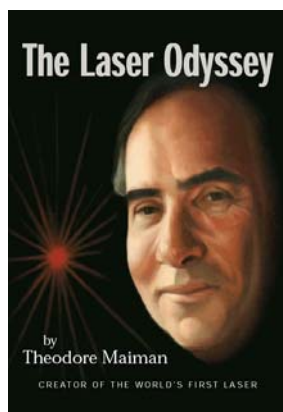
Интересен и поучителен драматический момент в этой гонке за первенство в создании лазера. На западном побережье США, где много университетов и промышленных фирм, лучшие научные школы по спектроскопии, электронике, оптике, обладающие гигантским финансированием, стремились создать лазер. На восточном побережье в Калифорнии энтузиаст-одиночка Теодор Мейман, работавший в не-

большой фирме и публикующий исследования об оптических свойствах рубина, также загорелся этой идеей. Его коллеги посмеивались – включился в гонку с «гигантами». Он не сдавался, сумел достать небольшой кусочек рубина, одолжил спектрометр, сделал зеркала. И лазер заработал! Тогда фирма поняла, что это событие важное для ее престижа. В Нью-Йорке устроили презентацию. Газеты бешено отреагировали – создан «луч смерти». Т. Мейман отправил в научный журнал *Phys. Rev. Letters* статью о своем выдающемся результате и быстро получил отказ редактора опубликовать ее. Но другой знаменитый престижный журнал *Nature* незамедлительно 6 августа опубликовал статью [1]. Можно представить «разочарование» ученых с западного побережья. Вскоре и у них в Нью Джерси также был создан рубиновый лазер. Их статья тут же была опубликована 1 октября 1960 г. [2]. В ней авторы ссылаются на приоритетную статью Меймана, указывая, что «недавно он наблюдал уменьшение времени жизни и сужение линии флуоресценции рубина. Наши эксперименты расширяют эту работу и подтверждают когерентность и направленность излучения». Их образец – стержень 0.5 см в диаметре и 4.0 см длиной. Они приводят осциллограмму, показывающую динамику свечения лазера – известную пичковую генерацию. Вскоре был создан газовый лазер и другие квантовые генераторы света, работающие в видимом диапазоне. Вначале их называли оптическими мазерами. Термин лазер появился позднее и прочно закрепился. Мейман выиграл лазерную гонку, соревнуясь с ведущими научными и промышленными лабораториями и университетами восточного побережья США, ученые которого много лет пытались приуменьшить значение его достижения.

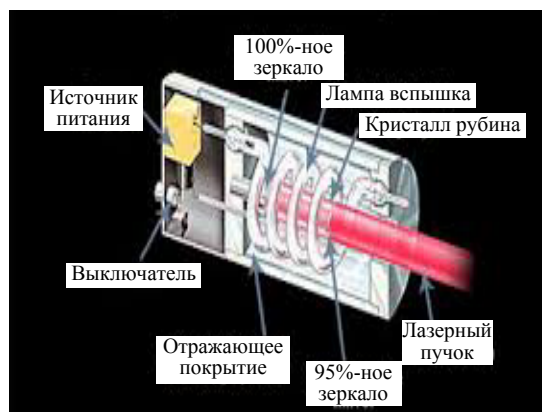
Началась новая эра невиданно быстрого развития квантовой электроники, нелинейной оптики, лазерной физики, оптики и спектроскопии, а также не менее впечатляющих применений лазера в различных видах человеческой деятельности: голография, лазерная печать, резка и сварка материалов, запись и воспроизведение звука и изображения – компакт-диски, лазерная связь, применение в химии, биологии, медицине и т. д. Многие исследователи в области лазерной физики и спектроскопии, нелинейной оптики стали лауреатами Нобелевской премии. Теодор Мейман, создавший первый в мире лазер, не был отмечен за это выдающееся достижение практически ничем (не считая японской награды). На рис. 1 представлен автор со своим прибором, компоненты его лазера и книга его воспоминаний об этом периоде деятельности.



Теодор Мейман  
(1927–2007)



Лазерная одиссея  
(2000, США, 2010, Россия)



Компоненты первого  
рубинового лазера

Рис. 1. Теодор Мейман – создатель первого в мире лазера

Новое научное направление – квантовая электроника – сформировалось осенью 1959 г. на первой Международной конференции, ее доклады опубликованы в начале 1960 г. в книге под редакцией Чарлза Таунса. Он, ее председатель, один из создателей первого в мире мазера, Нобелевский лауреат, отмечал: «Главная тема Конференции лежит на границе между двумя высокоразвитыми дисциплинами – электроникой и спектроскопией». Это направление развивалось стремительно, так что уже весной 1961 г. в США состоялась вторая Международная конференция по квантовой электронике, собравшая 450 участников – физиков со всего мира. Увесистый том в 650 страниц «Достижения в квантовой электронике» содержал ее доклады [3]. Первая часть книги «Оптические мазеры» открывалась докладом Ч. Таунса «Некоторые применения оптических и инфракрасных мазеров», а заканчивалась кратким сообщением создателя первого в мире лазера Т. Меймана – «Реализация оптического мазера на рубине». Его сообщение содержит всего 8 строк + название + автор и излагает основные факты: импульсный режим генерации, длина волны излучения 694 нм, объем рубина 1.25 см<sup>3</sup>, пиковая мощность 5 кВт, общая энергия 1 Дж, расходимость пучка 10<sup>-2</sup> рад.

Даже советская компактная и содержательная книга «Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия» 1969 г. умалчивает имя создателя первого в мире лазера: «вскоре после появления молекулярных генераторов начались работы по осуществлению принципов квантового усиления и генерации электромагнитных волн в оптическом диапазоне, которые привели в 1960 г. к созданию первого оптического лазера на рубине» [4, с. 34]. Прошло более 40 лет, и в 2003 г. один из создателей мазера Ч. Таунс в своей статье, наконец, сказал о достижении Т. Меймана «Статья Т. Меймана столь коротка

и имеет столь много действенных последствий, что в расчете на одно опубликованное слово является самой влиятельной среди всех статей, опубликованных в Nature в XX столетии» [5]. Правда, справедливость восторжествовала, и имя Т. Меймана по праву вошло в ряд блистательных ученых, создавших эту замечательную ветвь физики, где сочетались радиофизика, электроника, оптика, атомная физика – квантовая электроника. Она вошла в обширный каталог знаний, который называем теперь лазерная физика. И которая кардинально изменила жизнь человечества вместе с информационными цифровыми технологиями, биотехнологией, биофизикой. Так была поставлена точка в этой драматической истории. Что же касается Нобелевских премий по физике, литературе и премии мира, то подобное продолжается, ударяя по авторитету этого благородного Института. Так уж устроен человек с его страстями, эмоциями, амбициями... Список творцов, недооцененных современниками, велик: А. Чехов, А. Ахматова, В. С. Летохов (Россия, СССР), как и субъективно переоцененных персон. Подобное относится и к другим премиям и оценкам достижений людей в разных областях деятельности их современниками. Это и позволило А. Пушкину в одной из своих «Маленьких трагедий» вложить в уста Антонио Сальери слова: «Нет правды на земле, но правды нет и выше».

**Уникальные свойства лазерного излучения.** Как и радиоволны, лазерный свет – это когерентное электромагнитное излучение. Но оно попадает в узкое окно, дарованное нам природой для непосредственного восприятия. Не менее важна его очень малая длина волны. В табл. 1 перечислены лишь некоторые свойства лазерного излучения и его применения, обусловленные каждым из свойств. Благодаря этим свойствам открываются все новые разнообразные применения лазерного излучения.

Таблица 1

## Свойства лазерного излучения (слева) и некоторые его применения (справа)

Когерентность	Голография – запись объемного изображения Оптическая (волоконная) связь колоссальной емкости Запись и считывание информации (CD-диски, лазерная печать)
Монохроматичность (сверхузкий спектр)	Лазерное разделение изотопов Лазерная спектроскопия Селективное возбуждение молекул
Высочайшая мощность	Сварка, резка Лазерное оружие Лазерный термоядерный синтез
Малая расходимость луча	Способность сверхтонкой фокусировки Лазерное зондирование атмосферы, дальномеры Лазерная хирургия и терапия
Сверхкороткие импульсы	Исследование быстро протекающих процессов в природе (физика, химия, биология) Динамика химических реакций Селективная лазерная химия
Создание в среде состояния квантовой когерентности (суперпозиция, перепутывание)	Квантовые вычисления (квантовый компьютер) Телепортация информации Квантовая криптография

**Многовековое стремление человека покорить пространство-время: ультракороткие лазерные импульсы.** Веками шел человек к преодолению пространства и познанию времени, хотел ускорить или замедлить его ход. Хорошо известны современные проблемы, как замедлить старение, повысить производительность труда.

Потому человек от собирательства перешел к земледелию, от охоты – к животноводству, от ручного труда к мануфактурам, заводам, конвейеру, автоматическим линиям, роботам и идет далее к созданию искусственного интеллекта, т. е. к «механизации» умственной деятельности. Кратко напомним шаги к постиже-

нию и покорению пространства-времени. Это, прежде всего, способность овладевать все большими скоростями (табл. 2).

Потребность исследовать быстрые процессы в природе (физике, технике, химии, биологии) побудила физиков создать сложные технологии генерации сверхкоротких лазерных импульсов. Эти достижения перечислены в табл. 3.

Каждый шаг потребовал создания сложной, изобретательной техники. На рис. 2 представлены световые импульсы все меньшей длительности, т. е. содержащие все меньшее число периодов световой волны. В импульсе фемтосекундной длительности укладывается примерно три периода световой волны.

Таблица 2

## Достижимые скорости движения

Лошадь	10–60 км/ч
Железнодорожный транспорт	60–450 км/ч
Автомобиль	60–250 км/ч
Самолет	1000–3000 км/ч
Ракета: первая космическая скорость	$28 \cdot 10^3$ км/ч = $0.25 \cdot 10^{-4}$ с
Скорость света (мировая константа), предельная скорость в природе	$c = 3 \cdot 10^8$ м/с = $10.828 \cdot 10^8$ км/ч

Таблица 3

## Сверхкороткие лазерные импульсы и их длительность

Гигантские импульсы, 1961	Наносекунды
Пикосекундные импульсы, 1966	Пикосекунды
Субпикосекундные импульсы, 197	Доли пикосекунд
Фемтосекундные импульсы, 1987	Фемтосекунды
Аттосекундные импульсы, 2001 (это уже УФ- и рентгеновский диапазоны)	Аттосекунды

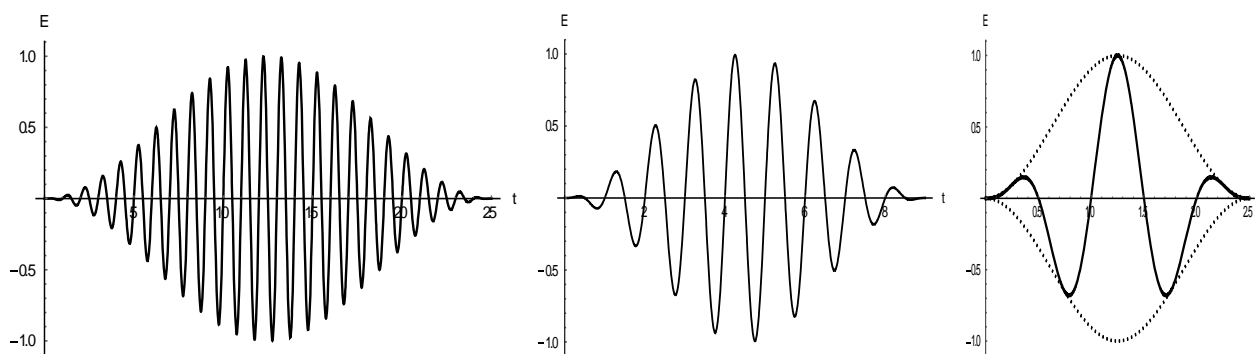
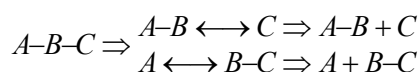


Рис. 2. Лазерные импульсы все меньших длительностей: все меньшее число периодов световых колебаний укладывается в пределах длительности импульса

**Лазерные импульсы для исследования хода химической реакции.** Идея лазерной химии возникла сразу, в 60-х годах XX в. Узкий спектр излучения, высокая мощность дают надежду селективно и быстро «раскачать» любую связь в молекуле, а не только слабейшую, как раньше. Возникла заманчивая цель – научиться управлять реакцией, получать желаемые продукты. На схеме показано, как, подбирая частоту излучения и воздействуя им на разные химические связи, можно получить различные продукты реакции:



Вскоре осознали преграду на этом пути. Энергия «вкочивается» быстро в нужную связь, но очень быстро растекается по всей молекуле,

возбуждаются иные связи, и в результате снова разрушается самая слабая связь. Стало ясно, чтобы изучить/увидеть ход самой реакции, нужны сверхкороткие лазерные импульсы. Лучшие результаты на пути их применения в химии, освоения и создания новых физических методов регистрации были достигнуты школой, основатель которой Ахмед Зевейл (США) был удостоен Нобелевской премии 1999 г. по химии «За исследование химических реакций в реальном масштабе времени с помощью фемтосекундной спектроскопии и дифракции электронов», рис. 3 [6]. Благодаря этому человек впервые смог увидеть динамику химической реакции, формирование, эволюцию, распад переходного состояния и образование продуктов. Процесс очень быстрый. Чтобы его видеть, нужны фемтосекундные импульсы.

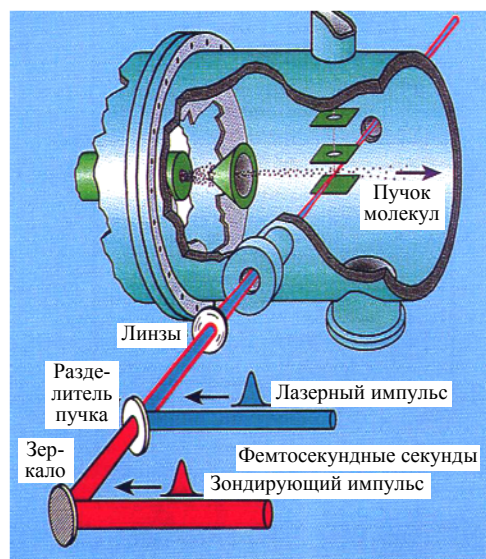
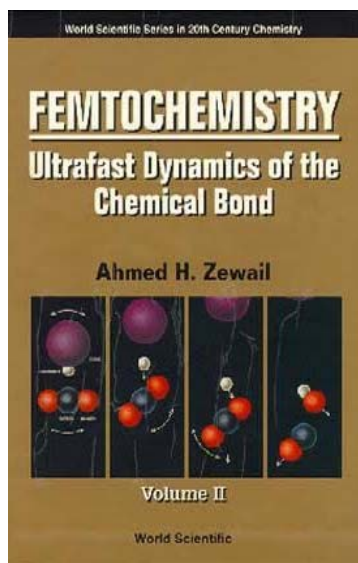
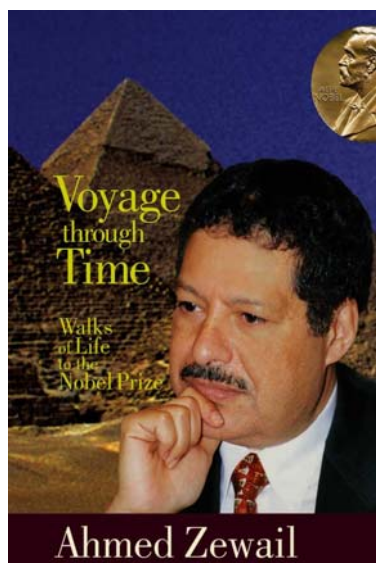


Рис. 3. Ахмед Зевейл (1946–2014).

Его книги: «Путешествие сквозь время: Жизненные дороги к Нобелевской премии» [7], «Фемтохимия: Сверхбыстрая динамика химической связи» [8] и схема установки для возбуждения молекул и исследования хода управляемой химической реакции [9]

**Ахмед Зевейл – основатель нового направления: фемтохимии.** Фемтохимия – раздел физической химии, где изучают химические реакции на коротких временных интервалах порядка фемтосекунд  $\sim 10^{-15}$  с. Это прорыв в химии, переход от кинетики к химической динамике реакций. На сложнейшей экспериментальной установке молекулярный пучок освещается двумя сверхкороткими лазерными импульсами с изменяемой задержкой. Один импульс когерентно возбуждает реагенты, другой порождает пучок электронов, сканируя движущиеся атомы. Разработана также сложнейшая техника зондирования и обработки данных. По дифракции и рассеянию электронов на атомах восстанавливаются межатомные расстояния, углы поворотов, энергия реагентов и продуктов.

Ахмет Зевейл родился в Египте, окончил университет, переехал в США и там выполнил выдающиеся физико-химические исследования. Он первый осознал, что химические реакции происходят чрезвычайно быстро, и управлять ими можно только в фемтосекундной временной шкале. Поэтому лазерная химия как управление реакциями – это *фемтохимия*. Его термин прочно закрепился в науке. А. Зевейл совершил ряд прорывов, визуализируя в реальном времени ядерное движение простых молекул, затем более сложных – белков. Большим достижением явилось то, что его научной группе удалось генерировать и использовать короткие импульсы электронов. Он осуществил сверхбыструю дифракцию электронов, основав тем самым новый физический метод – четырехмерную электронную микроскопию (в пространстве и времени) [10]. Эта работа является шедевром, ибо позволяет увидеть динамические явления в химии, биологии, науке о материалах и нанонауке. А. Зевейл основал и реализовал новые физические методы – сверхбыструю электронную сканирующую микроскопию и сверхбыструю дифракцию электронов. Мнение многих – он получил бы вторую Нобелевскую премию (по физике) за выдающиеся прорывы в электронике. «В науке и в мире наследие А. Зевейла будет длиться в течение нескольких поколений» (М. Чергуй. Швейцарский федеральный технологический институт, Лозанна. 2016 г.).

Зевейл не забыл родину. Понимая значение фундаментальной науки и образования в жизни человечества и своего народа, он осуществил свою мечту – построил Египетский университет мирового класса. При поддержке государства современный научный центр «Город науки и техники Зевейла» (Zewail City of Science and Technology) был открыт в 2011 г. в Гизе. «Если поиски человечества – это прогресс и процветание, нам нужно развивать рациональ-

ный научный подход – основу наших цивилизаций. Тогда наука и технологии станут космическим кораблем для успешных путешествий наших потомков» – А. Зевейл.

**Когерентное селективное возбуждение атомов и молекул лазерным излучением.** Лазерное излучение, обладающее высочайшей когерентностью и огромной мощностью способно быстро создать особое когерентное состояние в среде (молекуле, атоме), воздействуя на нее. Описание динамики такого процесса возбуждения сводится к решению фундаментального уравнения квантовой механики – уравнения Шредингера. Моделью молекулы служит квантовая система с заданным расположением уровней энергии и радиационными переходами между уровнями, представленная на рис. 4.

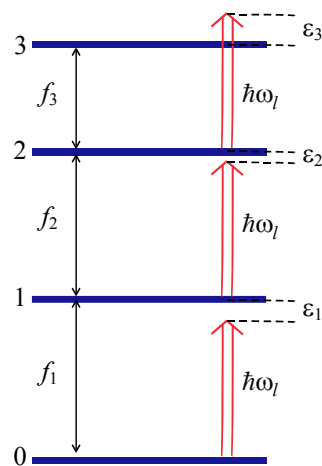


Рис. 4. Квантовая система (модель молекулы), возбуждаемая когерентным излучением, и ее характеристики

Уравнения динамики квантовой системы имеют вид:

$$-i \frac{da_n(t)}{dt} = f_{n+1} e^{-i\epsilon_{n+1}t} a_{n+1}(t) + f_n e^{+i\epsilon_n t} a_{n-1}(t);$$

$$a_n(t=0) = \delta_{n,0}; \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь все переменные и параметры безразмерны:  $a_n(t)$  – искомые комплексные функции вещественного аргумента – амплитуды вероятности обнаружить квантовую систему на уровне  $E_n$  в момент времени  $t$ ;  $\epsilon_n$  – безразмерная частотная отстройка на  $n$ -м переходе.

Связь между безразмерными величинами и физическими характеристиками системы таковы: уровни энергии  $E_n = \sum_{k=0}^n \hbar\omega_k$ , матричные элементы  $\mu_{n-1,n} = \mu_{0,1} f_n$ ,  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 1$  дипольных переходов. Излучение – прямоугольный импульс  $E_\ell \cos(\omega_\ell \tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq T$ , включается в момент

$\tau = 0$ , где  $\tau$  – время, с;  $\omega_\ell$  – частота излучения;  $E_\ell$  – амплитуда излучения. Частотные отстройки на переходах –  $\varepsilon_n = (\omega_n - \omega_\ell) / \Omega_R$ , где  $\Omega_R = \mu_{0,1} E_\ell / 2\hbar$  – частота Раби.

Особенно сложно получить точное решение такой системы  $N + 1$  уравнений, если это число, равное числу уровней, взаимодействующих с излучением, велико. Еще сложнее анализировать решения с целью поиска оптимальных условий возбуждения. Нами был разработан и осуществлен алгоритм построения точного решения этой задачи, основанный на совместном использовании ряда различных математических методов и структур [11, 12]. Это преобразование Фурье, вычисление спектров Фурье амплитуд вероятности. Доказано, что эти спектры выражаются через соответствующую систему ортогональных полиномов, определенных в непрерывном или дискретном пространстве Фурье. Установлена однозначная связь между характеристиками системы полиномов и коэффициентами уравнений динамики (т. е. характеристиками квантовой системы). С использованием известных ортогональных полиномов [13] построены точные решения для некоторых многоуровневых квантовых систем.

Кратко алгоритм построения точного решения описанных выше динамических уравнений (1) можно представить в следующем виде:

- дифференциальные уравнения;
- преобразование Фурье амплитуд вероятности;
- спектры Фурье;
- ортогональные полиномы в пространстве Фурье;
- точное решение для амплитуд вероятности;
- выражение для населенности уровней энергии квантовых систем, статистические функции распределения (дискретные, с параметром, зависящим от времени).

Приведем пример точного решения, описывающего когерентную динамику огромного семейства квантовых многоуровневых систем, спектры Фурье амплитуд вероятностей которых выражаются через ортогональные полиномы Кравчука.

**Когерентная динамика квантовых систем – осцилляторов Кравчука, возбуждаемых лазерным излучением.** Полиномы Кравчука

$$K(x; N, p); \quad n = 0, 1, \dots, N; \quad x = 0, 1, \dots, N$$

дискретной переменной  $x$  содержат два параметра –  $N, p$ . Мы трактуем полиномы как структуры, заданные в дискретном Фурье-пространстве. Они определяют спектры Фурье амплитуд вероятности  $a_n(t)$  некоторой  $N + 1$ -уровневой квантовой системы, характеризующейся коэффициентами ее динамических уравнений:

$$f_n = \sqrt{\frac{n(N+1-n)}{N}}; \quad \varepsilon_n \equiv \varepsilon = r(p-q).$$

Решение уравнений (1) ищем в виде дискретного преобразования Фурье:

$$a_n(t) = e^{i\varepsilon_n t} \sum_{\omega=0}^N \sigma(\omega) p_0 p_n(\omega) e^{ir\omega t},$$

где  $\sigma(\omega) p_0 p_n(\omega) e^{ir\omega t} = F_n(\omega)$  – дискретные спектры Фурье амплитуд  $a_n(t)$ ;  $\sigma(\omega)$  – известная весовая функция полиномов  $p_n(\omega)$ . Вычисление суммы приводит к решению для амплитуд вероятности. Приведем сразу выражение для населенностей энергетических уровней:

$$\rho_n(t) = \binom{N}{n} [1 - y(t)]^{N-n} y(t);$$

$$y(t) = \frac{1}{N} \left( \frac{2}{r} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{r}{2} t \right), \quad r = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4}{N}}.$$

Динамика такова, что населенности уровней описываются *биномиальным распределением*, параметр которого  $y(t)$  зависит от времени, числа переходов, взаимодействующих с излучением, и отстройки частоты излучения от частот квантовых переходов. Решение описывает динамику семейства  $N + 1$ -уровневых квантовых систем с эквидистантно расположенными уровнями энергии. В семейство входят: при  $N \rightarrow \infty$  гармонический осциллятор – фундаментальная базовая квантовая модель, двухуровневая (при  $N=2$ ) квантовая система – базовая модель резонансных сред в лазерной физике и нелинейной оптике, трехуровневая система с равными дипольными моментами переходов, а также многие другие многоуровневые осцилляторы Кравчука. Таким образом, две базовые модели физики – гармонический осциллятор и двухуровневая модель квантовой резонансной среды есть предельные представители семейства осцилляторов Кравчука.

Единое описание столь различных квантовых систем (с математической и физической точек зрения) стало возможным благодаря тому, что полиномы Кравчука содержат два параметра и что спектры Фурье всех этих систем описываются этими же полиномами.

В рассмотренном примере ярко проявилось, что математические структуры различных разделов математики конструктивно дополняют друг друга, согласованно «взаимодействуя» ради единой цели – решения дифференциальных уравнений, описывающих когерентную динамику квантовых систем. Это еще раз подтверждает идею, высказанную Н. Бурбаки, о глубоком внутреннем единстве разделов математики, казалось бы, не связанных друг с другом [14]. Внутреннее единство всего научного знания следует максимально

учитывать и в научных исследованиях, и в системах образования, как точного естественного, так и гуманитарного, особенно теперь.

**Заключение.** Три рассмотренных в статье примера (лазеры и мазеры; управление химической реакцией – фемтохимия; построение точного решения уравнений когерентной динамики квантовых систем) иллюстрируют не новую, но ценную мысль – результаты получаются с использованием не одного средства, метода, приема, а требуют знания нескольких различных ветвей науки. Так, освоение генерации когерентного излучения микроволнового и оптического диапазонов потребовало знаний радиофизики, электроники, спектроскопии, оптики, атомной физики. Создание фемтохимии, позволяющей «увидеть» формирование переходного комплекса, его эволюцию и распад с образованием продуктов, не только предполагало знание химической кинетики, ее разнообразных методов, но и требовало освоения ряда глубоких разделов физики – генерации сверхкоротких импульсов, электронной спектроскопии, сложнейших систем регистрации и даже

создания «четырёхмерного электронного микроскопа». При решении уравнений когерентной динамики квантовых систем были использованы разные разделы математики: не только теория дифференциальных уравнений, но и преобразование Фурье и Фурье-спектры, ортогональные полиномы непрерывной и дискретной переменной, определенные в Фурье-пространстве, и их свойства, а также знание статистических функций распределения – предмет теории вероятностей и математической статистики. Что уж говорить о задачах в области биофизики, исследования работы мозга или проблем, связанных с созданием искусственного интеллекта. Время настоятельно требует специалистов не узкоспециального профиля, но обладающих широким спектром знаний в нескольких областях. Это в равной степени относится и к научной работе, и к образованию, вузовскому и даже школьному. Образованный человек в наше время – это носитель фундаментальных глубоких и разносторонних знаний о природе и культуре.

Автор признателен Н. Н. Круку за обсуждение результатов работы и конструктивную критику.

### Литература

1. Maiman T. Stimulated Optical Radiation in Ruby // *Nature*. 1960. Vol. 187. P. 494–495.
2. Coherence, Narrowing, Directionality, and Relaxation Oscillations in the Light Emission from Ruby / R. J. Collins [et al.] // *Phys. Rev. Letters*. 1960. Vol. 5, no. 7. P. 303–307.
3. *Advances in Quantum Electronics* / Ed. by J. R. Singer. New York and London: Columbia University Press, 1961. 659 p.
4. Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия. М.: Сов. энцикл., 1969. 432 с.
5. Townes Ch. H. The first laser: 1960 “Stimulated optical radiation in ruby” by T. H. Maiman // *A Century of Nature: Twenty-One Discoveries that Changed Science and the World*. University of Chicago Press, 2003. P. 107–112.
6. Zewail Ahmed H. Femtochemistry // *J. Phys. Chem.* 1993. Vol. 97. P. 12427–12446.
7. Зевайл Ахмед Х. Путешествие сквозь время. Шаги к Нобелевской премии. М.: Нобелистика, 2004. 278 с.
8. Zewail Ahmed H. Femtochemistry. Vol. 2. Ultrafast Dynamics of the Chemical Bond. World Scientific Publ., 1994. 915 p.
9. Zewail Ahmed H. Femtochemistry. Atomic-Scale Dynamics of the Chemical Bond Using Ultrafast Lasers. Nobel Lecture. December 8, 1999 // *The Nobel Prize in Chemistry*. 1999. P. 274–367.
10. Zewail Ahmed H., Thomas J. M. 4D Electron Microscopy: Imaging in Space and Time. London: Imperial College Press, 2010. 346 p.
11. Savva Vadim A. and Zelenkov Vadim I. Integrable models for quantum media excited by laser radiation: a method, physical interpretation, and examples. arXiv:1404.1248 v1 [quant-ph] 31 Mar 2014, pp. 1–11.
12. Savva V. A. Orthogonal Polynomials in the Fourier Space for Solving Non-steady-state Quantum Problems // *Nonlinear Dynamics and Applications: Proceeding of the Twenty-first Annual Seminar NPCS*. 2014. Vol. 20. P. 187–195.
13. Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. М.: Наука, 1985. 216 с.
14. Бурбаки Н. Очерки по истории математики / пер. с фр. М.: Либроком, 2010. 296 с.

### References

1. Maiman T. Stimulated Optical Radiation in Ruby. *Nature*, 1960, vol. 187, pp. 494–495.
2. Collins R. J., Nelson D. F., Schawlow A. L., Bond W., Garrett C. G. B., Kaiser W. Coherence, Narrowing, Directionality, and Relaxation Oscillations in the Light Emission from Ruby. *Phys. Rev. Letters*, 1960, vol. 5, no. 7, pp. 303–307.



3. *Advances in Quantum Electronics*. Ed. by J. R. Singer. New York and London, Columbia University Press, 1961. 659 p.
4. *Kvantovaya elektronika. Malen'kaya entsiklopediya* [Quantum Electronics. Small encyclopedia] Moscow, Sovetskaya entsiklopediya Publ., 1969. 432 p.
5. Townes Ch. H. The first laser: 1960 “Stimulated optical radiation in ruby” by T. H. Maiman. *A Century of Nature: Twenty-One Discoveries that Changed Science and the World*. University of Chicago Press, 2003. 378 p.
6. Zewail Ahmed H. Femtochemistry. *J. Phys. Chem.*, 1993, vol. 97, pp. 12427–12446.
7. Zewail Ahmed H. *Puteshestvie skvoz' vremya. Shagi k Nobelevskoy premii* [Voyage through Time. Walks of Life to the Nobel Prize]. Moscow, Nobelistika Publ., 2003. 278 p.
8. Zewail Ahmed H. Femtochemistry. Vol. 2. Ultrafast Dynamics of the Chemical Bond. World Scientific Publ., 1994. 915 p.
9. Zewail Ahmed H. Femtochemistry. Atomic-Scale Dynamics of the Chemical Bond Using Ultrafast Lasers. Nobel Lecture. December 8, 1999. *The Nobel Prize in Chemistry*, 1999, pp. 274–367.
10. Zewail Ahmed H., Thomas J. M. 4D Electron Microscopy: Imaging in Space and Time. London, Imperial College Press, 2010. 346 p.
11. Savva Vadim A. and Zelenkov Vadim I. Integrable models for quantum media excited by laser radiation: a method, physical interpretation, and examples. arXiv:1404.1248v1 [quant-ph] 31 Mar 2014. pp. 1–11.
12. Savva V. A. Orthogonal Polynomials in the Fourier Space for Solving Non-steady-state Quantum Problems. *Nonlinear Dynamics and Applications*, 2014, vol. 20, pp. 187–195.
13. Nikiforov A. F., Suslov S. K., Uvarov V. B. *Klassicheskie ortogonal'nye polinomy diskretnoy peremennoy* [Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 216 p.
14. Bourbaki N. *Elements d'histoire des mathematiques*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1994. 301 p. (Russ. ed.: Burbaki N. *Ocherki po istorii matematiki*. Moscow, Librokom Publ., 2010. 296 p.).

#### Информация об авторе

**Савва Вадим Александрович** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: savva@belstu.by

#### Information about the author

**Savva Vadim Alexandrovich** – DSc (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: savva@belstu.by

Поступила 31.05.2018

УДК 517.2

**А. М. Волк<sup>1</sup>, А. И. Вилькоцкий<sup>1</sup>, И. И. Скорб<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет<sup>2</sup>Белорусский государственный аграрный технический университет**СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ  
ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ**

При исследовании процессов разделения жидкостей или их перемешивания, удаления осадка возникает задача моделирования совместного движения несмешивающихся жидкостей в технических конструкциях.

В данной работе рассмотрено стационарное совместное движение двух вязких несмешивающихся жидкостей в горизонтальном канале. Приведены дифференциальные уравнения течения жидкостей, определены граничные условия и найдены точные решения, позволяющие получить необходимые характеристики исследуемых процессов. Приведен пример расчета средних скоростей движения.

Полученная математическая модель может быть использована для исследования процесса перемешивания жидкостей или разделения фаз и удаления осадка в отстойниках технического назначения.

**Ключевые слова:** горизонтальный канал, вязкие жидкости, стационарное течение, уравнения движения, граничные условия, точные решения, перемешивание, расчет.

**A. M. Volk<sup>1</sup>, A. I. Wilkocki<sup>1</sup>, I. I. Skorb<sup>2</sup>**

Belarusian State Technological University

Belarusian State Agrarian Technical University

**STATIONARY MOVEMENT OF TWO IMMISCIBLE VISCOUS LIQUIDS  
IN THE RECTANGULAR CHANNEL**

When studying the processes of liquid separation or mixing, sludge removal, there is a problem of modeling the joint motion of immiscible liquids in engineering structures.

In this paper we consider the stationary joint motion of two viscous immiscible liquids in a horizontal channel. Differential equations of fluid flow are given, boundary conditions are defined and exact solutions are found, which allow to obtain the necessary characteristics of the studied processes. An example of calculation of average speeds is given.

The resulting mathematical model can be used to study the process of mixing liquids or phase separation and sediment removal in tins for technical purposes.

**Key words:** horizontal channel, viscous liquids, stationary flow, equations of motion, boundary conditions, exact solutions, mixing, calculation.

**Введение.** Актуальность теоретического исследования механики многофазных сред обусловлена их широким применением к решению практических задач: движение газожидкостных систем, течение суспензий с образованием осадка, фильтрация жидкостей в пористых средах и др.

Моделирование движения вязких жидкостей часто возникает в ситуациях, когда имеется совместное движение двух жидких сред (или жидкости и газа), контактирующих по некоторой поверхности. Пример такой ситуации – система вода – нефть [1, 2].

Гидравлический способ удаления осадка в ирригационных, водопроводных горизонтальных отстойниках и отстойниках животноводческих комплексов осуществляется в результате движения двух вязких жидкостей в каналах различной формы.

Систематическому исследованию механики многофазных сред посвящены монографии Р. И. Нигматуллина и С. Л. Соу [3, 4]. Система уравнений межфазного течения выводится на основании законов сохранения массы, импульса и энергии сплошной среды. Такими уравнениями являются уравнения Навье – Стокса. Данные уравнения точны в теоретическом плане, но практически не позволяют получить решение в общем виде, описывающее движение фаз.

Определенный интерес представляют математические модели движения несмешивающихся вязких жидкостей, имеющие точные решения.

**Основная часть.** Исследуем процесс перемешивания двух несмешивающихся жидкостей в канале прямоугольной формы. На рис. 1 и 2 представлены форма канала и его сечение соответственно.

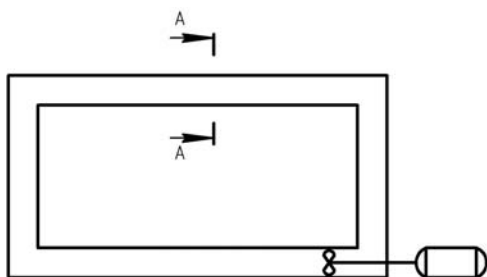


Рис. 1. Форма отстойника

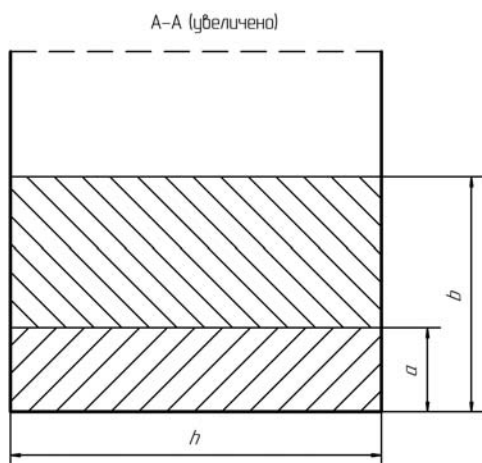


Рис. 2. Поперечное сечение канала

Рассмотрим стационарное движение двух вязких несмешивающихся жидкостей в канале прямоугольной формы (рис. 3).

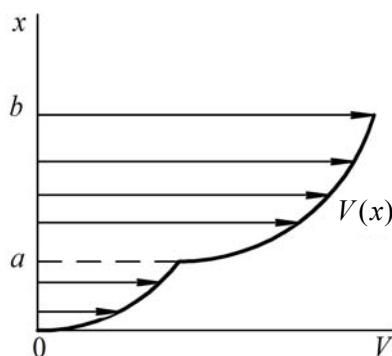


Рис. 3. Схема течения двух несмешивающихся жидкостей

Баланс количества движения для тонкого слоя вязкой жидкости в горизонтальном канале длиной  $L$  под воздействием перепада давления  $\Delta P$  приводит к следующему дифференциальному уравнению [4, 5]:

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \frac{\Delta P}{L}. \quad (1)$$

Интегрируя данное уравнение, получим:

$$d\tau_{xz} = \frac{\Delta P}{L} x + c_1. \quad (2)$$

Обозначив  $c_0 = \Delta P / L$ , получим дифференциальное уравнение для скорости:

$$-\mu \frac{dV(x)}{dx} = c_0 x + c_1, \quad (3)$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость, Н·с/м<sup>2</sup>.

Отсюда:

$$V(x) = -\frac{c_0}{2\mu} x^2 - \frac{c_1}{\mu} x + c_2. \quad (4)$$

Полученной зависимостью будем описывать движение в открытом канале нижнего и верхнего слоев жидкости соответственно, считая  $c_0, c_1, c_2, c_3$  произвольными постоянными:

$$V_1(x) = -\frac{c_0}{2\mu_1} x^2 - \frac{c_1}{\mu_1} x + c_2; \quad (5)$$

$$V_2(x) = -\frac{c_0}{2\mu_2} x^2 - \frac{c_1}{\mu_2} x + c_3. \quad (6)$$

Произвольные постоянные находим из граничных условий [5, 6].

Из условия прилипания по дну канала получим:

$$x = 0, \quad V_1(0) = 0, \quad c_2 = 0.$$

На поверхности потока отсутствуют касательные напряжения сил трения, поэтому

$$\left. \frac{dV_2(x)}{dx} \right|_{x=b} = 0, \quad -\frac{c_0}{\mu_2} b - \frac{c_1}{\mu_2} = 0, \quad c_1 = -c_0 b,$$

где  $b$  – высота заполненного канала, м.

В результате получаем зависимости для скоростей движущихся жидкостей:

$$V_1(x) = -\frac{c_0}{2\mu_1} x^2 + \frac{c_0 b}{\mu_1} x; \quad (7)$$

$$V_2(x) = -\frac{c_0}{2\mu_2} x^2 + \frac{c_0 b}{\mu_2} x + c_3. \quad (8)$$

Приравниваем скорости на границе раздела жидкостей  $V_1(a) = V_2(a)$  получим:

$$\begin{aligned} -\frac{c_0}{2\mu_1} a^2 + \frac{c_0 b}{\mu_1} a &= -\frac{c_0}{2\mu_2} a^2 + \frac{c_0 b}{\mu_2} a + c_3; \\ c_3 &= \frac{c_0 a(2b-a)}{2\mu_1} - \frac{c_0 a(2b-a)}{2\mu_2} = \\ &= \frac{c_0 a(2b-a)}{2} \left( \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

где  $a$  – высота нижнего слоя жидкости, м.

Находим средние значения скоростей в канале единичной ширины:

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= \frac{1}{a} \int_0^a V_1(x) dx = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \left( -\frac{c_0}{2\mu_1} x^2 + \frac{c_0 b}{\mu_1} x \right) dx = \\ &= \frac{1}{a} \left( -\frac{c_0 x^3}{6\mu_1} + \frac{c_0 b x^2}{2\mu_1} \right) \Big|_0^a = \\ &= \frac{1}{a} \left( -\frac{c_0 a^3}{6\mu_1} + \frac{c_0 b a^2}{2\mu_1} \right) = \frac{c_0 a(3b-a)}{6\mu_1}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_2 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b V_2(x) dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \left( -\frac{c_0}{2\mu_2} x^2 + \frac{c_0 b}{\mu_2} x + c_3 \right) dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \left( -\frac{c_0 x^3}{6\mu_2} + \frac{c_0 b x^2}{2\mu_2} + c_3 x \right) \Big|_a^b = \\ &= \frac{1}{b-a} \left( -\frac{c_0(b^3-a^3)}{6\mu_2} + \frac{c_0 b(b^2-a^2)}{2\mu_2} + c_3(b-a) \right) = \\ &= \frac{c_0(b-a)^2}{3\mu_2} + \frac{c_0 a(2b-a)}{2\mu_1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Составим условие материального баланса для канала прямоугольной формы:

$$\frac{\bar{V}_1 a h + \bar{V}_2 (b-a) h}{b h} = \frac{Q}{3600 b h}, \quad (12)$$

где  $h$  – ширина прямоугольного канала, м;  $Q$  – производительность насоса, м<sup>3</sup>/ч.

Обозначив  $q = Q / 3600$ , получим

$$\bar{V}_1 a h + \bar{V}_2 (b-a) h = q. \quad (13)$$

Из последнего уравнения определяем постоянную величину  $c_0$ , входящую в зависимости (10), (11) для средних значений скоростей несмешивающихся жидкостей, и можем рассчитать все необходимые гидродинамические характеристики исследуемого движения.

Полученные распределения скоростей верхнего и нижнего слоев вязкой жидкости дают возможность рассчитать их средние скорости, а также время, необходимое для перемешивания, при некоторой заданной производительности насоса.

Рассмотрим пример расчета. Примем следующие значения, входящие в математическую модель параметров:

$$h = 1,2 \text{ м}; a = 0,2 \text{ м}; b = 0,8 \text{ м}; Q = 200 \text{ м}^3/\text{ч};$$

$$\mu_1 = 0,030 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2; \mu_2 = 0,015 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2.$$

Для приведенных данных получаем средние скорости для нижнего и верхнего слоев жидкости:

$$\bar{V}_1 = 0,014 \text{ м}/\text{с}; \bar{V}_2 = 0,072 \text{ м}/\text{с}.$$

**Заключение.** Получены точные решения уравнений движения вязких несмешивающихся жидкостей в горизонтальных каналах. Данная математическая модель может быть использована для исследования процесса перемешивания или разделения фаз и удаления осадка в отстойниках технического назначения.

### Литература

1. Андреев В. К. Эволюция совместного движения двух вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое под действием перепада давления // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49, № 4. С. 94–107.
2. Гельперин Н. И. Основные процессы и аппараты химической технологии: в 2 кн. М.: Химия, 1981. Кн. 1. 384 с. Кн. 2. 426 с.
3. Нигматуллин Р. И. Динамика многофазных сред: в 2 ч. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с. Ч. 2. 360 с.
4. Соу С. Л. Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971. 538 с.
5. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М.: Химия, 1974. 688 с.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.

### References

1. Andreev V. K. Evolution of the joint motion of two viscous heat-conducting liquids in a flat layer under the effect of pressure drop. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2008, vol. 49, no. 4, pp. 94–107 (In Russian).
2. Gel'perin N. I. *Osnovnye protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii: v 2 knigakh* [The main processes and apparatus of chemical technology: in 2 vol.]. Moscow, Khimiya Publ., 1981. Vol. 1, 384 p. Vol. 2, 426 p.
3. Nigmatullin R. I. *Dinamika mnogofaznykh sred: v 2 chastyakh* [Dynamics of multiphase media: in 2 parts]. Moscow, Nauka Publ., 1987. Part 1, 464 p. Part 2, 360 p.
4. Sou S. L. *Gidrodinamika mnogofaznykh sistem* [Hydrodynamics of multiphase systems]. Moscow, Mir Publ., 1971. 538 p.

5. Byerd R., St'yuart W., Layftut E. *Yavleniya perenosa* [Transport phenomena]. Moscow, Khimiya Publ., 1974. 688 p.

6. Shlikhting G. *Teoriya pogramichnogo sloya* [The theory of the boundary layer]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 742 p.

#### Информация об авторах

**Волк Анатолий Матвеевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: volk@belstu.by

**Вилькоцкий Андрей Иванович** – кандидат технических наук, доцент кафедры процессов и аппаратов химических производств. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: andrzej.wilkocki@belstu.by

**Скорб Игорь Игоревич** – старший преподаватель кафедры технологий и механизации животноводства. Белорусский государственный аграрный технический университет (220023, г. Минск, пр-т Независимости, 99, Республика Беларусь). E-mail: igor.bgatu@mail.ru

#### Information about the authors

**Volk Anatoliy Matveevich** – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: volk@belstu.by

**Wilkocki Andrzej Iwanowicz** – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Processes and Apparatus for Chemical Production. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: andrzej.wilkocki@belstu.by

**Skorb Igor' Igorevich** – Senior Lecturer, the Department of Technologies and Mechanization of Livestock Breeding. Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: igor.bgatu@mail.ru

*Поступила 14.05.2018*

УДК 519.624

**И. Ф. Соловьева**

Белорусский государственный технологический университет

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО ИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ  
ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНСЛОЕМ**

В данной работе рассматривается механизм возникновения двухточечных граничных задач с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными либо внутренними переходными слоями. Задачи такого рода представлены в виде обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Пограничные слои образуются на концах заданного отрезка, т. е. вблизи граничных точек. В этих зонах наблюдается рост решений и особенно градиентов решений. Для решения подобных задач предлагается модификация метода дифференциальной ортогональной прогонки, сводящая граничную задачу к совокупности трех задач Коши. Для нейтрализации роста решений в работе предусматривается введение регулирующих множителей, стабилизирующих в зонах пограничных слоев рост решения и его градиента. В работе предложено доказательство устойчивости данного метода.

**Ключевые слова:** малый параметр, пограничный слой, двухточечные граничные задачи, сходимость, изолированность решения, устойчивость метода.

**I. F. Solov'yeva**

Belarusian State Technological University

**ON THE STABILITY OF ONE METHOD  
OF SOLVING BOUNDARY TASKS WITH THE PORTRAIT**

In this paper we consider the mechanism for the appearance of two-point boundary value problems with a small parameter at the highest derivative and with the resulting boundary or internal transition layers. Problems of this kind are represented in the form of ordinary differential equations with a small parameter with the highest derivative. Boundary layers are formed at the ends of a given segment, i.e. near the boundary points. In these zones, growth of solutions and, especially, gradients of solutions is observed. To solve such problems, we propose a modification of the differential orthogonal drift method, reducing the boundary value problem to the collection of three Cauchy problems. To neutralize the growth of solutions, the work provides for the introduction of regulating factors that stabilize the growth of the solution and its gradient in the zones of the boundary layers. In this paper, we propose a proof of the stability of this method.

**Key words:** small parameter, boundary layer, two-point boundary problems, convergence, solution isolation, stability of the method.

**Введение.** Любая математическая модель, адекватно описывающая процессы в терминах дифференциальных уравнений, обязательно включает в себя различные приближенные параметры с заданной точностью. Поэтому вопрос о характере поведения решений дифференциального уравнения при малом изменении величины одного из этих параметров представляет значительный интерес. Математическая теория дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной не потеряла своей актуальности и в наши дни. Впервые на ее прикладную сторону обратил внимание Л. Прандль в связи с развитой им в начале XX в. теорией пограничного слоя в гидродинамике. В настоящее время большой круг задач, с которыми сталкиваются физики, механики и специалисты по прикладной математике, описывается математическими моделями, в основе которых лежат обыкновенные дифференциальные урав-

нения (о. д. у.) с малым параметром при старшей производной [1]. Их природа объясняется сущностью процессов и явлений, характеризующих данные уравнения. Они требуют более детальной информации о поведении решения вблизи граничных точек.

Проследим механизм возникновения задач подобного рода.

Рассмотрим движение частицы  $m$ , закрепленной на пружине с коэффициентом жесткости  $k$  и испытывающей сопротивление среды, коэффициент вязкости которой равен  $\mu$ . На основании второго закона Ньютона придем к о. д. у. вида

$$mu'' + \mu u' + ku = 0,$$

где  $u(t)$  – смещение частицы;  $t$  – время. Если частица начинает движение без начальной скорости из состояния покоя, описываемого координатой  $u_0$ , то начальные значения будут следующие:

ми:  $u(0) = u_0$ ,  $u'(0) = 0$ . Представим, что смещение  $u(t)$  – безразмерная величина. В качестве характерной длины возьмем начальное смещение  $u_0$ , а в качестве характерного масштаба времени примем величину, обратную собственной частоте системы, т. е.  $w_0 = \sqrt{k/m}$ . Тогда уравнение с начальными условиями примет вид

$$mw_0 y'' + \mu y' + mw_0 y = 0;$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0, x > 0.$$

Здесь  $mw_0 \ll 1$ . Следовательно, данная задача – задача с малым параметром при старшей производной.

Если упругая сила описывается нелинейной функцией вида  $f = k_1 u + k_2 u^2$ , тогда мы получим уравнение с малым параметром при старшей производной вида

$$m u_0 w_0^2 y'' + \mu u_0 w_0 y' + k_1 u_0 y + k_2 u_0^2 y^2 = 0.$$

Нелинейность уравнения характеризуется величиной  $\varepsilon = \frac{k_2}{k_1} u_0$ .

**Основная часть.** Граничные задачи очень многочисленны и их постановка весьма разнообразна. В данной работе рассматриваются линейные граничные задачи с разделенными граничными условиями.

**Постановка задачи.** Пусть заданы двухточечные граничные задачи для о. д. у. второго порядка с малым параметром  $\varepsilon > 0$  при старшей производной вида

$$\begin{cases} \varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Предположим, что задача (1) имеет один, а задача (2) – два пограничных слоя.

Задачи вида (1), (2) являются математическими моделями диффузионно-конвективных процессов или родственных им физических явлений. Диффузионным является член, включающий производную второго порядка, а конвективный член включает производную первого порядка. Задачи такого вида называются сингулярно возмущенными задачами. Они неоднократно возникали в механике, физике, технике, например, при изучении релаксационных колебаний в радиотехнических приборах. В конечном итоге эти задачи превратились в самостоятельную математическую теорию изучения дифференциальных уравнений с малым

параметром при старшей производной. Их решение может быстро изменяться вблизи граничных точек, т. е. мы имеем пограничный слой. Причина трудностей решения задач с пограничным слоем заключается в неустойчивости численного процесса.

Для численного решения граничных задач вида (1), (2) с пограничным слоем предлагается метод дифференциальной ортогональной прогонки [2]. Этот метод дает возможность применить единый подход к решению граничных задач с одним и с двумя пограничными слоями.

**Алгоритм метода дифференциальной ортогональной прогонки.** Он включает следующие пункты.

1. Рассмотрим, например, граничную задачу вида (2). Представим ее в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\frac{f(x)}{\varepsilon} + \frac{b(x)}{\varepsilon} y_1, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0 \end{cases} \quad (3)$$

с граничными условиями вида

$$y_1(0) = A, \quad y_2(0) = B. \quad (4)$$

2. При решении системы о. д. у. (3), (4) используем процедуру введения множителей,  $m_2(x, \varepsilon) > 0$ ,  $m_1(x, \varepsilon) > 0$ , регулирующих поведение функций  $y(x)$  и  $y'(x)$  вблизи пограничных слоев, где, как правило, решение и особенно градиент решения неограниченно возрастают [1], что еще больше усложняет вычислительный процесс.

3. Исходную граничную задачу представляем в виде совокупности соответствующих задач Коши для функций  $\theta(x)$ ,  $u(x)$ ,  $v(x)$ .

В прямом направлении решается задача Коши для функции  $\theta(x)$  вида

$$\theta' = \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2'}{2m_2} \sin 2\theta - \left( \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} + \frac{m_1}{m_2} \right) \cos^2 \theta \quad (5)$$

с начальным условием вида

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2}$$

и задача Коши для функции  $u(x)$  вида:

$$u' = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} \right) \sin 2\theta + \frac{m_2'}{m_2} \cos^2 \theta \right] u - m_2 \frac{f}{\varepsilon} \cos \theta;$$

$$u(0) = A m_1(0, \varepsilon).$$

Вычислив значения функций  $u(x)$  и  $v(x)$  как решение задач Коши в прямом ходе метода дифференциальной ортогональной прогонки, будем находить функцию  $v(x)$  как решение задачи Коши, но уже для обратной прогонки. Начальное значение для осуществления обратной прогонки уже получено из предыдущих задач Коши, решаемых прямой прогонкой.

Для функции  $v(x)$  задача Коши решается в обратном направлении в виде:

$$v' = \left[ -\frac{m_2'}{m_2} \sin 2\theta + \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} \cos 2\theta + 2 \frac{m_1}{m_2} \times \cos^2 \theta - \frac{m_1}{m_2} \right] u + \left[ \left[ \frac{m_2'}{m_2} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} \right) \times \sin 2\theta \right] v + m_2 \frac{f}{\varepsilon} \sin \theta \right] \quad (7)$$

с начальным условием

$$v(1) = \frac{1}{\cos \theta(1)} [B - \sin \theta(1)] u(1), \quad \cos \theta(1) \neq 0.$$

В проблеме построения, исследования и реализации численного метода любых граничных задач одним из главных вопросов является устойчивость применяемого метода.

**Теорема.** Если граничная задача вида (2) с двумя пограничными слоями устойчива относительно малых изменений величин, определяющих ее, то устойчива и рассматриваемая модификация метода дифференциальной ортогональной прогонки для ее решения.

Докажем это утверждение.

Будем предполагать, что

$$\Delta = \alpha_2 \cos \theta(1) - \beta_2 \sin \theta(1) \neq 0.$$

В этом случае рассматриваемая задача имеет единственное решение, вычисляемое по схеме метода дифференциальной ортогональной прогонки (5)–(7). При этом порядок роста функций  $u(x)$  и  $v(x)$  по отношению к функциям  $m_1(x, \varepsilon) y_1(x)$  и  $m_2(x, \varepsilon) y_2(x)$  определяет тождество

$$u^2(x) + v^2(x) \equiv (m_1(x, \varepsilon) y_1(x))^2 + (m_2(x, \varepsilon) y_2(x))^2,$$

указывающее на то, что порядок роста этих функций одинаков [2].

Пусть все уравнения для нахождения функций  $\theta(x)$ ,  $u(x)$ ,  $v(x)$  решаются приближенно. Тогда приближенные значения будут иметь решение  $y_1(x)$  и его градиент  $y_2(x)$ .

Будем получать приближенные значения вспомогательных функций  $\tilde{\theta}(x)$ ,  $\tilde{u}(x)$ ,  $\tilde{v}(x)$  для следующих уравнений:

1) для функции  $\tilde{\theta}(x)$ :

$$\tilde{\theta}'(x) = \frac{m_1}{m_2} + \frac{1}{2} \frac{m_2'}{m_2} \sin 2\tilde{\theta}(x) - \left( \frac{m_2 b(x)}{m_1 \varepsilon} + \frac{m_1}{m_2} \right) \cos^2 \tilde{\theta}(x) + \varepsilon_1(x)$$

с начальными условиями  $\sin \tilde{\theta}(0) = 1 + \delta_1$ ;

2) для функции  $\tilde{u}(x)$ :

$$\tilde{u}'(x) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2 b(x)}{m_1 \varepsilon} \right) \sin 2\tilde{\theta}(x) + \frac{m_2'}{m_2} \cos^2 \theta(x) \right] \tilde{u}(x) - m_2 \frac{f(x)}{\varepsilon} \cos \tilde{\theta}(x) + \varepsilon_2(x)$$

с начальными условиями вида

$$\tilde{u}(0) = A m_1(0, \varepsilon) + \delta_3;$$

3) для функции  $\tilde{v}(x)$ :

$$\tilde{v}' = \left[ -\frac{m_2'}{m_2} \sin 2\tilde{\theta}(x) + \frac{m_2 b(x)}{m_1 \varepsilon} \cos 2\tilde{\theta} + 2 \frac{m_1}{m_2} \times \cos^2 \tilde{\theta}(x) - \frac{m_1}{m_2} \right] \tilde{u}(x) + \left[ \frac{m_2'}{m_2} \sin^2 \tilde{\theta}(x) - \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2 b(x)}{m_1 \varepsilon} \right) \times \sin 2\tilde{\theta}(x) \right] v(x) + m_2 \frac{f(x)}{\varepsilon} \sin \theta(x) + \varepsilon_3(x)$$

с начальными условиями вида

$$\tilde{v}(1) = \frac{1}{\cos \theta(1)} [B - \sin \tilde{\theta}(1)] \tilde{u}(1) + \delta_4.$$

Тогда искомые приближенное решение  $\tilde{y}_1(x)$  и приближенное значение его производной  $\tilde{y}_2(x)$  представимы в следующем виде:

$$\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{m_1(x, \varepsilon)} \left[ \sin \tilde{\theta}(x) \tilde{u}(x) + \cos \tilde{\theta}(x) \tilde{v}(x) \right];$$

$$\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{m_2(x, \varepsilon)} \left[ \cos \tilde{\theta}(x) \tilde{u}(x) - \sin \tilde{\theta}(x) \tilde{v}(x) \right].$$



Можно легко убедиться, что функции  $\tilde{y}_1(x)$  и  $\tilde{y}_2(x)$  удовлетворяют системе уравнений:

$$\tilde{y}'_1(x) = \tilde{y}_2 + \varepsilon_1(x)\tilde{y}_2 + \varepsilon_2(x)\sin\tilde{\theta}(x) + \varepsilon_3(x)\cos\tilde{\theta}(x); \quad (8)$$

$$\tilde{y}'_2(x) = \frac{\tilde{b}(x)}{\varepsilon}\tilde{y}_1 - \varepsilon_1(x)\tilde{y}_1 - \frac{\tilde{f}(x)}{\varepsilon} + \varepsilon_2(x)\cos\tilde{\theta}(x) - \varepsilon_3(x)\sin\tilde{\theta}(x). \quad (9)$$

Легко просматриваются такие граничные условия:

$$(1 + \delta_1)\tilde{y}_1(0) + \delta_2\tilde{y}_2(0) = Am_1 + \delta_3; \quad (10)$$

$$\tilde{y}_1(1) = B + \delta_4 \cos\tilde{\theta}(1). \quad (11)$$

Зная, что значения  $\varepsilon_1(x)$ ,  $\varepsilon_2(x)$ ,  $\varepsilon_3(x)$  бесконечно малы на заданном отрезке  $[0; 1]$ , а  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  – малые числа, то система уравнений (8)–(9) приведет к виду:

$$\tilde{y}'_1(x) = \tilde{a}_{12}(x)\tilde{y}_2 + \tilde{w}; \quad (12)$$

$$\tilde{y}'_2(x) = \frac{\tilde{b}(x)}{\varepsilon}\tilde{y}_1 - \frac{\tilde{f}(x)}{\varepsilon}, \quad (13)$$

где  $\tilde{a}_{12}(x) = 1 + \varepsilon_1(x)$ ;  $\tilde{b}(x) = b(x) - \varepsilon_1(x)$ ;  $\tilde{f}(x)$  практически не отличается от  $f(x)$ ;

$$\tilde{w} = \varepsilon_2(x)\sin\tilde{\theta}(x) + \varepsilon_3(x)\cos\tilde{\theta}(x).$$

Малость величин  $\varepsilon_1(x)$ ,  $\varepsilon_2(x)$ ,  $\varepsilon_3(x)$  обеспечивается высоким порядком точности и устойчивостью численных методов, применяемых к решению задач Коши. Каждая задача Коши вида (5)–(7) решается по формулам известных и хорошо работающих численных методов, например, Рунге – Кутты,

Адамса, а также  $B$ -устойчивых и  $D$ -устойчивых методов [3].

Граничные условия (10)–(11) приводятся к виду:

$$\tilde{y}_1(0) = \tilde{A}, \quad \tilde{y}_1(1) = \tilde{B}, \quad (14)$$

где  $\tilde{A}, \tilde{B}$  мало отличаются от  $A, B$ .

Следовательно,  $\tilde{y}_1(x)$  и  $\tilde{y}_2(x)$  являются решением граничной задачи (12)–(14). Эта задача аппроксимирует граничную задачу (3)–(4) и, следовательно, исходную граничную задачу с пограничным слоем и малым параметром при старшей производной (2). А так как рассматриваемая граничная задача с пограничным слоем устойчива относительно малых изменений коэффициентов системы уравнений и численных коэффициентов, входящих в граничные условия, то устойчив и сам метод ее решения.

Теорема доказана.

Множители  $m_1(x, \varepsilon)$  и  $m_2(x, \varepsilon)$  регулируют поведение решения и его градиента вблизи граничных точек, стабилизируя тем самым вычислительный процесс.

Теорема об исследовании устойчивости в малом модификации метода дифференциальной ортогональной прогонки для задач с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными или внутренними переходными слоями показывает, что предложенная методика с введением регулирующих множителей позволяет решать широкие классы граничных задач с пограничным слоем [4] и при этом уменьшать или полностью нейтрализовывать те вычислительные трудности, которые присущи многим известным традиционным методикам.

### Литература

1. Соловьева И. Ф. Влияние малого параметра при старшей производной на решение граничных задач // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 15–18.
2. Соловьева И. Ф. Численное решение граничных задач с малым параметром при старшей производной // Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов: материалы Междунар. науч.-техн. конф. Минск, 22–24 окт. 2015 г. / Белорус. гос. технол. ун-т. Минск, 2015. С. 177–180.
3. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений; пер. с англ. М.: Мир, 1988. 334 с.
4. Холл Д., Уатт Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1989. 312 с.

### References

1. Solov'yeva I. F. The Influence of a Small Parameter in the Highest Derivative on the Solution of Boundary Problems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 15–18 (In Russian).
2. Solov'yeva I. F. Numerical solution of boundary value problems with a small parameter for the highest derivative. *Materialy Mezhdunarodnoy nauchnoprakticheskoy konferentsii "Avtomaticheskiiy kontrol' i avtomatizatsiya proizvodstvennykh protsessov"* [Materials of the International Scientific and Technical Conference "Automatic control and automation of production processes"]. Minsk, 2015, pp.177–180 (In Russian).

3. Dekker K., Verwer Ya. *Ustoychivost' metodov Runge-Kutty dlya zhestkikh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy* [Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1988. 334 p.

4. Holl D., Uatt D. *Sovremennye chislennye metody resheniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Modern numerical methods for solving ordinary differential equation]. Moscow, Mir Publ., 1989. 312 p.

#### **Информация об авторе**

**Соловьева Ирина Федоровна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ira1234568@tut.by

#### **Information about the author**

**Solov'yeva Irina Fedorovna** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ira1234568@tut.by

*Поступила 14.05.2018*

УДК 517.977

**А. А. Якименко**

Белорусский государственный технологический университет

**СТАБИЛИЗАЦИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА  
В ОБЩЕЦИКЛИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ**

В статье рассматривается решение задачи стабилизации в общециклическом случае для двумерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию. Дается определение задачи стабилизации для исследуемой системы. При решении задачи стабилизации используются линейные регуляторы по типу обратной связи, содержащие как линейную, так и интегральную части. Регуляторы получены в явной форме как элементарные функции параметров исходной системы и ее вектора состояния. Задача стабилизации такой системы рассматривается для случая, когда неразрешима задача модального управления.

**Ключевые слова:** системы нейтрального типа, модальное управление, стабилизация, регуляторы, обратная связь, запаздывание.

**A. A. Yakimenka**

Belarusian State Technological University

**STABILIZATION FOR ONE NEUTRAL TYPE SYSTEM  
IN GENERAL CYCLIC CASE**

The paper deals with the stabilization problem for the stationary two-dimensional dynamical system with retarded argument of neutral type with one input and one state delay in the general cyclic case. The definition of the stabilization problem for the system is given. To solve this problem we use linear regulators of feedback type, comprising both linear and integral part. The regulators are obtained in an explicit form as a basic function of the initial parameters of the system and its state vector. The problem of stabilizing such a system is considered for the case when the modal control problem is insoluble.

**Key words:** neutral type systems, modal control, stabilization, regulators, feedback control, lag.

**Введение.** Задача стабилизации является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа [1–8] решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. В силу определения задачи модального управления, если она разрешима, то система нейтрального типа будет стабилизируема. В статьях [7, 8] изучены случаи разрешимости задачи модального управления в общециклическом случае. В этой статье изучается задача стабилизации системы в общециклическом случае, которая не является модально управляемой.

**Основная часть.** Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \\ & + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A_i, i = 0, 1, 2$  – постоянные  $(2 \times 2)$ -матрицы;  $h > 0$  – постоянное запаздывание;  $b$  – не-

нулевой 2-вектор. Не ограничивая общности, считаем  $b' = [0, 1]$  («'» означает транспонирование).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$\begin{aligned} u(t) = & q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^L \sum_{j=1}^M q'_{ij} x^{(i)}(t-jh) + \\ & + \int_{-h}^0 g'(s) x(t+s) ds, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $q_{00}, q_{ij}$  – 2-векторы;  $g(s), s \in [-h, 0]$  – непрерывная 2-вектор-функция;

$$x^{(i)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^i}{dt^i} x(t), \quad x^{(0)}(t) \equiv x(t).$$

**Определение.** Система (1) стабилизируема регулятором вида (2), если найдется регулятор (2) такой, что нулевое решение замкнутой системы (1), (2) будет устойчиво по Ляпунову или асимптотически устойчиво.

Известно, что система (1) (для произвольной системы нейтрального типа данное утверждение может быть неверно) будет стабилизируемой регулятором вида (2) в том и только в том случае, когда найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой

системы (1), (2) имеет корни только с отрицательной действительной частью.

Введем (2×2)-матрицы:

$$A(\lambda) = A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h},$$

$$W(\lambda) = [A(\lambda)b, \quad b], \lambda \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим общециклический случай:

$$\det W(\lambda) = c(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}), (c \neq 0).$$

Матрица  $A(\lambda)$  в этом случае имеет следующий вид:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} & c(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}) \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где  $\beta_i$  ( $i=0, 1, 2$ ),  $\gamma_0$  – некоторые действительные числа;  $a_j(\lambda)$ ,  $j=1, 2$  – квазиполиномы:

$$a_i(\lambda) = a_{i0} + a_{i1} e^{-\lambda h} + a_{i2} \lambda e^{-\lambda h},$$

где  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ;  $i=1, 2$ ;  $j=0, 1, 2$ .

Регулятор вида (2) в частотной области будем искать в виде

$$U(\lambda) = \left( \frac{1}{c} \eta_1(\lambda) - a_1(\lambda), \quad \eta_2(\lambda) - a_2(\lambda) \right).$$

Если  $\beta_1 = 0$ , то в этом случае система (1) будет модально управляема при выполнении условия  $\gamma_0 + e^{-\beta_0 h} + \beta_0 e^{-\beta_0 h} \neq 0$ . Если  $\gamma_0 + e^{-\beta_0 h} + \beta_0 e^{-\beta_0 h} = 0$ , то число  $\lambda = \beta_0$  для любых линейных регуляторов  $\eta_1(\lambda)$ ,  $\eta_2(\lambda)$  будет корнем характеристического уравнения. Следовательно, стабилизация возможна только при выполнении условия  $\beta_0 < 0$ . Замыкая систему регулятором  $\eta_1(\lambda) = 0$ ,  $\eta_2(\lambda) = -1$ , получим устойчивое характеристическое уравнение  $(\beta_0 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$ .

Пусть  $\beta_1 \neq 0$ . Потребуем, чтобы определитель замкнутой системы был бы равен

$$\det \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} - \lambda & c(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}) \\ \frac{1}{c} \eta_1(\lambda) & \eta_2(\lambda) - \lambda \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \lambda^2 - \lambda(\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h}) + (\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} - \lambda) \eta_2(\lambda) -$$

$$- (\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}) \eta_1(\lambda) =$$

$$= \lambda^2 + p_1 \lambda + p_2, \quad p_1, p_2 > 0.$$

Выражая  $\eta_2(\lambda)$ , получим

$$\eta_2(\lambda) = \frac{(p_1 + \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h}) \lambda + p_2}{\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} - \lambda} +$$

$$+ \frac{(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}) \eta_1(\lambda)}{\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} - \lambda}. \quad (4)$$

Подберем целую функцию  $\eta_1(\lambda)$  таким образом, чтобы  $\eta_2(\lambda)$  была бы также целой функцией. Для этого необходимо, чтобы для тех  $\lambda_n \in \mathbb{C}$ , которые удовлетворяют уравнению

$$\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} - \lambda = 0, \quad (5)$$

было выполнено соотношение

$$(p_1 + \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda_n h}) \lambda_n + p_2 +$$

$$+ (\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda_n h} + \lambda_n e^{-\lambda_n h}) \eta_1(\lambda_n) = 0.$$

Отсюда, учитывая (5):  $e^{-\lambda_n h} = \frac{\lambda_n - \beta_0}{\beta_1}$ , по-

лучим

$$\left( p_1 + \beta_0 + \beta_1 \frac{\lambda_n - \beta_0}{\beta_1} \right) \lambda_n + p_2 +$$

$$+ \left( \gamma_0 + \gamma_1 \frac{\lambda_n - \beta_0}{\beta_1} + \lambda_n \frac{\lambda_n - \beta_0}{\beta_1} \right) \eta_1(\lambda_n) = 0,$$

или

$$\eta_1(\lambda_n) = -\beta_1 \frac{\lambda_n^2 + p_1 \lambda_n + p_2}{\lambda_n^2 + (\gamma_1 - \beta_0) \lambda_n + \beta_1 \gamma_0 - \beta_0 \gamma_1},$$

или

$$\eta_1(\lambda_n) = -\beta_1 \frac{\lambda_n^2 + p_1 \lambda_n + p_2}{(\lambda_n - \xi_1)(\lambda_n - \xi_2)}.$$

В публикации [7] показано, что задача модального управления разрешима в том и только в том случае, когда выполнено условие

$$\delta(\xi_i) = \beta_0 + \beta_0 e^{-\xi_i h} - \xi_i \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим возможные случаи, когда задача модального управления не имеет решения.

1)  $\delta(\xi_i) = 0$ ,  $\text{Re } \xi_i < 0$ ,  $i = 1, 2$ . В качестве  $p_1, p_2$  можно взять  $p_1 = \gamma_1 - \beta_0$ ,  $p_2 = \beta_1 \gamma_0 - \beta_0 \gamma_1$ . Тогда положим,  $\eta_1(\lambda) = -\beta_1$ . Из формулы (4) находим

$$\eta_2(\lambda) = \frac{(\gamma_1 + \beta_1 e^{-\lambda h}) \lambda + \beta_1 \gamma_0 - \beta_0 \gamma_1}{\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} - \lambda} -$$

$$- \frac{(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}) \beta_1}{\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} - \lambda} =$$

$$= \frac{\gamma_1 \lambda - \beta_0 \gamma_1 - \gamma_1 \beta_1 e^{-\lambda h}}{\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} - \lambda} = -\gamma_1.$$

Таким образом, в случае 1 система (1) стабилизируема регулятором вида (2).

2)  $\delta(\xi_1) = 0$ ,  $\xi_1 < 0$ ,  $\delta(\xi_2) \neq 0$ ,  $\xi_2 \geq 0$ . В качестве  $p_1, p_2$  можно взять  $p_1 = 1 - \xi_1$ ,  $p_2 = -\xi_1$ . Тогда

$$\begin{aligned}\eta_1(\lambda_n) &= -\beta_1 \frac{\lambda_n^2 + (1 - \xi_1)\lambda_n - \xi_1}{(\lambda_n - \xi_1)(\lambda_n - \xi_2)} = \\ &= -\beta_1 \frac{(\lambda_n - \xi_1)(\lambda_n + 1)}{(\lambda_n - \xi_1)(\lambda_n - \xi_2)} = -\beta_1 \frac{\lambda_n + 1}{\lambda_n - \xi_2} = \\ &= -\beta_1 \frac{\lambda_n - \xi_2 + \xi_2 + 1}{\lambda_n - \xi_2} = -\beta_1 - \beta_1(\xi_2 + 1) \frac{1}{\lambda_n - \xi_2}.\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что функция

$$\begin{aligned}\eta_1(\lambda) &= -\beta_1 - \beta_1(\xi_2 + 1) \frac{\delta(\xi_2) - \beta_0 - \beta_1 e^{-\lambda h} + \lambda}{\delta(\xi_2)(\lambda - \xi_2)} = \\ &= -\beta_1 - \beta_1(\xi_2 + 1) \frac{\beta_0 + \beta_1 e^{-\xi_2 h} - \xi_2 - \beta_0 - \beta_1 e^{-\lambda h} + \lambda}{\delta(\xi_2)(\lambda - \xi_2)} = \\ &= -\beta_1 - \beta_1(\xi_2 + 1) \left( \frac{1}{\delta(\xi_2)} + \frac{\beta_1}{\delta(\xi_2)} \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{\lambda - \xi_2} \right) = \\ &= -\beta_1 - \frac{\beta_1(\xi_2 + 1)}{\delta(\xi_2)} - \frac{\beta_1^2(\xi_2 + 1)}{\delta(\xi_2)} \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{\lambda - \xi_2}\end{aligned}$$

при  $\lambda = \lambda_n$ , удовлетворяющих уравнению (5), является в частотной области регулятором вида (2). Подставим полученный регулятор  $\eta_1(\lambda)$  в формулу (4). Произведя деление квазиполиномов, приходим к следующему регулятору:

$$\begin{aligned}\eta_2(\lambda) &= \xi_1 - \beta_0 - 1 + \frac{\beta_1(\xi_2 + 1)}{\delta(\xi_2)} e^{-\lambda h} + \\ &+ \frac{\beta_1(\xi_2 + 1)(\xi_1 - \beta_0)}{\delta(\xi_2)} \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{\lambda - \xi_2}.\end{aligned}$$

Таким образом, в случае 2 система (1) стабилизируема регулятором вида (2).

3)  $\delta(\xi_i) = 0$ ,  $\operatorname{Re} \xi_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ . Нетрудно проверить, что числа  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$  в этом случае для любых регуляторов вида (2) будут являться корнями характеристического уравнения замкнутой этими регуляторами системы, и, следовательно, система (1) будет не стабилизируема.

4) В случае когда  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ , система (1) модально управляема тогда и только тогда, если  $\delta(\xi) \neq 0$ . Пусть теперь  $\delta(\xi) = 0$ ,  $\xi < 0$ . Этот случай совпадает со случаем 1. Стабилизирующий регулятор можно взять тот же. Если  $\delta(\xi) = 0$ ,  $\xi \geq 0$ , то стабилизация невозможна, так как число  $\xi \geq 0$  будет корнем характеристического уравнения замкнутой системы для любых регуляторов вида (2).

**Замечание.** В полученных регуляторах требуется перейти из частотной во временную область. При этом необходимо придерживаться правил, перечисленных ниже.

1. Слагаемые вида  $\alpha \lambda^i e^{-j\lambda h} x_k(\lambda)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  в частотной области соответствуют слагаемым  $\alpha \frac{d^i x_k(t - jh)}{dt^i}$  во временной области.

2. Слагаемые вида  $\alpha \frac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{\lambda - \xi} x_k(\lambda)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda, \xi \in \mathbb{C}$  в частотной области в силу теоремы о свертке соответствуют слагаемым вида

$$\alpha \int_{-h}^0 H(t+s)H(h+s) e^{-(h+s)\xi} x_k(t+s) ds.$$

3. Слагаемые вида  $\alpha \left( \frac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi)^2} - \frac{he^{-\xi h}}{(\lambda - \xi)} \right) x_k(\lambda)$ ,

$k = 1, 2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda, \xi \in \mathbb{C}$  в частотной области в силу теоремы о свертке соответствуют слагаемым вида

$$\alpha \int_{-h}^0 H(t+s)H(h+s)(-h-s) e^{-(h+s)\xi} x_k(t+s) ds.$$

**Заключение.** В статье полностью решена задача стабилизации линейной стационарной системы с запаздыванием нейтрального типа вида (1) в общециклическом случае, когда неразрешима задача модального управления. Также в явном виде получены стабилизирующие такую систему регуляторы.

## Литература

1. Марченко В. М. О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыванием // Доклады Академии наук БССР. 1978. № 5. С. 401–404.
2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. London, Pitman Press, 1984. 362 p.
3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1967. Vol. AC-12, no. 6. P. 660–665.
4. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems // Circuits Systems Signal Process. 1986. Vol. 5, no. 1. P. 69–84.
5. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.
6. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.

7. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 25–27.

8. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае при кратных корнях // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 1 (206). С. 5–8.

### References

1. Marchenko V. M. On problem of modal control in linear systems with delay. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Reports of the BSSR Academy of Science], 1978, no. 5, pp. 401–404 (In Russian).

2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. London, Pitman Press, 1984. 362 p.

3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1967, vol. AC-12, no. 6, pp. 660–665.

4. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems. *Circuits Systems Signal Process*, 1986, vol. 5, no. 1, pp. 69–84.

5. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 3–7 (In Russian).

6. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 18–21 (In Russian).

7. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 25–27 (In Russian).

8. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case with double roots. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1, pp. 5–8 (In Russian).

### Информация об авторе

**Якименко Андрей Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

### Information about the author

**Yakimenka Andrei Aliaksandravich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила 14.05.2018

УДК 514.76

**Н. П. Можей**

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

**НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА НЕСИММЕТРИЧЕСКИХ  
ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

Цель работы – описание трехмерных несимметрических однородных пространств, допускающих нормальную связность, вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии. Объектом исследования являются несимметрические пространства и связности на них. В статье определены основные понятия – изотропно-точная пара, редуktивное пространство, каноническое разложение, симметрическое пространство, аффинная связность, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, нормальная связность. Приведено локальное описание трехмерных несимметрических однородных пространств с неразрешимой группой преобразований, допускающих нормальную связность. Локальное изучение однородных пространств равносильно исследованию пар, состоящих из алгебры Ли и ее подалгебры. Описаны в явном виде все инвариантные аффинные связности на найденных однородных пространствах, а также тензоры кривизны и кручения указанных связностей, выписаны канонические связности и естественные связности без кручения. Исследованы алгебры голономии указанных пространств и найдено, когда инвариантная связность нормальна. Результаты работы могут использоваться при исследовании многообразий, а также применяться в различных областях математики и физики, так как многие важные проблемы в этих областях связаны с исследованиями инвариантных объектов на однородных пространствах.

**Ключевые слова:** нормальная связность, симметрическое пространство, группа преобразований, алгебра голономии.

**N. P. Mozhey**

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

**NORMAL CONNECTIONS ON NON-SYMMETRIC HOMOGENEOUS SPACES**

The purpose of the work is the description of three-dimensional non-symmetric homogeneous spaces that allow normal connections together with their curvature and torsion tensors, holonomy algebras. The object of investigation – non-symmetric spaces and connections on them. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, a reductive space, a canonical decomposition, a symmetric space, an affine connection, curvature and torsion tensors, a holonomy algebra and normal connection are defined. The local description of three-dimensional non-symmetric homogeneous spaces with unsolvable Lie group of transformations, allowing normal connections, is given. The local study of homogeneous spaces is equivalent to the investigation of pairs consisting of Lie algebra and its subalgebra. All invariant affine connections on those spaces are described, curvature and torsion tensors, canonical connections and natural torsion-free connections are found. We have studied the holonomy algebras on the spaces and have found when the invariant connection is normal. The results can be used in the study of manifolds and can find application in various areas of mathematics and physics, since many fundamental problems in these areas relate to the investigation of invariant objects on homogeneous spaces.

**Key words:** normal connection, symmetric space, transformation group, holonomy algebra.

**Введение.** Теория связностей играет важную роль во многих областях математики и физики, например, калибровочные поля, лежащие в основе моделей математической физики, представляют собой компоненты локальной формы связности. Связность является нормальной, если каждый элемент группы преобразований отображает расслоение голономии в себя. Понятие нормальной связности ввел Э. Картан для риманова многообразия [1]. Исследование нормальной связности наряду с другими условиями позволяет получить далеко идущие результаты об излучаемых многообразиях (см., например, работы Яно К., Исихара Ш., Эрбахера Ж., Чена Б. и др., обзор исследований этого

направления дан в публикации [2]). Цель этой работы – описать трехмерные редуktивные несимметрические однородные пространства, допускающие нормальную связность, сами связности, их тензоры кривизны, кручения и алгебры голономии. Настоящая статья является продолжением работы автора [3] о нормальных связностях на однородных пространствах, в которой приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В данной работе также изучаются нормальные связности, но внимание сосредоточено на несимметрических однородных пространствах.

**Основные определения.** Пусть  $M$  – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа  $\bar{G}$ ,  $G = \bar{G}_x$  – стабилизатор произвольной точки  $x \in M$ . Пусть  $\bar{\mathfrak{g}}$  – алгебра Ли группы Ли  $\bar{G}$ , а  $\mathfrak{g}$  – подалгебра, соответствующая подгруппе  $G$ . Пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление  $\mathfrak{g}$ . Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к  $\mathfrak{g}$  в  $\bar{\mathfrak{g}}$ , и фактор-пространство  $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ .

Если подгруппа  $G$  связна, то однородное пространство  $\bar{G}/G$  *редуктивно* при существовании разложения  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$ ;  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ , а само разложение  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$  называется *каноническим* [4]. Если, кроме того,  $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$ , то пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  локально задает *симметрическое пространство*  $M = \bar{G}/G$ , в противном случае пространство не является симметрическим.

*Аффинной связностью* на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется отображение  $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$  такое, что его ограничение на  $\mathfrak{g}$  – изотропное представление подалгебры, а все отображение является  $\mathfrak{g}$ -инвариантным. Если пространство допускает инвариантную аффинную связность, то оно является изотропно-точным [4]. Редуктивные и симметрические пространства всегда допускают инвариантную аффинную связность.

Тензор кручения  $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$  и тензор кривизны  $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$  имеют вид

$$T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m;$$

$$R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех  $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ .

Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. Алгебра Ли  $\mathfrak{h}^*$  группы голономии инвариантной связности  $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  – это подалгебра алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  вида  $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$ , где  $V$  – подпространство, порожденное множеством

$$\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}.$$

Положим  $\alpha$  равной подалгебре в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , порожденной  $\{\Lambda(x) \mid x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ . Связность *нормальна*, если  $\mathfrak{h}^* = \alpha$  [4].

Инвариантная связность, определяемая равенством  $\Lambda|_{\mathfrak{m}} = 0$ , называется *канонической связностью* (относительно разложения  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ ). Редуктивное однородное пространство допускает единственную инвариантную аффинную связность без кручения, имеющую те же геодезические, что и каноническая:  $\Lambda_m(x)y = 1/2[x, y]_m$ ,  $x, y \in \mathfrak{m}$ ; она называется *естественной связностью без кручения*.

**Классификация несимметрических пространств, допускающих нормальные связности.**

Будем описывать пару  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  при помощи таблицы умножения  $\bar{\mathfrak{g}}$  с базисом  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$  и полагать, что  $\mathfrak{g}$  порождается  $e_1, \dots, e_{n-3}$ , а  $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$  – базис  $\mathfrak{m}$ . Для нумерации подалгебр используем запись  $d.n$ , для нумерации пар –  $d.n.m$ , здесь  $d$  – размерность подалгебры;  $n$  – номер подалгебры в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ ;  $m$  – номер пары  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ . Будем описывать связности через образы базисных векторов  $\Lambda(u_1), \Lambda(u_2), \Lambda(u_3)$ , тензор кривизны  $R$  – через  $R(u_1, u_2), R(u_1, u_3), R(u_2, u_3)$ , а тензор кручения  $T$  – через  $T(u_1, u_2), T(u_1, u_3)$ .

**Теорема 1.** Все трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие что  $\bar{\mathfrak{g}}$  и  $\mathfrak{g}$  неразрешимы, локально имеют следующий вид:

3.3.3	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$2e_2$	$-2e_3$	$u_1$	$-u_2$	0
$e_2$	$-2e_2$	0	$e_1$	0	$u_1$	0
$e_3$	$2e_3$	$-e_1$	0	$u_2$	0	0
$u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	$u_1$
$u_2$	$u_2$	$-u_1$	0	0	0	$u_2$
$u_3$	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	0
3.3.2	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$2e_2$	$-2e_3$	$u_1$	$-u_2$	0
$e_2$	$-2e_2$	0	$e_1$	0	$u_1$	0
$e_3$	$2e_3$	$-e_1$	0	$u_2$	0	0
$u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$u_3$	0
$u_2$	$u_2$	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0
$u_3$	0	0	0	0	0	0

Для получения указанного результата найдены все трехмерные редуктивные пары с неразрешимыми  $\bar{\mathfrak{g}}$  и  $\mathfrak{g}$  (с подробным описанием можно ознакомиться в публикации [3]), определены пары, допускающие нормальную связность, и выбраны несимметрические пары.

Действительно, пусть  $\mathfrak{g}$  – подалгебра алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , такая что редуктивная пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  допускает нормальную связность,  $\bar{\mathfrak{g}}$  и  $\mathfrak{g}$  неразрешимы. Тогда  $\mathfrak{g}$  сопряжена одной из следующих подалгебр в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  [3]:

$$3.3 \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}; \quad 3.4 \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}; \quad 3.5 \begin{bmatrix} & y & x \\ -y & & z \\ -x & -z & \end{bmatrix}.$$

Предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат  $\mathbb{R}$ . Базис подалгебры по умолчанию будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.



Для каждой такой подалгебры найдем изотропно-точные пары. Рассмотрим, например, пары  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  типа 3.3. Обозначим через  $\mathfrak{h}$  нильпотентную подалгебру алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , порожденную вектором  $e_1$ . Заметим, что  $\mathfrak{g}$  – полупростая алгебра Ли.

Имеем

$$\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h}),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h}) &= \mathbb{R}e_3, \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_2, \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}u_3, \\ \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) &= \mathbb{R}u_1, \bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$[u_1, u_2] = \alpha_1 e_1 + \alpha_3 u_3, [u_1, u_3] = \beta_1 u_1, [u_2, u_3] = \gamma_2 u_2.$$

Здесь и далее параметры принадлежат  $\mathbb{R}$  (если не оговорено противное).

Используя тождество Якоби, видим, что  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = \gamma_2$ , а  $\alpha_3 \gamma_2 = 0$ . При  $\alpha_3 = \gamma_2 = 0$  пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  эквивалентна тривиальной паре, являющейся симметрической. При  $\alpha_3 \neq 0, \gamma_2 = 0$  отображение  $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_2 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ , где

$$\pi(e_i) = e_i, i = 1, 2, 3, \pi(u_1) = u_1;$$

$$\pi(u_2) = u_2, \pi(u_3) = \frac{1}{\alpha_3} u_3,$$

показывает эквивалентность пар  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  и 3.3.2 (см. формулировку теоремы 1). При  $\alpha_3 = 0, \gamma_2 \neq 0$  отображение  $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_3 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ , где

$$\pi(e_i) = e_i, i = 1, 2, 3, \pi(u_1) = u_1;$$

$$\pi(u_2) = u_2, \pi(u_3) = \gamma_2 u_3,$$

показывает, что пары  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  и 3.3.3 эквивалентны.

Поскольку  $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_2$ , мы видим, что тривиальная пара и 3.3.2 не эквивалентны. Поскольку  $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_3 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_1$ , заключаем, что 3.3.3 и тривиальная пара также не эквивалентны. Поскольку  $Z\bar{\mathfrak{g}}_2 = \mathbb{R}u_3$  и  $Z\bar{\mathfrak{g}}_3 = 0$ , заключаем, что пары 3.3.3 и 3.3.2 не эквивалентны.

Прямыми вычислениями получаем, что аффинные связности на этих пространствах имеют вид, указанный далее.

Пара	Аффинная связность
3.3.2,	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
3.3.3	

Связность является канонической, если  $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$ . В случаях 3.3.2, 3.3.3 при  $r_{3,3} = 0, r_{1,1} = -p_{1,3}$  связность имеет те же геодезические, что и каноническая. Выпишем, когда связность является естественной связностью без кручения.

Пара	Естественная связность без кручения
3.3.2	$p_{1,3} = r_{1,1} = r_{3,3} = 0, p_{3,2} = 1/2$
3.3.3	$p_{3,2} = r_{3,3} = 0, p_{1,3} = -r_{1,1} = 1/2$

Тензоры кривизны и кручения на редуцированных несимметрических пространствах выглядят следующим образом:

Пара	Тензор кривизны
3.3.2	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} - r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,3}p_{3,2} - r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}p_{3,2} - r_{3,3} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1} + r_{3,3}p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.3.3	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,3}p_{3,2} & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}p_{3,2} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2} - p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - p_{1,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1} + r_{3,3}p_{3,2} + p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Пара	Тензор кручения
3.3.2	$(0, 0, 2p_{3,2} - 1), (p_{1,3} - r_{1,1}, 0, 0),$ $(0, p_{1,3} - r_{1,1}, 0)$
3.3.3	$(0, 0, 2p_{3,2}), (p_{1,3} - r_{1,1} - 1, 0, 0),$ $(0, p_{1,3} - r_{1,1} - 1, 0)$

В случае 3.3.2 связность нормальна, если  $p_{1,3} \neq 0, p_{3,2} \neq 0$ , тогда при  $r_{3,3} = -2r_{1,1}$  алгебра голономии совпадает с  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ , а при

$r_{3,3} \neq -2r_{1,1}$  алгебра голономии совпадает с  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ ; в случае 3.3.3 связность нормальна, если  $r_{3,3} = -2r_{1,1}$ ,  $p_{1,3} \neq 0$ ,  $p_{3,2} \neq 0$ , тогда алгебра голономии совпадает с  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ .

В случаях 3.4 и 3.5 получаем только симметрические пары.

**Теорема 2.** Все трехмерные редуктивные не-симметрические однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие что  $\bar{\mathfrak{g}}$  неразрешима, а  $\mathfrak{g}$  разрешима ( $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ ), локально имеют следующий вид:

2.21.4	$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
	$e_1$	$0$	$e_2$	$u_1$	$0$
	$e_2$	$-e_2$	$0$	$0$	$u_1$
	$u_1$	$-u_1$	$0$	$0$	$u_1$
	$u_2$	$0$	$-u_1$	$-u_1$	$0$
	$u_3$	$u_3$	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$
1.1.7	$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
	$e_1$	$0$	$u_1$	$-u_2$	$0$
	$u_1$	$-u_1$	$0$	$e_1 + u_3$	$0$
	$u_2$	$u_2$	$-e_1 - u_3$	$0$	$0$
	$u_3$	$0$	$0$	$0$	$0$
1.3.3	$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
	$e_1$	$0$	$-u_2$	$u_1$	$0$
	$u_1$	$u_2$	$0$	$e_1 + u_3$	$0$
	$u_2$	$-u_1$	$-e_1 - u_3$	$0$	$0$
	$u_3$	$0$	$0$	$0$	$0$
1.3.4	$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
	$e_1$	$0$	$-u_2$	$u_1$	$0$
	$u_1$	$u_2$	$0$	$-e_1 + u_3$	$0$
	$u_2$	$-u_1$	$e_1 - u_3$	$0$	$0$
	$u_3$	$0$	$0$	$0$	$0$
1.8.2	$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
	$e_1$	$0$	$0$	$u_1$	$u_2$
	$u_1$	$0$	$0$	$u_1$	$u_2$
	$u_2$	$-u_1$	$-u_1$	$0$	$u_3$
	$u_3$	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	$0$

Аналогично приведенному в доказательстве теоремы 1 для получения указанного результата найдены все трехмерные редуктивные пары с неразрешимой  $\bar{\mathfrak{g}}$  и разрешимой  $\mathfrak{g}$ , определены пары, допускающие нормальную связность, и выбраны несимметрические пары.

Проведя вычисления, аналогичные приведенным выше, получаем, что редуктивные не-симметрические пространства, допускающие нормальную связность, задают только пары, указанные в теореме. Аффинные связности на найденных парах имеют вид, показанный ниже.

Пара	Аффинная связность	
2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$	
1.1.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$	
1.3.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$
1.3.4		$\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -p_{1,2} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,2} + p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{1,2} & r_{1,1} + q_{1,2} & r_{1,2} + q_{1,3} \\ 0 & -p_{1,2} & r_{1,1} + 2q_{1,2} + p_{1,3} \end{pmatrix}$	

Инвариантная связность нормальна, если  $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$ ; например, в случае 2.21.4 это верно при  $p_{1,2} \neq 0$ ,  $p_{1,2} \neq 1$ , тогда алгебра голономии

$$\left\{ \begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 0 \\ p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & p_2 & -p_3 \end{pmatrix} \mid p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

в противном случае алгебра голономии нулевая.

Выпишем, при каких условиях связность имеет те же геодезические, что и каноническая.

Пара	Геодезические совпадают с геодезическими канонической связности
1.1.7	$q_{3,1} = -p_{3,2}, r_{3,3} = 0, r_{1,1} = -p_{1,3}, r_{2,2} = -q_{2,3}$
1.3.3	$p_{3,1} = 0, r_{3,3} = 0, r_{1,1} = -p_{1,3}, r_{1,2} = p_{2,3}$
1.3.4	$p_{3,1} = 0, r_{3,3} = 0, r_{1,1} = -p_{1,3}, r_{1,2} = p_{2,3}$
1.8.2	$q_{1,2} = 0, r_{1,3} = 0, r_{1,1} = -p_{1,3}, r_{1,2} = -q_{1,3}$
2.21.4	$p_{1,2}$ – любое

Далее выпишем, при каких условиях связность является естественной связностью без кручения.

Пара	Естественная связность без кручения
1.1.7	$q_{3,1} = -1/2, p_{3,2} = 1/2,$ $r_{3,3} = r_{1,1} = p_{1,3} = r_{2,2} = q_{2,3} = 0$
1.3.3	$p_{3,1} = r_{3,3} = r_{1,1} = p_{1,3} = r_{1,2} = p_{2,3} = 0,$ $p_{3,2} = 1/2$
1.3.4	$p_{3,1} = r_{3,3} = r_{1,1} = p_{1,3} = r_{1,2} = p_{2,3} = 0,$ $p_{3,2} = 1/2$
1.8.2	$q_{1,2} = r_{1,3} = r_{1,1} = p_{1,3} = r_{1,2} = q_{1,3} = 0,$ $p_{1,2} = 1/2$
2.21.4	$p_{1,2} = 1/2$

**Заключение.** Таким образом, найдены все трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства с неразрешимой группой преобразований, допускающие нормальную связность, инвариантные аффинные связности на таких однородных пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения. Полученные результаты могут быть использованы в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, в теории представлений, теоретической физике, а также других разделах современной математики и физики.

### Литература

1. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Моск. ун-т, 1960. 307 с.
2. Лумисте Ю. Г. Дифференциальная геометрия подмногообразий // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНТИ АН СССР, 1975. Т. 13. С. 273–340.
3. Можей Н. П. Нормальные связности на редуктивных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2016. Т. 60, № 6. С. 28–36.
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981. 2 т.

### References

1. Kartan E. *Rimanova geometriya v ortogonal'nom repere* [Riemannian geometry in an orthogonal frame]. Moscow, Moskovskiy universitet Publ., 1960. 307 p.
2. Lumiste U. G. Differential geometry of submanifolds. *Itogi Nauki i Tekhniki* [Results of Science and Technology]. Series Algebra, Topology, Geometry, 1975, vol. 13, pp. 273–340 (In Russian).
3. Mozhey N. P. Normal connections on reductive homogeneous spaces with an unsolvable transformation group. *Doklady Natsional'noy akademii nauk Belarusi* [Reports of the National Academy of Sciences of Belarus], 2016, vol. 60, no. 6, pp. 28–36 (In Russian).
4. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii: v 2 tomakh* [Foundations of differential geometry: in 2 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 2 vol.

### Информация об авторе

**Можей Наталья Павловна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

### Information about the author

**Mozhey Natalya Pavlovna** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила 02.03.2018

# МЕХАНИКА

---

УДК 621.391:681.327.02

**О. В. Бондаренко, Д. Н. Степанов**

Одесская национальная академия связи им. А. С. Попова (Украина)

## **ВЛИЯНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ДЛИНУ ОПТИЧЕСКОГО ВОЛОКНА В ТРУБКЕ ОПТИЧЕСКОГО МОДУЛЯ**

В работе исследовано влияние термомеханического воздействия на изменение длины оптического волокна (ОВ) в трубке оптического модуля (ТОМ). Оно показало, что при температуре выше 20°C выбранная модульная конструкция оптического кабеля (ОК) вызывает появление сил растяжения ОВ, а при температуре ниже 20°C – сил сжатия. Причиной этого является наличие в конструкции ОК элементов, выполненных из материалов с различными значениями температурного коэффициента линейного расширения, из-за чего длины ОВ и трубки оптического модуля под воздействием температуры изменяются по-разному. Результаты расчетов изменения длины ОВ показали, что его сжатие в трубке оптического модуля приводит к созданию в структуре волокна макроизгибов, а растяжение – к образованию микротрещин, что требует необходимости учета и создания избыточной длины волокна при его интеграции в ТОМ при производстве. В работе показано, что применение поликарбоната в качестве материала трубки оптического модуля позволяет добиться при изменении температуры меньшего отличия длин оптического волокна и ТОМ.

**Ключевые слова:** оптический кабель, оптическое волокно, трубка оптического модуля, удлинение, сжатие, растяжение, температурный коэффициент линейного расширения.

**O. V. Bondarenko, D. N. Stepanov**

Odessa National A. S. Popov Academy of Telecommunications (Ukraine)

## **INFLUENCE OF THERMOMECHANICAL IMPACT ON OPTICAL FIBER LENGTH IN OPTICAL MODULE TUBE**

The influence of the thermomechanical impact on the changing of the optical fiber (OF) length in the optical module tube (OMT) is investigated. It has shown that at temperature higher than 20°C the selected modular design of an optical cable (OC) causes the appearance of OF stretching, and at a temperature below 20°C – compression forces. The reason for this is the presence in the OC design the elements, which are made of materials with different values of the temperature coefficient of linear expansion, due to which the lengths of the OF and optical module tube are different under the influence of temperature. The results of the calculations of the OF length shown that its compression in the optical module tube leads to the creation of macro-bends in the structure of the fiber, but the stretching – to formation of microcracks, which requires the need to record and create an excess fiber length when it is integrated into production. It has been shown that the usage of polycarbonate as a material of the optical module tube can be achieved the smaller difference between the lengths of the optical fiber and OMT at changing of the temperature.

**Key words:** optical cable, optical fiber, optic module tube, elongation, compression, stretching, temperature coefficient of linear expansion.

**Введение.** Предусмотрение физической целостности оптических волокон (ОВ) в сердечнике оптических кабелей (ОК) и стабильности их параметров передачи не только при нормированной температуре 20°C, но и во всем диапазоне температур эксплуатации является актуальной задачей конструирования ОК.

Одним из внешних дестабилизирующих факторов является влияние температуры окружающей среды эксплуатации на конструкцию

ОК и его элементы (ОВ, трубки оптических модулей, центральный и периферический силовые элементы, защитные оболочки и др.). При изменении температуры ОК в его конструкции возникает напряженно-деформированное состояние в результате разности значений температурных коэффициентов линейного расширения (ТКЛР) материалов элементов, в первую очередь, оптических волокон и трубки оптического модуля (ТОМ), в которую они помещены [1]. Такое

состояние ОК может привести к появлению в ОВ экстремальных растягивающе-сжимающих сил, которые повлекут непредсказуемое изменение параметров передачи (коэффициента затухания и дисперсию сигнала), преждевременное старение и выход из строя всей волоконно-оптической линии передачи.

В настоящее время в научной и технической литературе отсутствуют в полной мере данные о термомеханическом воздействии на длины ОВ в ТОМ конструкции ОК под действием изменения температур среды эксплуатации.

Целью данной работы является обоснование метода определения влияния термомеханического действия на длину ОВ в трубке оптического модуля оптического кабеля и предоставление практических рекомендаций по обеспечению технической целостности ОВ при эксплуатации кабеля в различных температурах.

**Основная часть.** Наличие в конструкции ОК элементов, изготовленных из материалов с различными ТКЛР, является причиной изменения геометрических размеров ОВ, в частности его длины. При изменении температуры эксплуатации это приводит к возникновению сил сжатия или растяжения ОВ. Указанное может привести кроме дополнительных потерь передаваемого оптического сигнала к сокращению срока службы ОК за счет появления микротрещин, макро- и микроизгибов в ОВ.

Как известно, уменьшение длины оптического волокна в конструкции оптического модуля под действием температуры может привести к ограничению свободного передвижения ОВ в середине ТОМ. Это уменьшит величину максимальной допустимой растягивающей нагрузки ОК ниже номинального значения.

Под действием температуры длина элементов ОК, расположенных вдоль продольной оси кабеля, изменяется (увеличивается или уменьшается по сравнению с начальной длиной) [2]:

$$\Delta l = l_0 \cdot \Delta T \cdot \text{ТКЛР}, \quad (1)$$

где  $\Delta l$  – абсолютное изменение длины линейного элемента ОК, мм;  $l_0$  – начальная длина элемента ОК, мм;  $\Delta T$  – разность температур, К;

ТКЛР – температурный коэффициент линейного расширения материала элемента ОК,  $\text{K}^{-1}$ .

Для исследования влияния термомеханического действия на ОВ, расположенного в ТОМ, используем подход к этому вопросу, представленный в [3].

Как отмечалось в этой работе, ТКЛР характеризует относительное изменение длины элемента ОК в зависимости от изменения температуры по выражению

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \text{ТКЛР} \cdot \Delta T, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – относительное удлинение элемента ОК;  $\Delta l$  – абсолютное удлинение элемента ОК, м;  $l_0$  – начальная длина элемента кабеля, м; ТКЛР – температурный коэффициент линейного расширения элемента кабеля,  $\text{K}^{-1}$ ;  $\Delta T$  – разность температур среды, К.

При равенстве длин ОВ и ТОМ относительное изменение их длины определяется по выражению [1]

$$\varepsilon_{\text{ОВ,ТОМ}} = \Delta \text{ТКЛР} \cdot \Delta T = (\text{ТКЛР}_{\text{ОВ}} - \text{ТКЛР}_{\text{ТОМ}}) \cdot (t - t_0), \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  – изменение длины ОВ относительно длины ТОМ;  $\text{ТКЛР}_{\text{ОВ}}$ ,  $\text{ТКЛР}_{\text{ТОМ}}$  – температурный коэффициент линейного расширения ОВ и ТОМ соответственно,  $\text{K}^{-1}$ ;  $t$  – температура среды, К;  $t_0$  – температура, при которой начальная избыточная длина ОВ условно равна нулю, К.

В табл. 1 приведены типичные значения ТКЛР материалов ОВ и ТОМ, используемых при изготовлении ОК [1–3].

В табл. 2 приведены данные о характере напряженного состояния ОВ, расположенного внутри ТОМ при изменении температуры [1].

Как показано в табл. 2, для обеспечения термостабильной конструкции сердечника кабеля, чтобы при изменении температуры оптическое волокно не испытывало механических нагрузок и оставалось целостным, необходимо на этапе разработки ОК и в процессе интеграции ОВ в ТОМ предусмотреть избыток длины ОВ в трубке оптического модуля.

Таблица 1

**Характеристики материалов для изготовления оптического волокна и трубки оптического модуля**

Элемент ОК	Материал	Модуль Юнга, Н/мм <sup>2</sup>	Плотность, г/см <sup>3</sup>	ТКЛР, $\text{K}^{-1}$
Оптическое волокно	Кварцевое стекло	72 500	2,20	$5,5 \cdot 10^{-7}$
Трубка оптического модуля	Полибутилентерефталат	1 600	1,31	$1,5 \cdot 10^{-4}$
	Полиамид	1 700	1,06	$7,8 \cdot 10^{-5}$
	Поликарбонат	2 300	1,20	$6,5 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2

**Характер напряженного состояния ОВ, расположенного внутри ТОМ при изменении температуры**

Сопоставление ТКЛР материалов ОВ и ТОМ	Изменение длин ОВ $\Delta l_{ОВ}$ и ТОМ $\Delta l_{ТОМ}$		Напряженное состояние ОВ	
	при увеличении температуры	при уменьшении температуры	при увеличении температуры	при уменьшении температуры
Положительные ТКЛР $TKLR_{ОВ} < TKLR_{ТОМ}$	Увеличение длины ОВ и ТОМ $\Delta l_{ТОМ} > \Delta l_{ОВ}$	Уменьшение длины ОВ и ТОМ $\Delta l_{ТОМ} < \Delta l_{ОВ}$	Удлинение ТОМ больше удлинения ОВ, появление сил растяжения ОВ (появление микротрещин)	Сокращение ТОМ больше сокращения ОВ, появление сил сжатия ОВ (появление изгибов)

Исходя из табл. 1 и того, что для заданных материалов значение ТКЛР ОВ меньше, чем ТКЛР материалов ТОМ, изменение длины ОВ по сравнению с длиной трубки модуля будет происходить так, как показано на рис. 1.

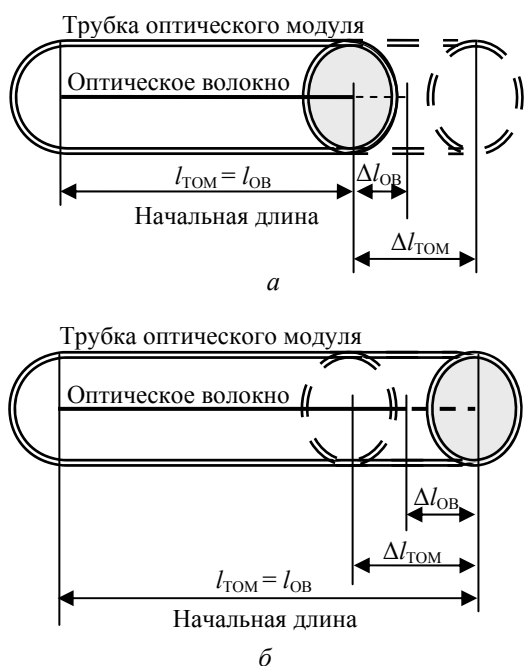


Рис. 1. Изменение длины ОВ сравнительно с длиной ТОМ:  
а – при увеличении температуры;  
б – при уменьшении температуры

Одним из важных процессов при проверке качества изготовления ОВ на заводе-изготовителе является профтест сил натяжения и удлинения ОВ, которые не должны превышать 4 Н и 0,5% соответственно [1, 3].

Сила приращения длины ОВ может быть определена по данным силы натяжения и удлинения ОВ при профтесте во время его отработки на предприятии:

$$P_{ОВ} = \frac{\epsilon_{ОВ}}{\epsilon_{тестОВ}} P_{тестОВ}, \tag{4}$$

где  $P_{ОВ}$  – сила приращения длины ОВ при удлинении, Н;  $\epsilon_{ОВ}$  – изменение длины ОВ от температуры окружающей среды;  $\epsilon_{тестОВ}$  – удлинение

ОВ при тестировании его качества, %,  $\epsilon_{тестОВ} = 0,5\%$ ;  $P_{тестОВ}$  – значение растяжения усилия ОВ при тестировании, Н,  $P_{тестОВ} = 4$  Н.

В качестве примера в данной работе были определены силы приращения длины и относительного удлинения ОВ в сравнении с ТОМ, в которой оно расположено, при значениях ТКЛР материалов ОВ и ТОМ из табл. 1. Расчет изменения длины ОВ в трубке ОМ выполняется при  $t_0 = 20^\circ\text{C}$  (293 К), при изменении температуры  $t$  в диапазоне от  $-40$  до  $+60^\circ\text{C}$  (рис. 2).

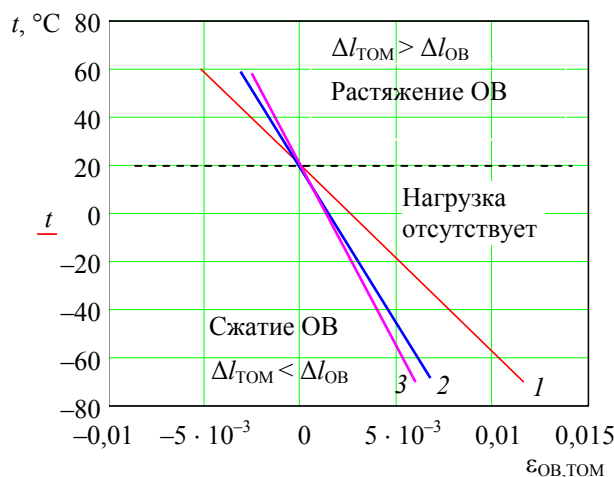


Рис. 2. Изменение длины оптического волокна относительно длины оптического модуля при разных значениях температуры и материалах:  
1 – полибутилтерефталан; 2 – полиамид;  
3 – поликарбонат

При нагревании трубки ОМ до температуры, например,  $+60^\circ\text{C}$  (333 К), оптическое волокно получит приращение относительно ТОМ, изготовленного из полибутилтерефталана

$$\epsilon_{ОВ,ТОМ} = (5,5 \cdot 10^{-7} - 1,5 \cdot 10^{-4}) \times (333 - 293) = -0,006.$$

При охлаждении конструкции трубки ОМ из полибутилтерефталана до температуры  $-40^\circ\text{C}$  (253 К) длина ОВ изменится относительно длины трубки ОМ на величину:

$$\epsilon_{ОВ,ТОМ} = (5,5 \cdot 10^{-7} - 1,5 \cdot 10^{-4}) \times (253 - 293) = 0,09.$$

При растяжении ОВ при температуре  $+60^{\circ}\text{C}$  сила растяжения будет равна:

$$P_{\text{ОВраст}} = \left( \frac{0,006}{0,005} \right) \cdot 4 = 4,8 \text{ Н.}$$

Это значение превышает силу растяжения в 4 Н при профтесте и указывает на появление избыточных механических сил, которые могут привести к разрыву ОВ при увеличении температуры до  $+60^{\circ}\text{C}$ .

Анализируя величину изменения длины ОВ в трубке ОМ, видим, что влияние отрицательных температур на ТОМ, а значит на кабель в целом, более критическое, чем положительных температур (за счет появления макроизгибов ОВ в ТОМ).

Из рис. 2 видно, что лучший результат среди рассмотренных материалов ТОМ обеспечи-

вается поликарбонатом, так как возникает меньшая разница в длинах ОВ и ТОМ при изменении температуры.

**Заключение.** Подводя итоги вышесказанного, можно сделать следующие выводы.

1. Проведенное исследование влияния термомеханического воздействия на изменения длины волокна в трубке ОМ показало, что при температуре выше  $20^{\circ}\text{C}$  выбранная модульная конструкция ОК вызывает появление сил растяжения ОВ, а при температуре ниже  $20^{\circ}\text{C}$  – сил сжатия.

2. Результаты расчетов изменения длины ОВ указывают на то, что его сжатие в трубке оптического модуля приводит к образованию в структуре волокна макроизгибов, а растяжение – к инициированию микротрещин, что требует создания избыточной длины волокна в процессе его интеграции в ТОМ при производстве.

### Литература

1. Ларин Ю. Т. Оптические кабели: методы расчета конструкции. Материалы. Надежность и стойкость к ионизированному излучению. М.: Престиж, 2006. 308 с.
2. Бондаренко О. В. Метод определения температурного коэффициента линейного расширения и модуля Юнга диэлектрического оптического кабеля // Наукові праці Донецького національного технічного університету. 2009. Серія «Електротехніка і енергетика». Вип. 9 (158). С. 25–29.
3. Мальке Г., Гессинг П. Волоконно-оптические кабели: Основы проектирования кабелей, планирование систем. Новосибирск: Издатель, 1997. 264 с.

### References

1. Larin Yu. T. *Opticheskie kabeli: metody rascheta konstruksii. Materialy. Nadezhnost' i stoykost' k ionizirovannomu izlucheniyu* [Optical cables: methods of design calculation. Materials. Reliability and resistance to ionized radiation]. Moscow, Prestizh Publ., 2006. 308 p.
2. Bondarenko O. V. Method for determining the temperature coefficient of linear expansion and Young's modulus of a dielectric optical cable. *Naukovy pratsi Donets'kogo natsional'nogo tekhnichnogo universytetu* [Scientific works of Donetsk National Technical University]. Series "Electrical engineering and power engineering". 2009, issue 9 (158), pp. 25–29 (In Ukrainian).
3. Mal'ke G., Gessing P. *Volokonno-opticheskie kabeli: Osnovy proektirovaniya kabeley, planirovanie sistem* [Fiber Optic Cables: Basics of Cable Design, System Planning]. Novosibirsk, Izdatel' Publ., 1997. 264 p.

### Информация об авторах

**Бондаренко Олег Владимирович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры волоконно-оптических линий связи, проректор по учебной работе. Одесская национальная академия связи им. А. С. Попова (65029, г. Одесса, ул. Кузнечная, 1, Украина). E-mail: vols@onat.edu.ua

**Степанов Дмитрий Николаевич** – кандидат технических наук, доцент, и. о. заведующего кафедрой волоконно-оптических линий связи. Одесская национальная академия связи им. А. С. Попова (65029, г. Одесса, ул. Кузнечная, 1, Украина). E-mail: vols@onat.edu.ua

### Information about the authors

**Bondarenko Oleg Vladimirovich** – PhD (Engineering), Professor, Vice Rector, Professor, the Department of Fiber Optic Communication Lines. Odessa National A. S. Popov Academy of Telecommunications (1, Kuznechnaya str., 65029, Odessa, Ukraine). E-mail: vols@onat.edu.ua

**Stepanov Dmitry Nikolaevich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Acting Head of the Department of Fiber Optic Communication Lines. Odessa National A. S. Popov Academy of Telecommunications (1, Kuznechnaya str., 65029, Odessa, Ukraine). E-mail: vols@onat.edu.ua

Поступила 19.01.2018

УДК 531.19; 538.911

**И. И. Наркевич, Е. В. Фарафонтова, Д. Е. Зубрицкий**  
Белорусский государственный технологический университет

## **ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ МИКРОСКОПИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕНТРОВ КОЛЛОИДНЫХ ЧАСТИЦ В МАКРОСКОПИЧЕСКИ ОДНОРОДНОМ ВОДНОМ РАСТВОРЕ**

В работе предпринята попытка применения двухуровневого молекулярно-статистического подхода к описанию структуры и равновесных термодинамических характеристик однородных коллоидных водных растворов. Этот статистический метод был разработан для конденсированных молекулярных систем с парным взаимодействием молекул друг с другом, которое описывается, в частности, с помощью потенциала Леннарда-Джонса для систем с гранцентрированной кубической решеткой в кристаллическом состоянии.

В связи со спецификой поведения наноразмерных коллоидных частиц в водных растворах имеются основания для описания взаимодействия между такими частицами с помощью потенциала SALR (Short-range Attraction and Long-range Repulsion). Он учитывает сильное отталкивание между частицами на малых расстояниях, притяжение – на промежуточных и слабое отталкивание – на сравнительно больших расстояниях, которые составляют несколько эффективных диаметров коллоидных частиц. Такой необычный вид потенциала SALR является следствием влияния полярного растворителя (воды) на коллоидные частицы; так что фактически реальную бинарную флюидную систему согласно ранее проведенным экспериментальным и теоретическим исследованиям можно теоретически испытывать в рамках однокомпонентной статистической модели с гексагональной решеткой.

В результате решения полученной замкнутой системы интегральных и алгебраических уравнений получены зависимости среднеквадратичных отклонений центров тяжести коллоидных частиц в воде от чисел заполнения  $n$  микроячеек модифицированного метода условных распределений. На графиках зависимости свободной энергии присутствует точка бифуркации, соответствующая появлению двух решений при числах заполнения  $n \geq 0,5$  (при  $n > 0,5$  имеется только одно решение).

**Ключевые слова:** двухуровневый молекулярно-статистический подход, коррелятивные функции, потенциал средних сил, неоднородная система, наночастица.

**I. I. Narkevich, E. V. Farafontova, D. E. Zubrytski**  
Belarusian State Technological University

## **NUMERICAL-ANALYTICAL CALCULATION OF MICROSCOPIC DISTRIBUTION OF COLLOID PARTICLE CENTERS IN A MACROSCOPICALLY HOMOGENEOUS AQUEOUS SOLUTION**

The attempt is made to apply a two-level molecular-statistical approach to description of the structure and equilibrium thermodynamic characteristics of homogeneous colloidal aqueous solutions. This statistical method was developed for condensed molecular systems with pair interaction of molecules with each other, the latter is described, in particular, with the help of the Lennard-Jones potential for systems with a face-centered cubic lattice in the crystalline state.

Taking into account the specifics of the behavior of nanoscale colloidal particles in aqueous solutions, there is a reason to describe the interaction between such particles, using the potential of SALR (Short-range Attraction and Long-range Repulsion). It takes into account strong repulsion between particles at short distances, the attraction at intermediate distances and weak repulsion at relatively large distances, which equal several effective diameters of colloidal particles. Such an unusual form of the SALR potential is a consequence of the influence of the polar solvent (water) on the colloidal particles. Therefore, the real binary fluid system, according to the previous experimental and theoretical studies, can be theoretically investigated with method of a framework of a one-component statistical model with a hexagonal lattice.

The result of solving a derived closed system of integral and algebraic equations is the dependence of root-mean-square deviations of the centers of gravity of colloidal particles in water on the occupation



numbers of  $n$  microcells of the modified method of conditional distributions. On the graphs of the free energy dependences, there is a bifurcation point, corresponding to the appearance of two solutions with fill numbers  $n \geq 0,5$  (for  $n > 0,5$  there is only one solution).

**Key words:** two-level molecular-statistical approach, correlation functions, mean force potential, inhomogeneous system, nanoparticle.

**Введение.** Двухуровневый молекулярно-статистический подход [1] к описанию равновесных свойств термодинамических молекулярных систем базируется на совместном применении метода Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ), метода условных распределений Ротта [2] и метода термодинамических потенциалов плотности. В этом подходе используются потенциалы средних сил [1–3], которые в случае неоднородных систем являются функционалами от искомым полей средней плотности [1]. Они определяют одночастичные, двухчастичные и т. д. условные функции распределения частиц (атомов или молекул) в окрестности узлов элементарных ячеек, на которые разбивается весь объем  $V$  системы. Искомые потенциалы удовлетворяют достаточно сложной системе интегральных уравнений, решение которой требует выполнения большого объема численных расчетов. Отсутствие аналитического выражения для этих потенциалов создает непреодолимые трудности для последующего их использования при решении соответствующих вариационных задач [1, 4] по определению, например, профилей плотности на границе раздела двух однородных сосуществующих фаз или наночастиц с неоднородным распределением плотности на их границе. Для решения этой проблемы в данной работе будут использоваться ранее полученные аппроксимационные формулы для искомым потенциалов средних сил.

Для этого аналитические преобразования и последующие численные расчеты проводим, как и ранее [5], для систем, объем  $V$  которых мысленно разделен на  $M$  микроячеек объемом  $\omega_i$ , центры которых образуют в данной работе гексагональную решетку. В этом случае нормированную на единицу унарную функцию  $\hat{F}_{11}(x, y, z)$  в  $F_{11}$ -приближении метода условных распределений, которая в кристаллическом состоянии имеет резкие пики в окрестности узлов, заменим на вспомогательную функцию  $\hat{F}_{11}^*$  с практически равномерным распределением молекул внутри сфер с радиусами  $b_i$ , центры которых совпадают с узлами решетки ( $i = 1, 2, \dots, M$ ). Параметры  $b_i$  подбираем так, чтобы среднеквадратичные отклонения  $\sigma_i$  молекул от узлов решетки были равными для функций  $\hat{F}_{11}$  и  $\hat{F}_{11}^*$ :

$$\sigma_i = \int_{\omega_i} r^2 \hat{F}_{11}(x, y, z) d\omega_i = \sqrt{\frac{3}{5}} b_i, \quad (1)$$

где

$$\hat{F}_{11}(\vec{q}_i) = A_i \exp \left\{ -\beta \sum_{j \neq i}^M \varphi_{ij}(\vec{p}_i) \right\}. \quad (2)$$

Здесь  $A_i$  – нормирующий множитель для функции  $\hat{F}_{11}(\vec{q}_i)$ ;  $\beta = 1/kT$  – обратная температура;  $\varphi_{ij}(\vec{p}_i)$  – потенциал средних сил метода условных распределений [1, 2];  $\vec{p}_i$  – радиус-вектор молекулы в ячейке объемом  $\omega_i$  по отношению к системе координат, начало которой совмещено с узлом ячейки  $\omega_j$ , а суммирование проводится по всем узлам решетки.

Для короткодействующих потенциалов  $\Phi(r)$  обычно ограничиваются суммированием по узлам, принадлежащим одной или двум ближайшим координационным сферам по отношению к центру ячейки  $\omega_i$ . В случае потенциала SALR от этого упрощения придется отказаться и выполнять суммирование с учетом вкладов от взаимодействия с большим числом координационных сфер.

Введенная функция  $\hat{F}_{11}^*$  позволяет аналитически выполнить усреднение парного потенциала с учетом корреляции в расположении двух коллоидных частиц внутри своих сфер с радиусами  $b$  и  $\beta$ . Поэтому при усреднении учитывается, что их центры не могут находиться на расстояниях меньше, чем  $d$  ( $d$  – параметр обреза, который в дальнейших расчетах принимается равным 0,9). В результате средние потенциалы  $\varphi(\rho, b, d)$ , определяющие унарную функцию (2), находим, как и ранее, по следующей формуле:

$$\varphi(\rho, b, d) = \frac{n_{ij} V_b}{n_i} \frac{\int U(r) E(r-d) dV_b}{\int_{V_b} E(r-d) dV_b}. \quad (3)$$

Здесь  $n_{ij}$  – двухъячеечные числа заполнения ячеек с номерами  $i$  и  $j$ ;  $n_i$  – числа заполнения ячеек  $\omega_i$ , учитывающие наличие вакантных ячеек;  $U(r)$  – потенциал SALR;  $V = 4/3\pi b^3$ ;  $E(r-d)$  – единичная ступенчатая функция Хевисайда:

$$E(r-d) = \begin{cases} 0 & \text{при } r \leq d, \\ 1 & \text{при } r > d. \end{cases} \quad (4)$$

**Основная часть.** Экспериментальные и теоретические исследования коллоидных растворов позволили сконструировать выражение для парного потенциала взаимодействия коллоидных частиц с учетом явления экранирова-

ния их зарядов в полярной среде. Для раствора частиц в водном растворе будем использовать потенциал SALR, который в безразмерных единицах имеет следующий вид [6]:

$$U(r) = \Phi_{\text{Л-Д}}(r) + \Phi_{\text{К}}(r) = 4(r^{-12} - r^{-6}) + Br^{-1}e^{-\kappa r}. \quad (5)$$

Первое слагаемое в выражении (5) является потенциалом Леннарда-Джонса, а второе – экранированным потенциалом Кулона.

На рис. 1 изображен график зависимости потенциала  $U$  от расстояния  $r$  между частицами при  $B = 1,27$  и  $\kappa = 0,5$ .

Из рис. 1 видно, что для коллоидных частиц в воде потенциал имеет специфический вид. Он учитывает наличие сильного отталкивания на малых расстояниях ( $r < 1,14$ ), притяжения – на промежуточных расстояниях и достаточно слабого отталкивания – на больших расстояниях ( $r > 2, \dots$ ).

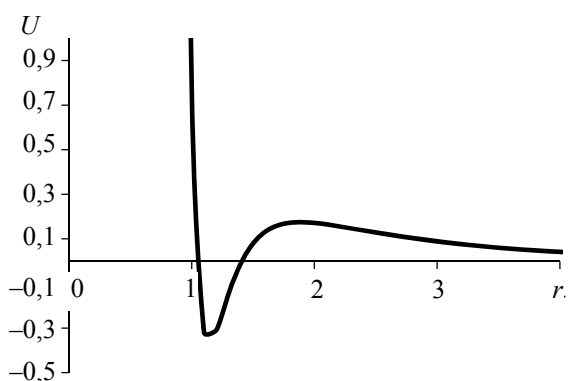


Рис. 1. Зависимость потенциала  $U$  от расстояния  $r$  между частицами

После подстановки выражения (5) в уравнение (3) и вычисления в сферической системе определенных интегралов по углу  $\varphi$  (от 0 до  $2\pi$ ) и углу  $\theta$  (от 0 до  $\theta_{\text{max}}$ ), а также неопределенного интеграла по  $r$  получим аналитическое выражение для среднего потенциала  $\varphi(\rho)$ :

$$\varphi(\rho, b, d) = \frac{n_{ij}}{n_i} \frac{I(r, \rho, b)|_{r_1}^{r_2}}{V(r, \rho, b)|_{r_1}^{r_2}}. \quad (6)$$

Здесь

$$I(r, \rho, b) = I_{\text{Л-Д}}(r, \rho, b) + I_{\text{К}}(r, \rho, b), \quad (7)$$

$$I_{\text{Л-Д}}(r, \rho, b) = 8\pi \left[ \frac{1}{r^{10}} \left( \frac{(\rho^2 - b^2)}{20\rho} - \frac{r}{9} + \frac{r^2}{16\rho} \right) - \frac{1}{r^4} \left( \frac{(\rho^2 - b^2)}{8\rho} - \frac{r}{3} + \frac{r^2}{4\rho} \right) \right]; \quad (8)$$

$$I_{\text{К}}(r, \rho, b) = 2\pi B_1 e^{-\kappa r} \left[ \frac{\kappa^2 \rho^2 - 2\kappa\rho - \kappa^2 b^2 + 2}{2\kappa^3 \rho} + \frac{r^2}{2\kappa\rho} - \frac{r(\kappa\rho - 1)}{\kappa^2 \rho} \right]; \quad (9)$$

$$V(r, \rho, b) = -2\pi \left[ \frac{r^2(\rho^2 - b^2)}{4\rho} - \frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{8\rho} \right]. \quad (10)$$

После подстановки пределов  $r_1$  и  $r_2$  для координаты  $r$ , которые зависят от соотношения между расстоянием  $\rho$  и параметрами  $b$  и  $d$ , получаются аналитические выражения для среднего потенциала:

$$\varphi^*(\rho, b, d) = n_i \varphi(\rho, b, d) / n_{ij} = \begin{cases} \frac{I(\rho+b, b, d) - I(\rho-b, b, d)}{4\pi b^3 / 3} & \text{при } \rho \geq b+d; \\ \frac{I(\rho+b, b, d) - I(d, b, d)}{V(\rho+b, b, d) - V(d, b, d)} & \text{при } d-b < \rho < b+d; \\ \Phi(\rho+b) & \text{при } \rho \leq d-b. \end{cases} \quad (11)$$

В результате численного решения системы уравнений (1)–(11) получены зависимости среднеквадратичных отклонений  $\sigma = \sqrt{3/5} b$  центров тяжести коллоидных частиц от узлов гексагональной решетки (рис. 2). Эта решетка используется здесь для статистического описания микроструктуры макроскопически однородного коллоидного водного раствора при одинаковых значениях чисел заполнения  $n_i = n$ , которые в этом случае имеют смысл концентрации  $n = N / M$ . Система интегральных уравнений (1)–(11) решалась методом итераций при различных значениях пробных (начальных) значений параметра  $b$ , определяющих искомые среднеквадратичные отклонения  $\sigma$ . Вертикальные стрелки на рис. 2 соединяют две точки, первая из которых соответствует пробному значению параметра  $b$ , а вторая – найденному решению для этого параметра при разных значениях концентрации  $n$ . Полученные результаты, представленные на рис. 2, указывают на сходимость итерационной процедуры и устойчивость полученных решений, поскольку они не зависят от пробных значений параметра  $b$ .

Расчеты выполнены для безразмерной температуры  $\theta = kT / \varepsilon = 0,4$  ( $\varepsilon$  – глубина потенциальной ямы потенциала Леннарда-Джонса) и безразмерного параметра гексагональной решетки  $R = 1,12$  ( $R = a = b = c$ ) в единицах линейного параметра  $\sigma$  потенциала Леннарда-Джонса.

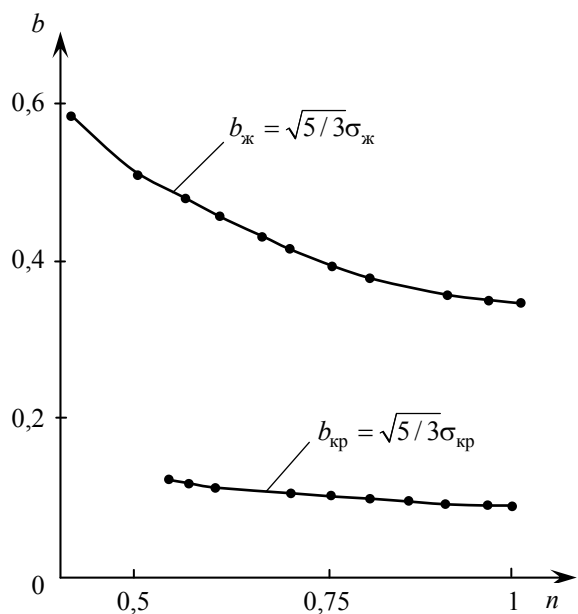


Рис. 2. Зависимость параметра  $b$  от концентрации  $n$  коллоидного раствора

Наличие аналитической зависимости между средними потенциалами и среднеквадратичными отклонениями  $\sigma$  позволили описать микроструктуру макроскопически однородной среды с помощью условных унарных функций (2) распределения центров коллоидных частиц внутри примитивных ячеек гексагональной решетки.

На рис. 2 показано, что при значениях чисел заполнения  $n$ , больших чем 0,5, имеются два решения, одно из которых соответствует локализованному распределению центров тяжести коллоидных частиц (при этом среднеквадратичные отклонения  $\sigma \sim 0,08$ ), тогда как второе решение относится к делокализованному распределению центров тяжести коллоидных частиц ( $0,25 < \sigma < 0,50$ ).

В связи с этим на зависимости свободной энергии от чисел заполнения  $n$  (рис. 3) имеется точка  $C$  бифуркации для решений системы интегральных уравнений (1)–(11). Для свободной энергии использовалось выражение, которое получено ранее в рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода [1] и имеет следующий вид:

$$F_{св} = M\theta(n \ln n + (1 - n) \ln(1 - n)) + M \frac{n^2}{2} \sum_{j=1}^M \langle \phi_j^*(\rho, b, d) \rangle. \quad (12)$$

Здесь  $\langle \phi_j^*(\rho, b, d) \rangle$  – среднее значение потенциала  $\phi$ , полученное в результате усреднения по положениям центра коллоидной частицы внутри сферы радиуса  $\beta = b$ .

Следует отметить, что выражение (12) является приближенным, поскольку корреляция между коллоидными частицами учитывается с помощью функций Хевисайда (4) фактически только в ближайших (соседних) микроячейках, при этом используется приближение  $n_{ij} \approx n_i n_j$  (для однородной системы  $n_{ij} \approx n^2$ ).

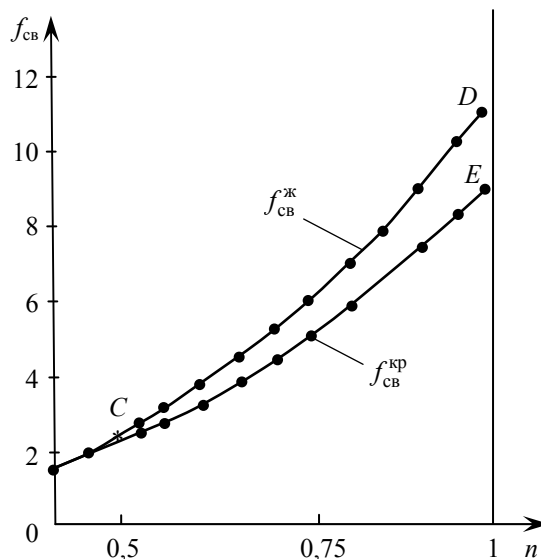


Рис. 3. Зависимость свободной энергии  $f_{св} = F_{св} / M$  от концентрации  $n$  коллоидного раствора

**Заключение.** Разработанная итерационная методика решения системы интегральных уравнений (1)–(11) для макроскопически однородного коллоидного раствора будет в дальнейшем использоваться при изучении адсорбции коллоидных частиц из объема раствора с неоднородным распределением плотности, т. е. чисел заполнения микроячеек в объеме  $V$ .

Результаты работы получены при финансовой поддержке научной программы Евросоюза HORIZONT – 2020 (проект АМД-734276-CONIN) и Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ, подпрограмма «Наноматериалы и нанотехнологии»).

Авторы благодарны координатору проекта А. Цях за участие в выборе направления исследований, в рамках которого выполнена настоящая работа.

### Литература

1. Наркевич И. И. Молекулярно-статистическая теория неоднородных конденсированных сред: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. СПб., 1993. 223 с.
2. Rott L. A., Vikhrenko V. S. Statistical Method of Conditional Distributions // Fortschr. Phys. 1975. Vol. 23, no. 3. P. 133–164.

3. Thermodynamics and diffusion of a lattice gas on a simple cubic lattice / P. Argyrakis [et al.] // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 64, no. 6. Art. #066108.

4. Бокун Г. С., Вихренко В. С., Наркевич И. И. Применение вариационных методов для описания структурных и термодинамических характеристик наночастиц // Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов: материалы Международ. науч. конф., Минск, 22–24 окт. 2015 г. / Белорус. гос. технол. ун-т. Минск, 2015. С. 239–243.

5. Наркевич И. И., Квасов Н. Т., Козич Е. Ю. Двухуровневое молекулярно-статистическое изучение структуры и термодинамических характеристик однородных макроскопических систем и сферических наночастиц // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 61–65.

6. Ciach A., Gozdz W. T. Mesoscopic description of network-forming clusters of weakly charged colloids // *Condensed Matter Physics*. 2010. Vol. 13, no. 2. P. 23603.

### References

1. Narkevich I. I. *Molekulyarno-statisticheskaya teoriya neodnorodnykh kondensirovannykh sred. Dis. dokt. fiz.-mat. nauk* [Molecular-statistical theory of the non-homogeneous condensed matter. Doct. Diss.]. St. Petersburg, 1993. 223 p.

2. Rott L. A., Vikhrenko V. S. Statistical Method of Conditional Distributions. *Fortschr. Phys.*, 1975, vol. 23, no. 3, pp. 133–164.

3. Argyrakis P., Groda Ya. G., Bokun G. S., Vikhrenko V. S. Thermodynamics and diffusion of a lattice gas on a simple cubic lattice. *Phys. Rev. E*. 2001, vol. 64, no. 6, art. #066108.

4. Bokun G. S., Vikhrenko V. S., Narkevich I. I. Application of variational methods to describe the structural and thermodynamic properties of nanoparticles [*Materialy Mezhdunarodnoy konferentsii "Avtomaticheskiiy kontrol' i avtomatizatsiya proizvodstvennykh protsessov"*] [Materials of the International Scientific Conference "Automatic control and automation of production processes"]. Minsk, 2015, pp. 239–243 (In Russian).

5. Narkevich I. I., Kvasov N. T., Kozich E. Yu. Two-level molecular-statistical study of the structure and thermodynamic characteristics of homogeneous macroscopic systems and spherical nanoparticles. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 61–65 (In Russian).

6. Ciach A., Gozdz W. T. Mesoscopic description of network-forming clusters of weakly charged colloids. *Condensed Matter Physics*. 2010, vol. 13, no. 2, p. 23603.

### Информация об авторах

**Наркевич Иван Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: Narkevich@belstu.by

**Фарафонтова Елена Валерьевна** – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: farafontova@belstu.by

**Зубрицкий Даниил Евгеньевич** – студент. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь).

### Information about the authors

**Narkevich Ivan Ivanovich** – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Narkevich@belstu.by

**Farafontova Elena Valer'yevna** – PhD (Physics and Mathematics), Senior Lecturer, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: farafontova@belstu.by

**Zubrytski Daniil Yaugen'yevich** – student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus).

*Поступила 18.05.2018*

УДК 537.633.2

**В. Р. Мадьяров**

Белорусский государственный технологический университет

**ПРИМЕНЕНИЕ ЭФФЕКТОВ ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ  
И МАГНИТОПЛАЗМЕННОГО ОТРАЖЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОННОГО ПЕРЕНОСА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ**

Представлены результаты измерений постоянной вращения в кремнии с продольной и поперечной ориентацией магнитного поля относительно волнового вектора падающей волны (в геометрии Фарадея и Фойгта). Показано, что в образце *n*-Si при продольной ориентации магнитного поля постоянная вращения монотонно возрастает с частотой в диапазоне 30–80 ГГц и примерно на порядок превышает значение, полученное для поперечного магнитного поля. Получены соотношения между частотой зондирующей волны, циклотронной и магнитоплазменной частотами, соответствующие минимальному коэффициенту пропускания в СВЧ- и ИК-диапазонах, которые позволяют определить эффективную массу и концентрацию носителей заряда. Расчеты показывают, что в продольной геометрии электронные параметры полупроводника можно определить по абсолютной величине частотного сдвига магнитоплазменного отражения в дальней ИК-области. В поперечном магнитном поле эти параметры можно определить по частотам минимального и максимального пропускания. В миллиметровом диапазоне для получения полного отражения зондирующего излучения требуются очень сильные магнитные поля (более 10 Тл). Полученные данные позволяют выбрать наиболее эффективную и технически простую схему измерений.

**Ключевые слова:** волны миллиметрового диапазона, эффект Фарадея, магнитоплазменное отражение, концентрация носителей, эффективная масса.

**V. R. Mad'yarov**

Belarusian State Technological University

**ELECTRON TRANSPORT PARAMETERS MEASUREMENTS  
IN SEMICONDUCTORS USING POLARIZATION PLANE ROTATION EFFECT  
AND MAGNETOPLASMA REFLECTION**

Polarization plane rotation constants have been measured using longitudinal and transverse magnetic field relative to the wave vector of the incident wave (in Faraday and Voigt geometry). The rotation constant in the *n*-Si specimen at longitudinal magnetic field was shown to increase linearly with frequency in the 30–80 GHz range and approximately by an order of magnitude exceeded the values obtained for the transverse magnetic field. The relations were obtained between the frequency of the probing wave, cyclotron and magnetoplasma frequencies corresponding to the minimum transmittance in the microwave and IR ranges, which allow determine the effective mass and concentration of charge carriers. Calculations show that in longitudinal geometry the semiconductor electronic parameters can be determined by the absolute value of the frequency shift of the magnetoplasma reflection in the far IR region. In the transverse magnetic field, these parameters can be determined by the frequencies at minimum and maximum transmission. In the millimeter range, very strong magnetic fields (more than 10 Tl) are required to obtain complete reflection of the probing radiation. The obtained data allow to choose the most effective and technically simple measuring system.

**Key words:** millimeter waves, Faraday effect, magnetoplasma reflection, carrier concentration, effective mass.

**Введение.** В настоящее время для определения параметров электронного переноса в полупроводниках, таких как скорости поверхностной и объемной рекомбинации и длина диффузии носителей заряда, применяются бесконтактные методы с использованием излучений миллиметрового и видимого диапазонов [1, 2]. Методы, основанные на измерении фотопроводимости в магнитном поле в геометрии Фойгта и Фарадея, применялись для определения рекомбинационных параметров носителей заряда в эпитаксиальных пленках Cd-Te [3]. Методика

на основе эффекта магнитного вращения в миллиметровом диапазоне позволяет оценить такие параметры, как подвижность, эффективная масса носителей заряда и время релаксации. В данной работе сопоставляются чувствительности измерительных схем с продольным (геометрия Фарадея) и поперечным магнитными полями, параллельным и перпендикулярным к направлению распространения зондирующего излучения соответственно. Измерения с магнитным вращением являются более результативными в сочетании с получением частотной

характеристики пропускания излучения. Это обусловлено тем, что практически все полупроводниковые материалы слабо поглощают излучение миллиметрового и дальнего ИК-диапазонов, причем в данной области частот ( $\sim 10^{12} - 10^{13}$  Гц) находятся магнитоплазменная и циклотронная частоты, а также частота столкновений, определяющая время релаксации носителей. Поэтому данные о таких параметрах, как эффективная масса и концентрация носителей, можно получить по частотам или величине магнитного поля, при которых возможно наблюдать минимальное и максимальное пропускание зондирующего излучения.

**Основная часть.** Наиболее простыми в техническом отношении являются бесконтактные методы исследования переноса носителей заряда в полупроводниках на основе определения коэффициентов отражения или угла поворота плоскости поляризации зондирующего излучения в магнитном поле. Для образцов кремния и германия интерпретация полученных данных значительно упрощается, если измерения проводить в диапазоне, охватывающем миллиметровую и дальнюю ИК-область с малым коэффициентом потерь излучения, которые обусловлены рассеянием на свободных носителях, решеточным и примесным поглощением.

Угол поворота плоскости поляризации  $\alpha_{\parallel}$  зондирующей волны в продольной геометрии (Фарадея) пропорционален разности волновых чисел  $\alpha_{\parallel} = 0,5(k_{+} - k_{-})d$  волн с правой и левой циркулярной поляризацией. В поперечной геометрии (Фойгта) угол  $\alpha_{\perp}$  определяется разностью этих чисел обыкновенной и необыкновенной волн с взаимно перпендикулярными плоскостями колебаний электрического вектора:  $\alpha_{\perp} = 0,5(k_{\parallel} - k_{\perp})d$ . Соответствующие волновые числа определяются из уравнения распространения плоско поляризованной электромагнитной волны с частотой  $\omega$  в направлении оси  $z$  в немагнитной проводящей среде с анизотропной удельной электропроводностью  $\sigma$ , обусловленной магнитным полем:

$$\left(k^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} + i\mu_0\omega\sigma\right)\vec{E} = (\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k}, \quad (1)$$

где  $k$  – модуль волнового вектора;  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость полупроводника;  $\vec{E}$  – вектор напряженности электрического поля волны;  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  – скорость электромагнитной волны в вакууме.

Удельная электропроводность  $\sigma$  в магнитном поле в уравнении (1) определяется матрицей [4]:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix},$$

где  $\sigma_{xx}$  – проводимость, обусловленная дрейфом носителей под действием электрического поля зондирующей волны;  $\sigma_{xy}$  – холловская проводимость полупроводникового образца, вызванная взаимодействием тока проводимости с постоянным магнитным полем с индукцией  $B$ . Компоненты  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{xy}$  в приближении сферических энергетических поверхностей определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= \sigma_0 \tau^{-1} \frac{\tau^{-1} + i\omega}{(\tau^{-1} + i\omega)^2 + \omega_c^2}; \\ \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} &= \sigma_0 \tau^{-1} \frac{\omega_c}{(\tau^{-1} + i\omega)^2 + \omega_c^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\sigma_0$  – удельная электропроводность в постоянном электрическом поле;  $\tau$  – время релаксации импульса;  $\omega_c = eB / m^*$  – циклотронная частота;  $m^*$  – эффективная масса носителей заряда.

Если магнитное поле с индукцией  $B$  направлено вдоль распространения волны (геометрия Фарадея), то  $(\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} = 0$  и для проекций электрического поля  $E_x$  и  $E_y$  на оси  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}\right)E_x + i\mu_0\omega(\sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y) &= 0; \\ \left(k^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}\right)E_y + i\mu_0\omega(-\sigma_{xy}E_x + \sigma_{xx}E_y) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из уравнений (3) следует решение для  $k$  в продольной геометрии:

$$k_{\pm}^2 = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\omega\sigma_{xx} \pm i\mu_0\omega\sigma_{xy}. \quad (4)$$

Если магнитное поле направлено перпендикулярно к направлению распространения волны, то уравнения для проекций  $E_x$  и  $E_y$  примут вид:

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}\right)E_x + i\mu_0\omega(\sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y) &= 0; \\ \left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\omega\sigma_{xx}\right)E_y + i\mu_0\omega\sigma_{xy}E_x &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Экспериментальная установка показана на рис. 1.

В качестве источника зондирующего излучения использовался генератор Г4-142 (диапазон 50–78 ГГц). Волновод имел стандартное прямоугольное сечение и был рассчитан на прохождение моды  $TE_{11}$ . Использовались пластинки образцов  $n$ -кремния и  $n$ -германия толщиной 0,5 мм. Образцы помещались в неподвижную цилиндрическую переходную латунную секцию, состоящую из двух коаксиальных

цилиндров. Один из цилиндров мог поворачиваться и соединяться со второй прямоугольной секцией. Магнитное поле, параллельное направлению распространения волны в месте расположения образца, создавалось внутри обмотки, одетой на цилиндрическую секцию. Поперечное магнитное поле возбуждалось в зазоре между полюсами электромагнита. Плоскость образца кремния перпендикулярна оси [100], для которой известны продольная и поперечная эффективные массы. Направление продольного магнитного поля совпадало с этой осью. Угол поворота цилиндрической секции измерялся по смещению светового пятна лазерного луча, отраженного от зеркала, жестко соединенного с вращающейся секцией. Такая система обеспечивала минимальный измеряемый угол поворота около 0,1 град при данной толщине образца. Мощность прошедшей волны измерялась детекторным блоком, вставленным во вторую прямоугольную секцию.

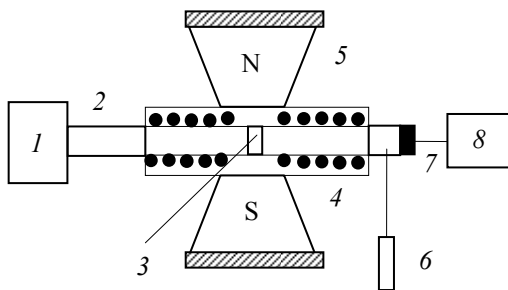


Рис. 1. Экспериментальная установка:

- 1 – СВЧ-генератор;
- 2 – волновод; 3 – образец;
- 4 – обмотка соленоида; 5 – электромагнит;
- 6 – лазер; 7 – детектор; 8 – микровольтметр

Решение уравнений (5) дает выражение для  $k$  в поперечной геометрии:

$$k_{\perp}^2 = \frac{\varepsilon\omega^2 + \mu_0\omega(\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xy}^2)c^2}{\varepsilon\omega^2 + i\mu_0\omega\sigma_{xx}c^2}. \quad (6)$$

Сопоставление углов поворота для продольной и поперечной геометрии с использованием формул (4) и (6) затруднено, так как сравнительно простые аналитические выражения для удельных электропроводностей  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{xy}$ , которые входят в выражения (4) и (6), получены только в изотропном приближении, т. е. для сферических энергетических поверхностей полупроводника.

На рис. 2 показаны зависимости угла поворота  $\alpha$  плоскости поляризации в кремниевой пластинке от частоты зондирующего излучения с одинаковыми продольным ( $\vec{B} \perp \vec{E}, \vec{H}$ ) и поперечным ( $\vec{B} \perp \vec{E} \parallel \vec{H}$ ) постоянными магнитными полями. Величина  $\alpha$  в поперечной геометрии

оказывается значительно меньше, чем при наложении продольного магнитного поля.

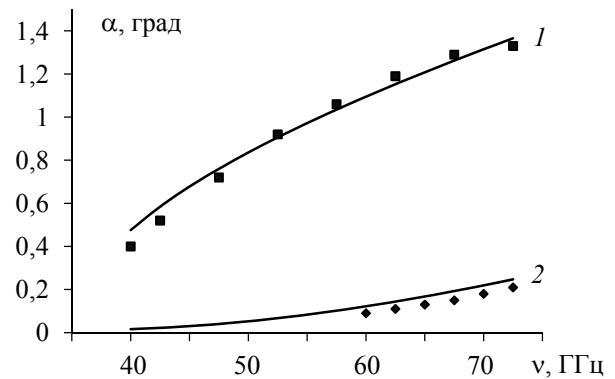


Рис. 2. Зависимости угла поворота плоскости поляризации в продольном (1) и поперечном (2) магнитном поле с индукцией  $B = 0,04$  Тл от частоты зондирующего излучения ( $n$ -Si 96 См/м). Сплошные кривые – расчетные значения

Расчетные значения для углов  $\alpha_{\parallel}$  и  $\alpha_{\perp}$  получены с использованием формулы (4) для  $k$  и выражений для компонент тензора проводимости  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{xy}$  в предположении сферических энергетических поверхностей.

На рис. 3 представлены зависимости углов вращения  $\alpha_{\parallel}$  и  $\alpha_{\perp}$  от магнитного поля в продольной и поперечной геометрии. Для продольного и поперечного полей наблюдается линейная зависимость угла вращения от магнитного поля. Угол вращения плоскости поляризации для продольного поля  $\alpha_{\parallel}$  значительно превышает значения  $\alpha_{\perp}$  даже в гораздо более слабых полях. Таким образом, схема с геометрией Фарадея оказывается более чувствительной к магнитному полю.

Рассмотрим возможность определения параметров полупроводника из магнитоплазменных измерений в дальней ИК и миллиметровой областях при обеих ориентациях магнитного поля.

Для продольного магнитного поля, используя выражения (2), из формулы (4) можно получить уравнение для полного отражения зондирующей волны, которое имеет место при  $k = 0$ :

$$\varepsilon - i \frac{\mu_0 c^2}{\omega} \frac{\sigma_0}{1 + i(\omega \mp \omega_c)\tau} = 0. \quad (7)$$

Для дальней ИК-области ( $\omega \sim 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ) выполняется условие  $(\omega \mp \omega_c)\tau \gg 1$ . Тогда в слабых магнитных полях решение уравнения (7) дает величину сдвига магнитоплазменного отражения:

$$\Delta\omega = \omega^* - \omega_p = \mp \frac{1}{2}\omega_c, \quad (8)$$

где  $\omega^*$  – частота максимального отражения при отсутствии магнитного поля;  $\omega_p$  – плазменная частота:

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon\epsilon_0 m^*} = \frac{\sigma_0}{\epsilon\epsilon_0 \tau}. \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) следуют выражения для эффективной массы и концентрации:

$$m^* = \frac{eB}{2\Delta\omega}; \quad n = \frac{\epsilon\epsilon_0 m^* (\omega^* + \Delta\omega)^2}{e^2}. \quad (10)$$

Для миллиметровой и субмиллиметровой областей ( $\omega \sim 10^{11} - 10^{12} \text{ с}^{-1}$ ) и в умеренных магнитных полях выполняется условие  $(\omega \mp \omega_c)\tau \ll 1$ . Тогда из формулы (7) следует уравнение для частоты, соответствующей полному отражению:

$$\omega^3 \pm 2\omega_c \omega^2 + \frac{\omega}{\tau^2} \mp \omega_p^2 \omega_c = 0. \quad (11)$$

Численное решение уравнения (11) с использованием магнитной индукции  $B$  в качестве параметра показывает, что для типовых значений  $m^*$ ,  $\tau$  и  $\sigma_0$  полное отражение в рассматриваемом частотном диапазоне достигается в очень сильных магнитных полях (более 10 Тл).

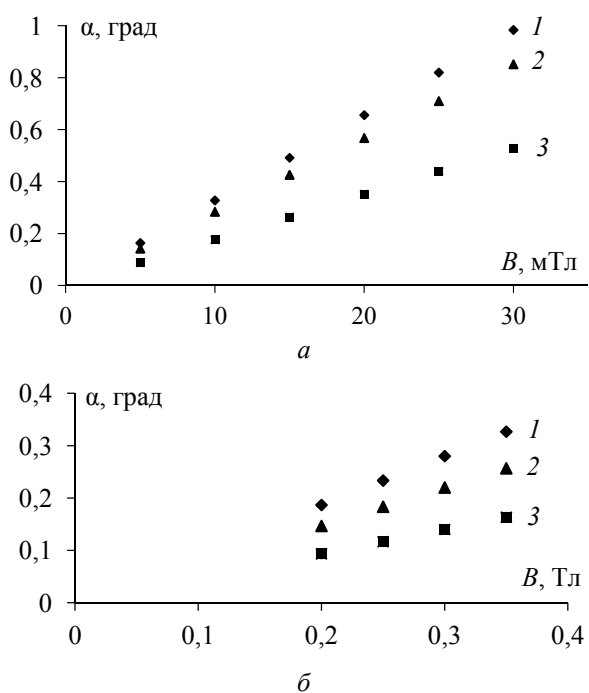


Рис. 3. Зависимости угла магнитного вращения от магнитного поля для  $n$ -кремния с удельной электропроводностью  $\sigma_0 = 96 \text{ См/м}$  в продольной (а) и поперечной (б) геометрии на частотах: 1 – 63 ГГц; 2 – 56 ГГц; 3 – 53 ГГц

Рассмотрим отражение в поперечном магнитном поле. Решение уравнения (6) дает частоту, соответствующую максимальному про-

пусканию при  $k = \omega/c$ . Для дальней ИК-области получается уравнение:

$$\omega^4 - \left[ 2\omega_p^2 + \left( \frac{kc}{\sqrt{\epsilon}} \right)^2 \right] \omega^2 + \omega_p^2 \left[ \omega_p^2 - \omega_c^2 + \left( \frac{kc}{\sqrt{\epsilon}} \right)^2 \right] = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) дает частоту максимума пропускания в поперечном магнитном поле:

$$\omega_{\perp \max}^* = \frac{\omega_p}{\sqrt{2\epsilon}} \sqrt{2\epsilon \pm \sqrt{1 + \left( \frac{2\epsilon\omega_c}{\omega_p} \right)^2}}. \quad (13)$$

Для максимума отражения (минимума пропускания) в дальней ИК-области, при котором  $k = 0$ , из (12) следует уравнение:

$$\omega^4 - 2\omega_p^2 \omega^2 + \omega_p^2 (\omega_p^2 - \omega_c^2) = 0.$$

Отсюда частота, соответствующая минимальному пропусканию в поперечном магнитном поле:

$$\omega_{\perp}^* = \sqrt{\omega_p (\omega_p \pm \omega_c)}. \quad (14)$$

Из уравнения (14) с учетом неравенства  $\omega < \omega_p$  следует выражение для эффективной массы:

$$m^* = \frac{eB\omega_{\perp}^*}{\omega_p^2 - \omega_{\perp}^{*2}}, \quad (15)$$

где  $\omega_p$  – плазменная частота, соответствующая максимальному отражению при отсутствии магнитного поля. Подставив выражение (15) в формулу для  $\omega_p$ , можно рассчитать концентрацию носителей через измеряемые значения  $\omega_p$  и  $\omega_{\perp}^*$ :

$$n = \frac{\epsilon\epsilon_0 B \omega_{\perp}^*}{e(\omega_p^2 - \omega_{\perp}^{*2})}. \quad (16)$$

В миллиметровой и субмиллиметровой областях при поперечной геометрии, т. е. при условиях  $(\omega \pm \omega_p) \ll 1$  и  $\omega \ll \omega_p$ , как следует из уравнений, полученных в [5], полное отражение в умеренных магнитных полях не достигается.

**Заключение.** Из экспериментального сопоставления эффективности вращения плоскости колебаний излучения в области частот 30–70 ГГц показано, что в образцах  $n$ -Si и  $n$ -Ge при продольной ориентации магнитного поля постоянная вращения примерно на порядок превышает значение, полученное для поперечного магнитного поля и монотонно возрастает с



частотой. Расчеты показывают, что для оценки таких параметров полупроводника, как эффективная масса и концентрация носителей, целесообразно использовать зондирование излучением дальнего ИК-диапазона (примерно 50–100 мкм). При продольной геометрии эти параметры

можно оценить по величине частотного сдвига магнитоплазменного отражения. В поперечном магнитном поле эти параметры наиболее просто определяются по частотам, соответствующим минимальному пропусканию в отсутствие магнитного поля и при его включении.

### Литература

1. Separation of the bulk lifetime and surface recombination velocities semiconductor wafer by a single microwave photoconductance / F. X. Chen [et al.] // *Semicond. Sci. and Technology*. 2004. Vol. 19, no. 9. P. 959–963.
2. Манухов В. В., Федорцов А. Б., Иванов А. С. Лазерно-интерференционный метод определения длины диффузии носителей заряда в полупроводниках // *Физика и техника полупроводников*. 2015. Т. 49, вып. 9. С. 1153–1158.
3. Костюченко В. Я., Протасов Д. Ю. Фотоэлектромагнитный комплекс методов определения рекомбинационно-диффузионных параметров носителей заряда в эпитаксиальных пленках кадмий – ртуть – теллур *p*-типа // *Вестник НГУ. Сер. Физика*. 2011. Т. 6, вып. 1. С. 104–115.
4. Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. М.: Наука, 1975. 400 с.
5. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989. 543 с.

### References

1. Chen F. X., Cui R. Q., Xu L., Meng F. Y., Zhao Z. X. and Zhou Z. B. Separation of the bulk lifetime and surface recombination velocities semiconductor wafer by a single microwave photoconductance. *Semicond. Sci. and Technology*, 2004, vol. 19, no. 9, pp. 959–963.
2. Manukhov V. V., Fedortsov A. B., Ivanov A. S. Laser-interferometry method of determination of charge carrier diffusion length in semiconductors. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Semiconductor physics and engineering], 2015, vol. 49, issue 9, pp. 1153–1158 (In Russian).
3. Kostyuchenko V. Ya., Protasov D. Yu. Photoelectromagnetic complex of methods to determine the recombination-diffusion parameters of charge carriers in p-type mercury – cadmium – telluride epitaxial films. *Vestnik NGU* [Bulletin of NSU], series Physics, 2011, vol. 6, issue 1, pp. 104–115 (In Russian).
4. Bass F. G., Gurevich Yu. G. *Goryachie elektrony i sil'nye elektromagnitnye volny v plazme poluprovodnikov i gasovogo razryada* [Hot electrons and strong electromagnetic waves in plasma of semiconductors and gas discharge]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 400 p.
5. Nikol'skiy V. V., Nikol'skaya T. I. *Elektrodinamika i rasprostranenie radiovoln* [Electrodynamics and propagation of radio waves]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 543 p.

### Информация об авторе

**Мадьяров Владимир Рафкатович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: Madyarov@belstu.by

### Information about the author

**Mad'yarov Vladimir Rafkatovich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Madyarov@belstu.by

Поступила 12.03.2018

УДК 539.211:539.1.06

**О. Г. Бобрович**

Белорусский государственный технологический университет

**КОМПОЗИЦИОННЫЙ СОСТАВ ЦИРКОНИЕВОГО ПОКРЫТИЯ,  
ОСАЖДЕННОГО НА КРЕМНИЙ  
В УСЛОВИЯХ ИОННОГО АССИСТИРОВАНИЯ**

В представленной работе мы исследовали состав и распределение элементов в покрытии, нанесенном на пластины (100) Si в условиях ионного ассистирования при комнатной температуре, а также химические связи элементов в поверхностном слое кристаллов кремния при нанесении Zr-покрытия. Элементный состав покрытия и распределение элементов по глубине изучали с применением резерфордовского обратного рассеяния ионов гелия и вторичной ионной масс-спектрометрии. Установлено, что покрытие однородно по составу по всей толщине. В состав покрытий на кремнии входят атомы осаждаемого металла Zr, технологических примесей C, O и Al, а также Si в результате встречной диффузии из подложки в покрытие. Рост ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов  $Zr^+$  от 5 до 10 кВ приводит к уменьшению толщины покрытия при одинаковом времени модифицирования образцов кремния. Рассчитанная средняя скорость осаждения покрытия составляла 0,3–0,5 нм/мин. В поверхностном слое покрытия присутствуют оксиды ZrO и SiO, карбиды ZrC и SiC, углеводороды CH, молекулы  $C_2$ , а также атомы Zr, Si, C, O, Al.

**Ключевые слова:** Zr-покрытия, кремний, элементный состав, химические связи элементов в покрытии.

**O. G. Bobrovich**

Belarusian State Technological University

**COMPOSITION OF ZIRCONIUM COATING PRECIPITATED ON SILICON  
IN THE CONDITIONS OF IONIC ASSISTING**

In the present study we investigated the composition and distribution of elements in the coating deposited on the plate (100) Si in conditions of ion assisting at room temperature, as well as chemical bonds of elements in the surface layer of silicon crystals at deposition of the Zr-coating. We studied the elemental composition of the coating and distribution of elements in depth, using Rutherford backscattering of helium ions and secondary ion mass spectrometry. It is found that the coating is uniform in composition throughout its thickness. The composition of coatings on silicon atoms includes the deposited metal Zr, technological impurities C, O, Al, and Si as a result of counter-diffusion from the substrate into the coating. An increase of the accelerating voltage for assisting  $Zr^+$  ions from 5 to 10 kV results in a decrease in the thickness of the coating at the same time modifying the silicon samples. The calculated average deposition rate of the coating was 0.3–0.5 nm/min. The surface layer of the coating contain carbide ZrC, SiC, oxides ZrO, SiO, CH hydrocarbons,  $C_2$  molecules, as well as Zr, Si, C, O, Al atoms.

**Key words:** Zr-coatings, silicon, elemental composition, chemical bonds of elements in the surface.

**Введение.** Ионно-лучевые технологии являются одними из наиболее перспективных методов модифицирования свойств поверхности материалов [1]. В процессе модифицирования различных материалов в их поверхностных слоях происходят сложные физико-химические процессы, которые могут существенно изменить структуру и свойства поверхности материала. В частности, можно увеличить ее нанотвердость и микротвердость, износостойкость к механическому истиранию [2, 3], улучшить адгезионные способности поверхности модифицированных материалов. Изучение таких процессов, протекающих на поверхности кремния,

модифицируемого осаждением металлических покрытий в условиях ионного ассистирования, вызвано необходимостью определения оптимальных условий для получения покрытий с заданными свойствами, которые могут использоваться в качестве проводящих, изолирующих и т. п. В настоящей работе исследуются закономерности процессов взаимопроникновения и распределения элементов подложки и покрытия при осаждении тонких Zr-пленок в условиях ассистирования ионами  $Zr^+$  при ускоряющем напряжении 5 и 10 кВ. Рост покрытия сопровождается формированием переходного перемешанного слоя в области межфазной границы

покрытие – подложка, толщиной которого можно управлять, формируя адгезионно-устойчивые покрытия, что обеспечивает увеличение срока эксплуатации изделий с покрытиями. Нанесение металлических покрытий в условиях ионного ассистирования проводили с использованием вакуумного резонансного плазменного ионного источника. Этот тип ионного источника с электродами, изготовленными из материала наносимого покрытия, позволяет одновременно получать регулируемые потоки ионов металла  $J_i$  и нейтральных атомов  $J_A$  осаждаемого металла. Время модифицирования кремния ионами  $Zr^+$  составляло 1, 3, 6 и 12 ч, что позволяло получить различные ионные потоки при осаждении  $Zr$ -покрытий. Вакуум в процессе осаждения покрытий в рабочей камере достигал  $\sim 10^{-2}$  Па. Плотность ионного тока при модифицировании менялась в пределах  $\sim 2,5\text{--}5,0$   $\mu\text{А}/\text{см}^2$ . Отношение плотности ионного потока к плотности нейтрального потока  $J_i / J_A$  составляло 0,02, что соответствовало росту покрытия на кремнии [4].

Для элементного анализа формируемых структур покрытия – подложка и распределения элементов по глубине применялись методы резерфордовского обратного рассеяния (РОР) ионов гелия с энергией  $E_0 = 2$  МэВ, геометрией рассеяния  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = 12^\circ$ ,  $\theta = 168^\circ$ , компьютерного моделирования спектров РОР по программе RUMP [5] и вторичной ионной масс-спектрометрии (ВИМС). Энергетическое разрешение детектора в методе РОР составляло 25 кэВ. Энергия первичных ионов  $Ag^+$  в методе ВИМС для послойного распыления мишени и анализа состава твердого тела по глубине была 4 кэВ.

**Основная часть.** На рис. 1 представлены экспериментальные спектры РОР ионов гелия от кремниевых образцов, модифицированных осаждением  $Zr$ -покрытий в условиях одновременного ассистирования ионами  $Zr^+$  при ускоряющем напряжении 10 кВ. Вертикальными стрелками (рис. 1) отмечены номера каналов, которые связаны с энергиями рассеяния ионов гелия на атомах соответствующих элементов, локализованных на поверхности образцов. В числе элементов, находящихся в поверхностном слое исследуемых материалов, на спектрах идентифицируются цирконий, а также С, О, Si. Сдвиг сигнала от кремния в область меньших номеров каналов на спектрах 1, 2 и 3 свидетельствует о том, что на поверхности кристалла кремния образуется покрытие. Аналогичные закономерности по элементному составу и росту покрытий на кремнии наблюдались на спектрах РОР от образцов Si, модифицированных ионами  $Zr^+$  при ускоряющем напряжении 5 кВ и времени модифицирования 1, 3, 6 и 12 ч.

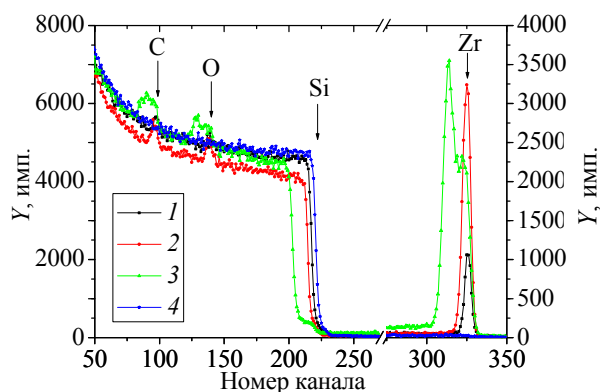


Рис. 1. Спектры РОР ионов гелия с  $E_0 = 2$  МэВ от кристаллов (100) Si, модифицированных ионно-ассистируемым осаждением  $Zr$ -покрытий при ускоряющем напряжении 10 кВ и времени осаждения:  
1 – 1 ч; 2 – 3 ч; 3 – 6 ч; 4 – 0 ч (исходный образец кремния)

Наряду с цирконием количественный анализ спектров РОР ионов гелия от модифицированных методом ионно-ассистируемого осаждения образцов кремния выявил высокие концентрации кислорода и углерода (таблица).

#### Слоевые концентрации элементов, рассчитанные по спектрам РОР от образцов (100) Si, модифицированных в различных условиях

Режим обработки (100) Si		Толщина покрытия, нм	Слоевые концентрации ( $Nt$ ), $10^{17}$ ат./см <sup>2</sup>		
$U$ , кВ	$t$ , ч		C	O	Zr
5	1	~20	6,9	3,4	0,6
5	3	~50	16,8	8,7	2,5
5	6	~240	66,2	41,6	7,6
5	12	~390	89,0	55,1	12,0
10	1	~15	10,0	3,7	0,5
10	3	~35	22,2	8,8	2,0
10	6	~180	76,5	41,0	6,5

Анализ данных, представленных в таблице, свидетельствует о том, что относительные слоевые концентрации углерода  $(Nt)_C / (Nt)_{Zr}$  и кислорода  $(Nt)_O / (Nt)_{Zr}$  уменьшаются с увеличением времени модифицирования кремния. Из представленных данных также следует, что с увеличением времени модифицирования увеличивается слоевое содержание кислорода, но остается меньше слоевых концентраций углерода при аналогичных условиях осаждения покрытия. Отношение слоевых концентраций углерода и кислорода  $(Nt)_C / (Nt)_O$  уменьшается от 2,0 до 1,6 при ускоряющем напряжении 5 кВ и от 2,7 до 1,9 при ускоряющем напряжении 10 кВ с увеличением времени модифицирования образцов кремния.

Концентрационные глубинные профили элементов в структурах Zr-покрытие – Si, полученные компьютерным моделированием спектров РОР ионов гелия, представлены на рис. 2. Толщина покрытия с увеличением времени модифицирования, как и следовало ожидать, растет (таблица). Средняя скорость осаждения покрытия при этом составляет 0,3–0,5 нм/мин.

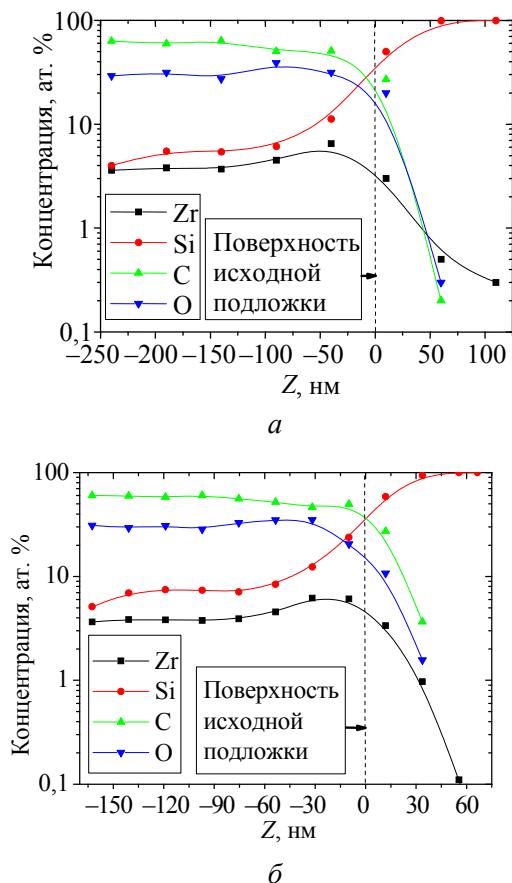


Рис. 2. Распределение элементов в структуре Zr – Si после ионно-ассистируемого нанесения Zr на кремний при ускоряющем напряжении: а – 5 кВ; б – 10 кВ. Время модифицирования – 6 ч

Пунктирной линией выставлена поверхность исходной подложки кристалла кремния, которая является границей между покрытием и подложкой. Для этого использовалась специально разработанная методика введения ксенонового маркера [6]. На концентрационных профилях идентифицируемых элементов в структурах покрытие – Si (рис. 2) обнаруживается эффект глубинного проникновения циркония в кремний. Средний проективный пробег однозарядных ионов циркония в кремнии  $R_p$  с учетом продольного разброса пробегов  $\Delta R_p$  по программе TRIM дает значения  $R_p \pm \Delta R_p = (12,9 \pm 4,3)$  нм (для  $U = 5$  кВ) и  $R_p \pm \Delta R_p = (20,0 \pm 6,5)$  нм (для  $U = 10$  кВ). Используемый ион-

ный источник работает без электромагнитной сепарации, и поэтому при расчете ионного потока нужно учитывать, что зарядовый спектр ионного пучка, эмитируемого источником, характеризуется наличием ионов с разным зарядом [7]. Расчет среднего проективного пробега для двух- и трехзарядных ионов циркония в кремнии показывает, что глубина проникновения циркония в кремний выше проективного пробега ионов. Распределение циркония составляет 4–5 ат. % по всей толщине покрытия с увеличением до 6 ат. % к границе раздела фаз. Для уточнения данных моделирования спектров РОР при исследовании структур Zr – Si использовали метод ВИМС, значения которого приведены на рис. 3.

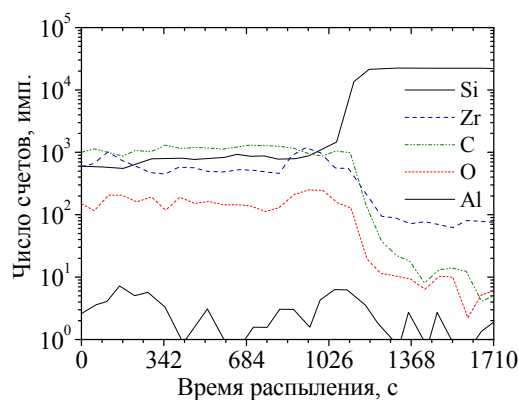


Рис. 3. Профили концентрации компонентов в структуре Zr – Si, полученные с помощью метода ВИМС. Время модифицирования – 6 ч

Результаты анализа концентрационных профилей, полученных методом ВИМС, показывают, что содержание Zr постоянно по всему покрытию, увеличиваясь вблизи границы раздела покрытие – подложка. Также подтверждается высокое содержание C и O в покрытии. Используя коэффициенты относительной чувствительности, уровни элементов C и O на рис. 3 должны быть увеличены в 5 раз. Это позволяет говорить, что относительная концентрация C и O, определенная методом ВИМС, сравнима с данными для этих элементов, полученными на основе метода РОР. Нужно отметить, что для построения концентрационных профилей на рис. 2, б и 3 структура покрытие – подложка с применением методов РОР и ВИМС использовались фрагменты одного образца. Следы Al в покрытии, вероятно, являются результатом распыления изоляторов ионного источника, содержащего оксиды алюминия, в которых крепятся электроды. Данные метода РОР, а также дополнительные сведения о массовых фракциях при распылении поверхности во время послойного анализа состава покрытия

методом ВИМС позволяют предположить о возможной комбинации кислорода с цирконием в форме оксида (например,  $ZrO$  и  $ZrO_2$ ) и карбида (например,  $ZrC$ ).

Данные масс-спектрометрии вторичных ионов представлены на рис. 4.

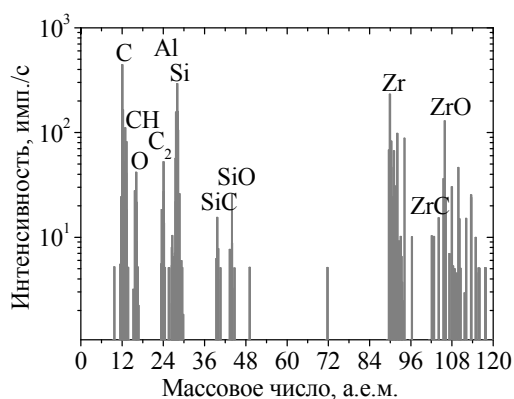


Рис. 4. Масс-спектр вторичных ионов, полученный от структуры Zr – Si

Экспериментальный масс-спектр в структуре Zr – Si показывает наличие в поверхностном слое покрытия оксидов  $ZrO$  и  $SiO$ , карбидов  $ZrC$  и  $SiC$ , углеводородов  $CH$  и молекул  $C_2$ , а также атомов Zr, Si, C, O, Al. Анализ данных масс-спектрометрии вторичных ионов обнаруживает содержание водорода, находящегося в связанном состоянии в поверхностном слое покрытия на кремнии, что подтверждает данные резонансной ядерной реакции при взаимодействии ионов азота с водородом  ${}^1H({}^{15}N, \alpha\gamma){}^{12}C$  путем амселевского сканирования энергии ионов  $N^+$  в интервале 6,38–7,00 МэВ, полученные нами ранее [8], в которых показано, что пленки, осажденные при испарении металлов, могут содержать значительные концентрации атомов водорода.

**Заключение.** В результате проведения исследований с применением набора независимых

методов POP и ВИМС элементного состава конструкции покрытия – подложка установлено, что в состав покрытий, осаждаемых на кремниевую подложку, входят кроме металла Zr, C и O из атмосферы остаточного вакуума в мишенной камере, а также Si, как результат встречной диффузии атомов матрицы в покрытие. Анализ распределения элементов по глубине свидетельствует о достаточно равномерном содержании по толщине покрытий Zr, C и O, относительная концентрация которых снижается в области межфазной границы раздела покрытие – подложка. При этом данные методов POP, ВИМС показывают, что концентрация Si уменьшается от межфазной границы к поверхности не по экспоненциальному закону, а сохраняется по толщине покрытия на уровне 4–5 ат. %. Можно констатировать, что независимые методы ядерно-физического анализа состава образцов позволяют получать данные, которые удовлетворительно подтверждают друг друга. При уменьшении ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов  $Zr^+$  от 10 до 5 кВ толщина покрытий увеличивается при одинаковом времени модифицирования образцов кремния, что связано с различной интенсивностью процессов распыления, осаждаемого покрытия, при различных энергиях ассистирующих ионов. Рассчитанная средняя скорость осаждения Zr покрытий в условиях ионного ассистирования  $Zr^+$  составляла 0,3–0,5 нм/мин. Установлено, что при достижении толщины покрытия ~100 нм процесс его осаждения стабилизируется и атомные концентрации элементов покрытия (Zr, C, O, Si) по всей толщине не изменяются, увеличиваясь (для Si) и уменьшаясь (для Zr, C, O) к границе раздела фаз покрытие – подложка. В поверхностном слое покрытия присутствуют оксиды  $ZrO$  и  $SiO$ , карбиды  $ZrC$  и  $SiC$ , углеводородные соединения  $CH$ , молекулы  $C_2$ , а также атомы Zr, Si, C, O, Al.

### Литература

1. Комаров Ф. Ф., Комаров А. Ф. Физические процессы при ионной имплантации в твердые тела Минск: Технопринт, 2001. 392 с.
2. Углов В. В., Черенда Н. Н., Кулешов А. К. Трибологические свойства углеродных покрытий, осажженных на алюминий // Взаимодействие излучения с твердым телом: материалы III Междунар. науч. конф., Минск, 6–8 окт. 1999 г.: в 2 ч. / Белорус. гос. ун-т. Минск, 1999. Ч. 2. С. 270–272.
3. Бобрович О. Г., Ташлыков И. С., Тульев В. В. Микротвердость поверхности сталей марок 40X, 45 и СТЗ, модифицированной осаждением тонких покрытий в условиях ассистирования ионами титана и кремния // Труды БГТУ. 2012. № 6 (153): Физ.-мат. науки и информатика. С. 78–81.
4. Carter G., Colligon J., Tashlykov I. S. A simple theory and experimental investigation of ion assisted deposition of cobalt on silicon // J. of Advanced Materials. 1999. Vol. 5, no. 1. P. 1–6.
5. Doolittle L. R. A semiautomatic algorithm for Rutherford backscattering analysis // Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. 1986. Vol. B15. P. 227–238.
6. Композиционный состав и повреждение поверхности кремния ионно-ассистированным нанесением тонких пленок / И. С. Ташлыков [и др.] // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2009. № 5. С. 92–95.

7. Multiplespecies ion beams from titanium-hafnium alloy cathodes in vacuum are plasmas / J. Sasaki [et al.] // *J. Appl. Phys.* 1993. Vol. 73. P. 7184–7187.

8. Изучение ядерно-физическими методами металлосодержащих (Ti, Co)-покрытий, осажденных методом ионного ассистирования на кремний / О. Г. Бобрович [и др.] // *Физика и химия обработки материалов*. 2006. № 1. С. 54–58.

### References

1. Komarov F. F., Komarov A. F. *Fizicheskie protsessy pri ionnoy implantatsii v tverdom tele* [Physical processes during ion implantation in solids]. Minsk, Tekhnoprint Publ., 2001. 392 p.

2. Uglov V. V., Cherenda N. N., Kuleshov A. K. Tribological properties of carbon coatings deposited on aluminum. *Materialy III mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii "Vzaimodeystvie izlucheniya s tverdyim telom"*: v 2 chastyach [Materials of III International Scientific Conference "Interaction of radiation with solids": in 2 parts]. Minsk, 1999, part 2, pp. 270–272 (In Russian).

3. Bobrovich O. G., Tashlykov I. S., Tul'ev V. V. Microhardness of the surfaces of steels 40X, 45 and ST3 modified by deposition of thin coatings under the conditions of titanium and silicon ions. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 78–81 (In Russian).

4. Carter G., Colligon J., Tashlykov I. S. A simple theory and experimental investigation of ion assisted deposition of cobalt on silicon. *J. of Advanced Materials*, 1999, vol. 5, no. 1, pp. 1–6.

5. Doolittle L. R. A semiautomatic algorithm for Rutherford backscattering analysis. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res.*, 1986, vol. B15, pp. 227–238.

6. Tashlykov I. S., Bobrovich O. G., Barayshuk S. M., Mikhalkovich O. M., Antonovich I. P. Composition and damage of silicon surface at ion assisted deposition of thin films. *Poverkhnost'. Rentgenovskie, sinkhrotronnye i neytronnye issledovaniya* [Journal of Surface Investigation: X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques], 2009, no. 5, pp. 92–95 (In Russian).

7. Sasaki J., Suglyama K., Xiang Y., Brown I. Multiplespecies ion beams from titanium-hafnium alloy cathodes in vacuum are plasmas. *J. Appl. Phys.*, 1993, vol. 73, pp. 7184–7187.

8. Bobrovich O. G., Tashlykov I. S., Tul'ev V. V., Barayshuk S. M. The study of nuclear-physical methods of metal (Ti, Co)-coating deposited by ion-assisting of on silicon. *Fizika i khimiya obrabotki materialov* [Physics and chemistry of material processing], 2006, no. 1, pp. 54–58 (In Russian).

### Информация об авторе

**Бобрович Олег Георгиевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olegbobrovich@belstu.by

### Information about the author

**Bobrovich Oleg Georgievich** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olegbobrovich@belstu.by

*Поступила 15.05.2018*

УДК 539.211:539.1.06

**О. Г. Бобрович<sup>1</sup>, С. М. Барайшук<sup>2</sup>, А. И. Туровец<sup>3</sup>, В. В. Яскельчик<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет<sup>2</sup>Белорусский государственный аграрный технический университет<sup>3</sup>Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка**МОРФОЛОГИЯ И СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТИ СПЛАВА АМГ2М,  
МОДИФИЦИРОВАННОГО ОСАЖДЕНИЕМ МОЛИБДЕНА  
В УСЛОВИЯХ ИОННОГО АССИСТИРОВАНИЯ**

В данной работе изучали закономерности смачивания и микротвердость поверхности алюминиевого сплава АМГ2М после модифицирования осаждением молибдена в условиях ионного ассистирования при ускоряющем напряжении 3, 6, 9, 12 и 15 кВ для ассистирующих ионов  $\text{Mo}^+$  и интегральных потоков ионов  $(1,1-2,1) \cdot 10^{17} \text{Mo}^+/\text{cm}^2$ . Морфология поверхности исходных и модифицированных образцов изучалась с использованием атомно-силовой микроскопии в контактном режиме. Смачивание исходных и модифицированных образцов сплава АМГ2М дистиллированной водой определяли по равновесному краевому углу  $\theta$  смачивания (РКУС). Средняя шероховатость исходного образца сплава АМГ2М составляла 34,3 нм и снижалась при увеличении ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов  $\text{Mo}^+$  до 7,8 нм при  $U = 12$  кВ и до 9,9 нм при  $U = 15$  кВ. При внедрении сравнимых доз ионов молибдена в образцы сплава с увеличением ускоряющего напряжения значения РКУС также увеличиваются. Исходная поверхность сплава была гидрофильной ( $\theta = 64,8^\circ$ ) и оставалась гидрофильной после модифицирования при  $U = 3$  и 6 кВ. После модифицирования сплава при  $U = 9, 12, 15$  кВ для ассистирующих ионов поверхность стала гидрофобной и значение РКУС увеличилось до  $\theta = 98,1^\circ$  при 15 кВ. Относительное изменение микротвердости модифицированных образцов увеличилось на 15% при  $U = 9$  кВ и уменьшилось на 8% при  $U = 6$  кВ.

**Ключевые слова:** сплав алюминия АМГ2М, Мо-покрытия, смачиваемость, гидрофобная и гидрофильная поверхность, микротвердость.

**O. G. Bobrovich<sup>1</sup>, S. M. Barayshuk<sup>2</sup>, A. I. Turovets<sup>3</sup>, V. V. Yaskel'chik<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Belarusian State Technological University<sup>2</sup>Belarusian State Agrarian Technical University<sup>3</sup>Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank**MORPHOLOGY AND SURFACE PROPERTIES OF ALLOY 5251, MODIFIED  
BY DEPOSITION OF MOLYBDENUM IN CONDITIONS OF ION ASSISTANCE**

In this paper we studied the wetting behavior and microhardness of the surface of the aluminum alloy 5251 after modification by the deposition of molybdenum under ion assisting conditions at an accelerating voltage of 3, 6, 9, 12 and 15 kV for assisting  $\text{Mo}^+$  ions and integral ion fluxes of  $(1.1-2.1) \cdot 10^{17} \text{Mo}^+/\text{cm}^2$ . The morphology of the surface of the initial and modified samples was studied using atomic-force microscopy in the contact regime. Wetting of the initial and modified samples of the alloy 5251 with distilled water was determined from the equilibrium contact angle  $\theta$  of the wetting. The average roughness of the initial sample of the alloy 5251 was 34.3 nm and decreased with an increase in the accelerating voltage for the assisting  $\text{Mo}^+$  ions to 7.8 nm at  $U = 12$  kV and 9.9 nm at  $U = 15$  kV. When the comparable doses of molybdenum ions were introduced into the samples of the alloy with an increase in the accelerating voltage, the values of the contact angle of wetting also increased. The initial surface of the alloy was hydrophilic ( $\theta = 64.8^\circ$ ) and remained hydrophilic after modification at  $U = 3$  and 6 kV. After modifying the alloy at  $U = 9, 12, 15$  kV for assisting ions, the surface became hydrophobic and the value of the contact angle of wetting increased to  $\theta = 98.1^\circ$  at 15 kV. The relative change in the microhardness of the modified samples increases by 15% at  $U = 9$  kV and decreases by 8% at  $U = 6$  kV.

**Key words:** aluminum alloy 5251, Mo-coating, wettability, hydrophobic and hydrophilic surface, microhardness.

**Введение.** Алюминиевые сплавы широко используются во многих отраслях промышленности, в том числе связанных с развитием энергосберегающих технологий, в качестве

конструкционных материалов современной техники [1]. Структура и свойства поверхности и приповерхностных слоев алюминиевых сплавов определяют их функциональные и

эксплуатационные характеристики, такие как износостойкость, коррозионная стойкость, микротвердость, смачивание поверхности [2–4]. Применение ионных пучков вызывает в материале как химические, так и физические изменения. Для улучшения физико-механических и физико-химических свойств алюминиевых сплавов используются различные методы ионно-лучевой модификации. В данной работе изучали закономерности смачивания и микротвердость поверхности алюминиевого сплава АМг2М после модифицирования осаждением молибдена в условиях ионного ассистирования. Покрытия Мо наносились на сплав АМг2М с использованием резонансного ионного источника вакуумной электродуговой плазмы. Данный источник создает плазму вакуумного электродугового разряда, в которой одновременно генерируются положительные ионы и нейтральная фракция из материала электродов источника ионов. В качестве материала электродов использовался чистый молибден 99,9%. Осаждение молибденового покрытия проводили при ускоряющем напряжении 3, 6, 9, 12 и 15 кВ для ассистирующих ионов  $Mo^+$  и интегральных потоков ионов  $(1,1-2,1) \cdot 10^{17} Mo^+/cm^2$ . Морфология поверхности исходных и модифицированных образцов изучалась с использованием атомно-силовой микроскопии в контактном режиме (атомно-силовой микроскоп NT-206, зонды CSC21), а измерение микротвердости проведено на приборе AFFRI-MVDM8 методом Виккерса. Смачивание исходных и модифицированных образцов сплава АМг2М дистиллированной водой определяли по равновесному краевому углу  $\theta$  смачивания (РКУС). Краевой угол определяли по основным размерам капель воды, наносимой на исследуемые образцы: по высоте и диаметру ее основания. Для получения воспроизводимых результатов капли воды, наносимые на образцы, имели примерно одинаковый объем  $V = (47,6 \pm 0,3) \cdot 10^{-3}$  мл. Погрешность в измерении РКУС составляла не более 2%.

**Основная часть.** Метод атомно-силовой микроскопии использовался для изучения топографии и шероховатости исходных и модифицированных образцов сплава алюминия. На рис. 1 показаны изображения исходной поверхности сплава АМг2М и модифицированной осаждением Мо в условиях ионного ассистирования при ускоряющем напряжении для ионов  $Mo^+$   $U = 15$  кВ, а также показаны капли дистиллированной воды на этих образцах.

Характеристики поверхности исходного сплава АМг2М и сплава с нанесенным Мо-покрытием представлены в табл. 1. Средняя шероховатость исходного образца сплава АМг2М

составляла 34,3 нм и снижалась при увеличении ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов  $Mo^+$  до 7,8 нм при  $U = 12$  кВ и 9,9 нм при  $U = 15$  кВ. При внедрении сравнимых доз ионов молибдена в образцы сплава с увеличением ускоряющего напряжения значения РКУС также увеличивались (рис. 2). Исходная поверхность сплава была гидрофильной ( $\Theta = 64,8^\circ$ ) и оставалась гидрофильной после модифицирования при  $U = 3$  и 6 кВ. После модифицирования сплава при  $U = 9, 12, 15$  кВ для ассистирующих ионов поверхность стала гидрофобной и значение РКУС увеличилось до  $\Theta = 98,1^\circ$  при 15 кВ.

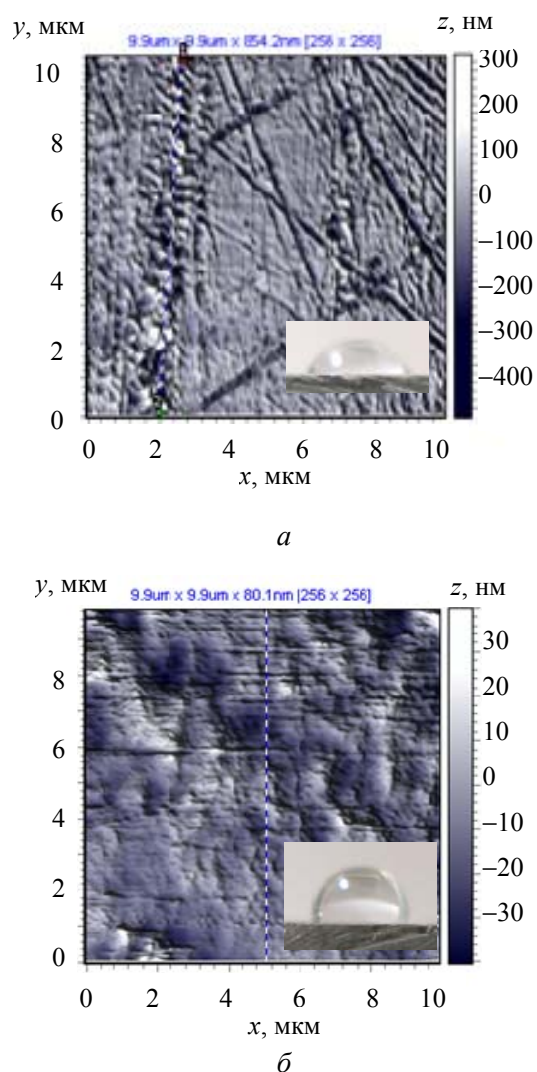


Рис. 1. АСМ-изображения исходной (а) и модифицированной (б) осаждением Мо в условиях ионного ассистирования при  $U = 15$  кВ для ионов  $Mo^+$  поверхности сплава АМг2М

Полученные результаты указывают на возможность управления шероховатостью поверхности пленки и ее смачиваемостью путем



изменения ускоряющего напряжения для ассистирующего осаждение покрытия ионов  $\text{Mo}^+$  и их дозы при модифицировании сплава алюминия АМг2М, как сообщалось ранее некоторыми авторами [5].

Таблица 1

**Параметры морфологии поверхности исходного алюминиевого сплава АМг2М и после его модифицирования осаждением молибдена в условиях ионного ассистирования**

Ион	$U$ , кВ	$\Theta$ , град	$R_a$ , нм	$R_q$ , нм	$Z$ , нм
–	0	64,8	34,3	48,3	655,8
Mo	3	68,5	15,5	21,0	310,9
Mo	6	75,8	16,3	23,1	322,4
Mo	9	92,8	11,0	15,2	187,2
Mo	12	95,6	7,8	10,4	138,2
Mo	15	98,1	9,9	14,9	181,6

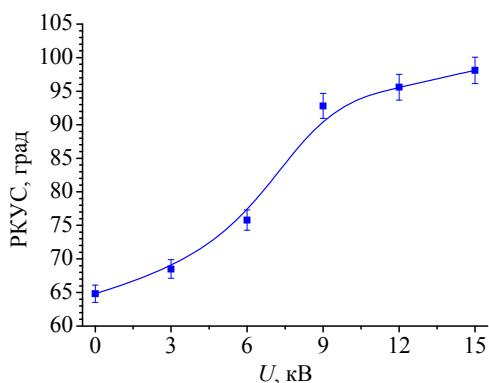


Рис. 2. Зависимость краевого угла смачивания дистиллированной водой поверхности сплава АМг2М от ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов  $\text{Mo}^+$

При измерении чисел микротвердости, чтобы исключить влияние масштабного эффекта, относительное изменение микротвердости  $\Delta H/H_{\text{исх}}$  модифицированных образцов сплава алюминия определялось для одинаковых глубин проникновения индентора микротвердомера. Нагрузка на индентор  $P$  менялась в интервале от 10 до 100 г, что соответствовало изменению глубины проникновения индентора от  $2,2 \pm 0,1$  до  $7,5 \pm 0,3$  мкм. Следует отметить, что толщина модифицированного слоя была на 1–2 порядка меньше глубины проникновения индентора микротвердомера в поверхность модифицированного образца. Данные об относительном изменении микротвердости поверхности сплава алюминия после ионно-ассистируемого осаждения Мо-покрытий представлены в табл. 2.

Таблица 2

**Относительное изменение микротвердости сплава алюминия марки АМг2М, модифицируемого ионно-ассистируемым осаждением Мо-покрытий в зависимости от ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов  $\text{Mo}^+$**

Относительное изменение микротвердости	$P$ , г	$U$ , кВ			
		3	6	9	12
$\Delta H/H_{\text{исх}}$	10	+0,03	–0,08	+0,15	–0,06
	25	–0,01	+0,07	+0,14	–0,01
	50	+0,01	–0,01	+0,06	–0,04
	100	+0,01	+0,06	+0,04	–0,02

Полученные экспериментальные данные изменения микротвердости с увеличением глубины проникновения индентора для сплава алюминия марки АМг2М, модифицированного ионно-ассистируемым осаждением Мо-покрытий, представлены на рис. 3.

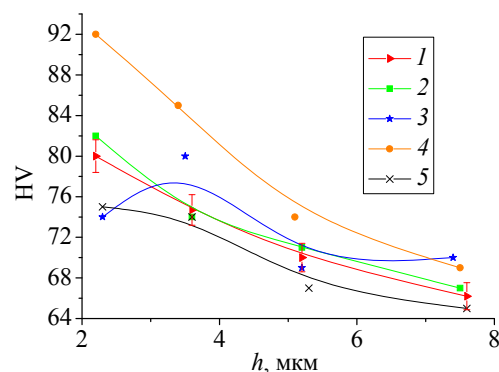


Рис. 3. Графики зависимости микротвердости поверхности сплава алюминия марки АМг2М от глубины проникновения индентора исходного образца (1) и модифицированных образцов ионно-ассистируемым осаждением Мо-покрытий при ускоряющих напряжениях: 2 – 3 кВ; 3 – 6 кВ; 4 – 9 кВ; 5 – 12 кВ

Приведенные в табл. 2 и на рис. 3 результаты свидетельствуют о том, что при нагрузках на индентор 50 и 100 г относительное изменение микротвердости сплава алюминия лежит в пределах погрешности измерений чисел микротвердости. Увеличение относительного изменения микротвердости на 14–15% наблюдается при осаждении Мо-покрытий при ускоряющем напряжении 9 кВ, а уменьшение на 8% ( $U = 6$  кВ) – при малых нагрузках (10 и 25 г) на индентор микротвердомера.

Изменение микротвердости поверхности сплава алюминия марки АМг2М при ионно-

ассистируемом осаждении покрытий обусловлено, по-видимому, конкуренцией двух механизмов. Один механизм – это формирование на поверхности сплава алюминия слоев с повышенными прочностными свойствами. Причинами увеличения микротвердости, как известно, является образование в приповерхностных областях карбидов металлов и структурных дефектов, формируемых при ионно-лучевом воздействии, а также твердорастворное упрочнение, обусловленное присутствием атомов легирующих элементов в алюминии. Второй механизм связан с разупрочнением приповерхностных слоев полученных структур. При осаждении покрытий в приповерхностных слоях сформированных структур содержится водород. Нами ранее были проведены исследования методом ядерных реакций [6], которые установили, что в покрытиях, полученных ионно-ассистируемым осаждением, содержится ~6–10 ат. % водорода, что приводит к уменьшению прочности поверхности образца.

**Заключение.** В результате выполненных исследований установлена возможность управления шероховатостью поверхности плен-

ки и ее смачиваемостью путем изменения ускоряющего напряжения для ассистирующих осаждение покрытия ионов  $Mo^+$  и их дозы при модифицировании сплава алюминия АМг2М. Средняя шероховатость модифицированных образцов сплава АМг2М снижалась при увеличении ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов  $Mo^+$  до 7,8 нм при  $U = 12$  кВ и до 9,9 нм при  $U = 15$  кВ. При внедрении сравнимых доз ионов молибдена в образцы сплава с увеличением ускоряющего напряжения значения РКУС также увеличиваются. Исходная поверхность сплава была гидрофильной ( $\theta = 64,8^\circ$ ) и оставалась такой после модифицирования при  $U = 3$  и 6 кВ. Однако увеличение ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов  $Mo^+$  до значений  $U = 9, 12, 15$  кВ модифицировало поверхность сплава таким образом, что она стала гидрофобной и значение РКУС увеличилось до  $\theta = 98,1^\circ$  при 15 кВ. Относительное изменение микротвердости модифицированных образцов увеличилось на 15% ( $U = 9$  кВ) и уменьшилось на 8% ( $U = 6$  кВ) при малых нагрузках (10 г) на индентор микротвердомера.

### Литература

1. Давыдов В. Г. О некоторых актуальных проблемах разработки алюминиевых сплавов и технологий для авиакосмического применения // Известия вузов. Цветная металлургия. 2001. № 4. С. 32–36.
2. Анищик В. М., Васильева Л. А., Жукова С. И. Влияние имплантации высокоэнергетических ионов неона на структуру сплава алюминий-марганец // Физика и химия обработки материалов. 1998. № 1. С. 5–8.
3. Углов В. В., Черенда Н. Н., Кулешов А. К. Трибологические свойства углеродных покрытий, осажденных на алюминий // Взаимодействие излучения с твердым телом: материалы III Междунар. науч. конф., Минск, 6–8 окт. 1999 г.: в 2 ч. / Белорус. гос. ун-т. Минск, 1999. Ч. 2. С. 270–272.
4. Бобрович О. Г., Ташлыков И. С., Тульев В. В. Микротвердость поверхности сталей марок 40Х, 45 и СТ3, модифицированной осаждением тонких покрытий в условиях ассистирования ионами титана и кремния // Труды БГТУ. 2012. № 6 (153): Физ.-мат. науки и информатика. С. 78–81.
5. Ташлыков И. С., Туровец А. И. Свойства поверхности системы Мо/подложка, формируемой при ионном ассистировании // Взаимодействие излучений с твердым телом: материалы X Междунар. науч. конф., Минск, 24–27 сент. 2013 г. / Белорус. гос. ун-т. Минск, 2013. С. 314–316.
6. Изучение ядерно-физическими методами металлосодержащих (Ti, Co)-покрытий, осажденных методом ионного ассистирования на кремний / О. Г. Бобрович [и др.] // Физика и химия обработки материалов. 2006. № 1. С. 54–58.

### References

1. Davydov V. G. On some topical problems of the development of aluminum alloys and technologies for aerospace applications. *Izvestiya vuzov. Tsvetnaya metallurgiya* [Proceedings of high schools. Non-ferrous metallurgy], 2001, no. 4, pp. 32–36 (In Russian).
2. Anishchik V. M., Vasil'eva L. A., Zhukova S. I. Effect of high-energy implantation of neon ions at the alloy of aluminum and manganese *Fizika i khimiya obrabotki materialov* [Physics and chemistry of material processing], 1998, no. 1, pp. 5–8 (In Russian).
3. Uglov V. V., Cherenda N. N., Kuleshov A. K. Tribological properties of carbon coatings deposited on aluminum. *Materialy III mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii "Vzaimodeystvie izlucheniya s tverdyim telom": v 2 chastyach* [Materials of III International Scientific Conference "Interaction of radiation with solids": in 2 parts]. Minsk, 1999, part 2, pp. 270–272 (In Russian).

4. Bobrovich O. G., Tashlykov I. S., Tul'ev V. V. Microhardness of the surfaces of steels 40X, 45 and ST3 modified by deposition of thin coatings under the conditions of titanium and silicon ions. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 78–81 (In Russian).

5. Tashlykov I. S., Turovets A. I. The surface properties of the Mo system / substrate formed by ion assisting. *Materialy X mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii "Vzaimodeystvie izlucheniya s tverdyim telom"* [Materials of X International Scientific Conference "Interaction of radiation with solids"]. Minsk, 2013, pp. 314–316 (In Russian).

6. Bobrovich O. G., Tashlykov I. S., Tul'ev V. V., Barayshuk S. M. The study of nuclear-physical methods of metal (Ti, Co)-coating deposited by ion-assisting of on silicon. *Fizika i khimiya obrabotki materialov* [Physics and chemistry of material processing], 2006, no. 1, pp. 54–58 (In Russian).

### Информация об авторах

**Бобрович Олег Георгиевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olegbobrovich@belstu.by

**Барайшук Сергей Михайлович** – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой практической подготовки студентов. Белорусский государственный аграрный технический университет (220023, г. Минск, пр-т Независимости, 99, Республика Беларусь). E-mail: bear\_s@bsatu.by

**Туровец Антон Иванович** – аспирант кафедры физики и методики преподавания физики. Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка (220050, г. Минск, ул. Советская, 18, Республика Беларусь). E-mail: anton\_turavets@mail.ru

**Яскевич Валентин Валентинович** – аспирант кафедры химии, технологии электрохимических производств и материалов электронной техники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yaskelchik@belstu.by

### Information about the authors

**Bobrovich Oleg Georgievich** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olegbobrovich@belstu.by

**Barayshuk Sergey Mihaylovich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Department of Practical Training of Students. Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bear\_s@bsatu.by

**Turovets Anton Ivanovich** – PhD student, the Department of Physics and Methods of Teaching Physics. Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank (18, Sovetskaya str., 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: anton\_turavets@mail.ru

**Yaskel'chik Valentin Valentinovich** – PhD student, the Department of Chemistry, Technology of Electrochemical Productions and Electronic Engineering Materials. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yaskelchik@belstu.by

Поступила 15.05.2018

УДК 539.1.06:539.23.234

**В. В. Тульев**

Белорусский государственный технологический университет

**ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ СТРУКТУР МЕТАЛЛ – ТИТАН,  
ПОЛУЧЕННЫХ ИОННО-АССИСТИРУЕМЫМ НАНЕСЕНИЕМ  
МЕТАЛЛСОДЕРЖАЩИХ ПОКРЫТИЙ**

На подложки из титана наносились тонкие металлосодержащие (Cr, Cu, Mo, W) пленки методом ионно-ассистируемого осаждения в вакууме. Этот метод позволяет осаждать покрытие на поверхность образца и одновременно облучать ускоренными ионами того же вида, что и материал наносимого покрытия. Для реализации данного метода использовался вакуумный ионно-дуговой источник плазмы металлов, который одновременно генерирует положительные ионы и нейтральную фракцию из материала электродов. Облучение осаждаемого покрытия осуществлялось при ускоряющем напряжении между источником и мишенью, равном 20 кВ. Плотность ионного тока составляла  $\sim 6\text{--}20$  мкА/см<sup>2</sup>, а интегральный поток ассистирующих ионов  $(1\text{--}2) \cdot 10^{17}$  ион/см<sup>2</sup>. В рабочей камере в процессе осаждения покрытий поддерживался вакуум при давлении  $\sim 10^{-2}$  Па.

Элементный состав и распределение элементов по глубине в сформированных на титане покрытиях изучались методом Резерфордского обратного рассеяния ионов гелия в сочетании с компьютерным моделированием.

Исследования показали, что на поверхности титана формируется покрытие толщиной  $\sim 25$  нм, в состав которого входят атомы осаждаемого материала (2–8 ат. %), атомы технологической примеси кислорода (10–25 ат. %) и атомы титана из подложки. Установлено, что проникновение атомов металла и кислорода в титановую подложку происходит в результате радиационно-стимулированной диффузии, а атомов титана в покрытие – вследствие встречной диффузии. На процессы формирования покрытия влияет также распыление поверхности формируемой структуры.

**Ключевые слова:** ионно-ассистируемое осаждение, титан, металлосодержащие пленки, хром, медь, молибден, вольфрам.

**V. V. Tul'ev**

Belarusian State Technological University

**STUDY OF THE SURFACE OF METAL – TITANIUM STRUCTURES  
OBTAINED BY THE ION-BEAM ASSISTED DEPOSITION  
OF METAL-CONTAINING COATING**

Thin films on the basis of metals (Cr, Cu, Mo, W) were applied on titanium substrates using the method of the ion-assisted deposition in vacuum. This method allows to deposit the coating on the surface of the sample and simultaneously irradiate it with accelerated ions. The vacuum ion-arc plasma source of metals was used as implementation method. The source simultaneously generates positive ions and a neutral fraction from the material of the electrodes.

Ion-assisted deposits were prepared using 20 kV accelerating voltage between sources and target. The density of ionic current at the deposition of the covering has changed in the range of 6 to 20  $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ , and the ion flow has changed in the range of  $1 \cdot 10^{17}$  to  $2 \cdot 10^{17}$  cm<sup>-2</sup>. The deposition of the covering has occurred in a vacuum at a pressure of  $\sim 10^{-2}$  Pa in the working chamber.

Rutherford back scattering and computer simulation RUMP code were applied to investigate the composition of the modified titanium surface.

The research showed that the superficial structure is formed on titanium,  $\sim 25$  nm thick. The covering composition includes atoms of the deposited metal (2–8 at. %), atoms of technological impurity of oxygen (10–25 at. %), atoms of titanium from the substrate. It has been determined that the penetration of metal and oxygen atoms into the interior of the sample occurs as a result of radiation-stimulated diffusion of titanium atoms due to interdiffusion. The formation of the coating is affected by the sputtering of the surface of the formed structure.

**Key words:** ion-beam assisted deposition, titanium, metal-containing films, chrome, copper, molybdenum, tungsten.

**Введение.** Ионно-лучевые методы нанесения покрытий являются перспективными методами модифицирования состава и свойств по-

верхности материалов и изделий [1, 2]. Одним из таких методов является метод ионно-ассистируемого осаждения покрытий в вакууме.

Он позволяет при осаждении металлсодержащей пленки облучать поверхность формируемой структуры ускоренными ионами. При таком нанесении покрытий происходит перемещение атомов поверхностного слоя мишени с атомами осаждаемого покрытия, в результате чего формируется покрытие с высокой степенью адгезии к подложке [1–3].

В процессе осаждения покрытия в поверхностных слоях подложки происходит изменение композиционного состава и структурно-фазового состояния, что может приводить к изменению механических и коррозионных свойств ее поверхности [1, 2, 4].

**Основная часть.** В качестве материала подложки использовался титан. Ионно-ассистируемое осаждение металлсодержащих ( $Me = Cr, Cu, Mo, W$ ) покрытий осуществлялось при ускоряющем напряжении  $U = 20$  кВ и плотности ионного тока  $\sim 6\text{--}20$  мкА/см<sup>2</sup>. Интегральный поток ассистирующих ионов составлял  $(1\text{--}2) \cdot 10^{17}$  ион/см<sup>2</sup>. В рабочей камере в процессе осаждения покрытия поддерживался вакуум при давлении  $\sim 10^{-2}$  Па.

Изучение элементного состава сформированных структур методом резерфордовского обратного рассеяния (РОР) ионов гелия проводился при следующих параметрах: энергия ионов гелия  $E_0 = 2,0$  МэВ, угол рассеяния  $\theta = 165^\circ$ , угол влёта  $\theta_1 = 0^\circ$  и угол вылета рассеянных ионов  $\theta_2 = 15^\circ$ . Относительная погрешность при определении слоевого содержания рассеивающих атомов составляла  $\sim 5\%$ .

На основе метода РОР был определен композиционный состав покрытий, рассчитаны слоевые концентрации элементов покрытия. Распределение элементов по глубине в анализируемом приповерхностном слое строилось на основе данных РОР с использованием компьютерного моделирования [5].

Среднее зарядовое число  $Q^*$  в ионном пучке рассчитывалось по эмпирической формуле, приведенной в работе [6]. Так же по среднему зарядовому числу определялась средняя энергия  $E_i$  ассистирующих ионов, величина которой была использована в программе TRIM для расчета среднего проективного пробега  $R_p$ , страгглинга пробега  $\Delta R_p$  ионов  $Cr^+, Cu^+, Mo^+, W^+$  в титане и коэффициентов распыления титана  $S_{Ti}$  и металла  $S_{Me}$  соответствующими ионами. Рассчитанные данные представлены в табл. 1.

Спектры РОР ионов гелия от образца из титана до и после ионно-ассистируемого осаждения покрытий на основе Cr, Cu, Mo, W представлены на рис. 1.

На спектре РОР для образца с покрытием на основе хрома (рис. 1) наблюдается сдвиг сигнала от атомов подложки (титана) в сторону

меньших номеров каналов. Такой эффект свидетельствует о появлении тонкой пленки на поверхности образца. Сдвиг сигнала составляет  $\sim 5$  каналов, что соответствует толщине покрытия  $\sim 20\text{--}25$  нм. Для покрытий на основе Cu, Mo и W такого сдвига не наблюдается. Причиной этого эффекта, по нашему мнению, является процесс распыления поверхности формируемой структуры, возникающий при облучении ассистирующими ионами. Этот факт подтверждается значениями коэффициентов распыления, рассчитанными для ионов  $Cr^+, Cu^+, Mo^+, W^+$  (табл. 1). Для ионов  $Cr^+, Mo^+, W^+$  коэффициенты распыления атомов того же материала, что и сами ионы, превышает коэффициент распыления для  $Cr^+$  в 2–2,5 раза.

Таблица 1  
Рассчитанные данные  $Q^*, E_i, R_p \pm \Delta R_p, S_{Ti}, S_{Me}$   
для ионов  $Cr^+, Cu^+, Mo^+, W^+$

Показатели	Ионы			
	$Cr^+$	$Cu^+$	$Mo^+$	$W^+$
$Q^*$	1,71	1,70	2,55	2,81
$E_i, \text{кэВ}$	34	34	51	56
$R_p \pm \Delta R_p, \text{нм}$	$24 \pm 11$	$21 \pm 10$	$23 \pm 10$	$20 \pm 6$
$S_{Ti}, \text{ат./ион}$	1,7	1,9	2,4	3,1
$S_{Me}, \text{ат./ион}$	4,3	10,5	7,9	8,9

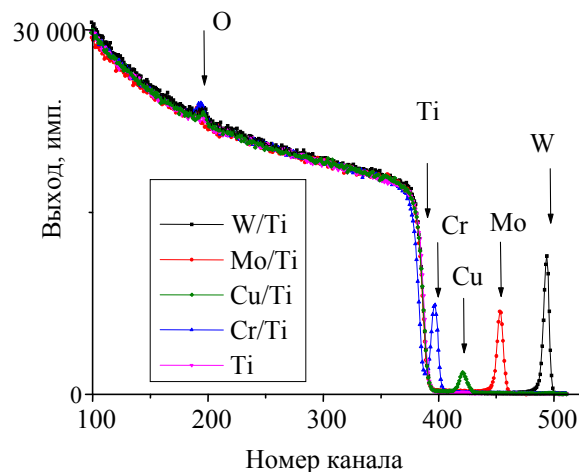


Рис. 1. Спектры РОР ионов гелия от образца из титана до и после осаждения покрытий

На всех экспериментальных спектрах РОР (рис. 1) наблюдается сигнал от атомов кислорода, что указывает на наличие в покрытии технологической примеси кислорода. Источником кислорода в осажденных покрытиях являются остаточные газы в вакуумной камере [1, 4]. Сигнала от атомов углерода не наблюдается, что свидетельствует о содержании незначительного количества углерода, меньшего чем чувствительность метода.

На основе данных экспериментальных спектров POP с применением компьютерного моделирования были построены профили распределения элементов покрытия по глубине (рис. 2–3).

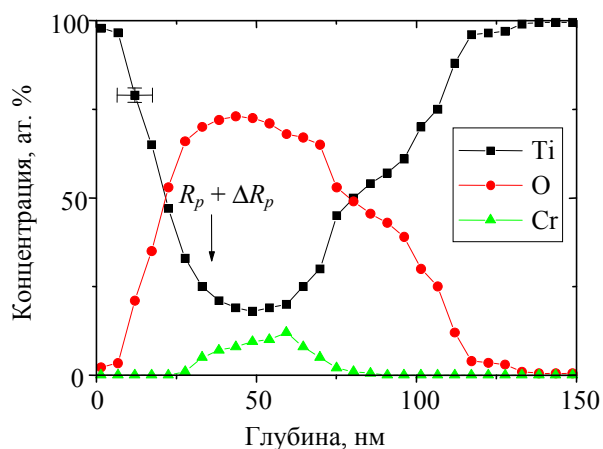


Рис. 2. Концентрационные профили распределения элементов по глубине в титане после осаждения покрытия на основе хрома

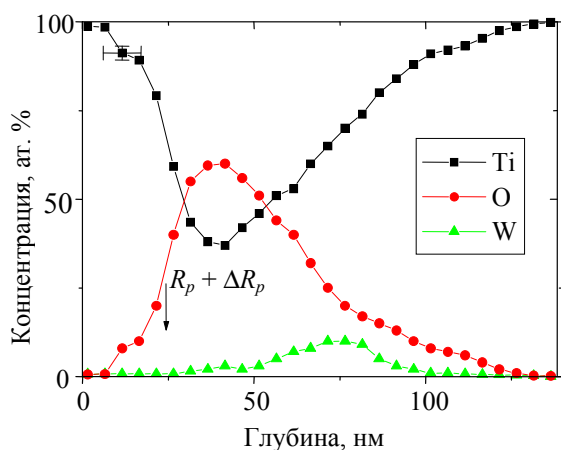


Рис. 3. Концентрационные профили распределения элементов по глубине в титане после осаждения покрытия на основе хрома

Моделирование спектров POP показало, что на поверхности титана формируется покрытие толщиной  $\sim 25$  нм, в состав которого входят атомы титана из подложки, атомы осажденного металла, а также атомы технологической примеси кислорода.

Проникновение атомов осаждаемого металла и кислорода в глубь образца превышает средний проективный пробег с учетом страгглинга пробега ассистирующих ионов (табл. 1). Причиной проникновения этих элементов в глубь образца

является радиационно-стимулированная диффузия, а причиной проникновения атомов титана в покрытие – встречная диффузия.

На основе данных, полученных из спектров POP от образцов с осажденным покрытием, были рассчитаны слоевые концентрации элементов сформированного покрытия. Данные представлены в табл. 2.

Таблица 2  
Слоевые концентрации элементов в покрытиях, сформированных на Ti

Образец	Слоевые концентрации $\times 10^{17}$ , ат./см <sup>2</sup>		
	Me	O	Ti
Ti	–	0,4	9,2
Cr/Ti	0,4	3,2	9,0
Cu/Ti	0,8	1,2	8,8
Mo/Ti	0,4	1,2	8,4
W/Ti	0,2	1,9	8,3

Из представленных данных следует, что в приповерхностных слоях сформированных структур содержится  $\sim 10$ – $25$  ат. % кислорода и  $\sim 2$ – $8$  ат. % осажденного металла. Наибольшее количество технологической примеси кислорода наблюдается для хромсодержащего покрытия.

**Закключение.** Исследования методом резерфордовского обратного рассеяния ионов гелия в сочетании с компьютерным моделированием показали, что при нанесении покрытия на основе Cr, Cu, Mo, W на титан методом ионно-ассистируемого осаждения при ускоряющей разности потенциалов 20 кВ и с интегральными потоками  $(1-2) \cdot 10^{17}$  ион/см<sup>2</sup> формируются тонкопленочные структуры толщиной  $\sim 25$  нм, содержащие атомы осаждаемого металла (Cr, Cu, Mo, W), атомы технологической примеси кислорода, атомы титана из подложки.

Определено, что в состав покрытия входят атомы осаждаемого материала (2–8 ат. %), атомы технологических примесей кислорода (10–25 ат. %) и атомы титана из подложки. Наибольшее количество примеси кислорода наблюдается для хромсодержащего покрытия.

Установлено, что проникновение атомов осаждаемого металла и кислорода в глубь образца происходит вследствие радиационно-стимулированной диффузии, а атомов титана в покрытие – в результате встречной диффузии. На процессы формирования покрытия влияет распыление поверхности формируемой структуры.

### Литература

1. Тульев В. В., Касперович А. В. Элементный состав, структура и фрикционные характеристики поверхности резины, модифицированной ионно-ассистируемым осаждением покрытий на основе Mo, W // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. 2009. Вып. XVII. С. 54–56.

2. Структура, термостойкость и микротвердость покрытий  $ZrO_2$ , полученных разными методами / С. Г. Валухов [и др.] // Неорганические материалы. 2016. Т. 52, № 4. С. 457–463.

3. Трегубов И. М., Смолякова М. Ю., Каширин М. А. Адгезионная прочность композитных покрытий на основе железа // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2017. Т. 13, № 2. С. 92–96.

4. Бобрович О. Г., Тульев В. В. Анализ композиционного состава и химических связей элементов металлосодержащих (Zr,W) покрытий // Физика. Известия высших учебных заведений. 2011. № 1/3. С. 350–354.

5. Doolittle L. R. A semiautomatic algorithm for rutherford backscattering analysis // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 1986. Vol. B15. P. 227–234.

6. Implantation of titanium, chromium, yttrium, molybdenum, silver, hafnium, tantalum, tungsten and platinum ions generated by a metal vapour vacuum ion source into 440C stainless steel / J. Sasaki [et al.] // Surf. Coat. Technol. 1992. Vol. 51. P. 166–175.

### References

1. Tul'ev V. V., Kasperovich A. V. Element composition, structure and friction characteristics of rubber surface modified by ion-assisted deposition of coatings based on Mo, W. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physics and Mathematics. Informatics, 2009, issue XVII, pp. 54–56 (In Russian).

2. Valyukhov S. G., Stogney O. V., Filatov M. S., Kashirin M. A. Structure, thermal resistance and microhardness of  $ZrO_2$  coatings obtained by different methods. *Neorganicheskie materialy* [Inorganic Materials], 2016, vol. 52, no. 4, pp. 457–463 (In Russian).

3. Tregubov I. M., Smolyakova M. Yu., Kashirin M. A. The adhesion strength of the composite coatings based iron. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Voronezh State Technical University], 2017, vol. 13, no. 2, pp. 92–96 (In Russian).

4. Bobrovich O. G., Tul'ev V. V. Analysis of composite composition and chemical bonds of metal elements (Zr, W) of coatings. *Fizika. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy* [Russian Physics Journal], 2011, no. 1/3, pp. 350–354 (In Russian).

5. Doolittle L. R. A semiautomatic algorithm for rutherford backscattering analysis. *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.*, 1986, vol. B15, pp. 227–234.

6. Sasaki J., Hayashi K., Sugiyama K., Ichiko O., Hashiguch Y. Implantation of titanium, chromium, yttrium, molybdenum, silver, hafnium, tantalum, tungsten and platinum ions generated by a metal vapour vacuum ion source into 440C stainless steel. *Surf. Coat. Technol.*, 1992, vol. 51, pp. 166–175.

### Информация об авторе

**Тульев Валентин Валентинович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tvv69@mail.ru

### Information about the author

**Tul'ev Valentin Valentinovich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tvv69@mail.ru

Поступила 15.05.2018

УДК 621.383.29:621.514.015

**В. И. Никитенок<sup>1</sup>, С. С. Ветохин<sup>2</sup>, А. М. Бахарь<sup>1</sup>, Е. В. Терешко<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Белорусский государственный университет<sup>2</sup>Белорусский государственный технологический университет**МЕТОДИКА РАСЧЕТА РАБОЧИХ ХАРАКТЕРИСТИК АДАПТИВНОГО  
ОБНАРУЖИТЕЛЯ СЛАБЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ**

Рассматривается обнаружение слабых оптических сигналов, когда на выходе фотоприемника наблюдается последовательность импульсов, распределенных по закону Пуассона, другими словами, стационарный или простейший пуассоновский поток, представляющий собой либо чистый шум, либо смесь полезного сигнала с шумом. С опорой на элементы теории статистических решений разработана методика получения рабочих характеристик адаптивного обнаружителя. В модели для стабилизации вероятности ложной тревоги используют подстройку порога обнаружения с учетом характеристик классифицированной обучающей выборки. В качестве последней принят «шумовой» пуассоновский поток.

**Ключевые слова:** слабый оптический сигнал, фотоприемник, адаптивный обнаружитель, вероятность ложной тревоги, вероятность правильного обнаружения.

**V. I. Nikitsionak<sup>1</sup>, S. S. Vetokhin<sup>2</sup>, A. M. Bakhar<sup>1</sup>, E. V. Tereshko<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Belarusian State University<sup>2</sup>Belarusian State Technological University**THE METHOD OF CALCULATION OF THE WORKING CHARACTERISTICS  
OF A WEAK OPTICAL SIGNALS ADAPTIVE DETECTOR**

This study examines the case of weak light signals detection when the Poisson series of the detector output pulses is occurred (stationary process), which represents a pure noise or mixture of noise and signal. The method of defining the working characteristics of an adaptive detector, which is elaborated under the theory of statistical decisions, is offered. The method uses the adaptation of the detection threshold to stabilize the value of alarm probability. It applies the characteristics of a background series that is a simple “noise” Poisson process.

**Key words:** weak optical signal, photo detector, adaptive detector, false alarm probability, true detection probability.

**Введение.** При обнаружении слабых оптических сигналов на выходе фотоприемника имеется простейший пуассоновский поток (ППП) с интенсивностью  $\lambda_0$  (прием чистого шума) или  $\lambda_1 = \lambda_c + \lambda_0$  (прием смеси сигнала с шумом) [1, 2, 3]. Известно, что в этом случае оптимальное по критерию Неймана – Пирсона принятие решений на обнаружение состоит в сравнении числа принимаемых импульсов за фиксированное время с порогом обнаружения, зависящим от задаваемой вероятности ложной тревоги и интенсивности потока шума [1, 2, 3].

Если в качестве входных воздействий рассматривать последовательность временных интервалов между соседними импульсами ППП, которые распределены экспоненциально [1–4], то оптимальное обнаружение включает их суммирование при фиксированном числе импульсов и сравнение с порогом решения, зависящим как от задаваемой вероятности ложной тревоги, так и от величины  $\lambda_0$  [4]. Очевидно, что оба алгоритма обнаружения статистически эквивалентны. Оперирование с непрерывными

случайными величинами облегчает последующий анализ, не сужая общности решаемой проблемы, которая состоит в том, что рабочие характеристики оптимального обнаружителя слабых оптических сигналов получены при условии точно известного параметра экспоненциального распределения. Однако на практике такой случай является исключением из правила. В этих условиях, как показано в публикации [5], реальные характеристики обнаружения могут существенно отличаться от рассчитанных, так как параметр экспоненциального распределения при наличии чистого шума может уйти от нашего контроля, и порог обнаружения определяется неверно. Как отмечалось, в данном случае имеет место априорная неопределенность относительно параметра экспоненциального распределения.

Обратимся к двум известным принципам преодоления априорной неопределенности. Один из них состоит в разработке адаптивных алгоритмов, другой – в применении непараметрических, в том числе ранговых, алгоритмов. В настоящей



статье рассматривается пример применения адаптивного алгоритма обнаружения слабых оптических сигналов с применением методов обучения. В ней дополняются и уточняются результаты, представленные в работе [6]. В случае параметрической априорной неопределенности эти методы базируются на теории статистических решений с использованием классифицированной обучающей выборки [4]. Вид функции распределения известен (экспоненциальный) и в течение периода обучения, который должен предшествовать моменту принятия решения на обнаружение, надо на основании наблюдений сформировать оценку неизвестного параметра  $\lambda_0$ . Эта оценка используется затем для вычисления порога обнаружения вместо неизвестного истинного значения  $\lambda_0$  интенсивности ППП при приеме чистого шума. Подчеркнем, должна быть твердая уверенность именно в этом: оценка действительно вырабатывается по чистому шуму. Имеет место так называемое обучение с учителем. В ходе обучения в данном случае происходит изменение параметра алгоритма обучения с целью приближения его к оптимальному алгоритму с точки зрения задаваемого критерия качества. Подобные устройства принято называть адаптивными (или самоорганизующимися) [4]. Обратим внимание, что применение методов обучения приводит к системам с характеристиками, близкими к оптимальным с известными параметрами.

**Основная часть.** Как отмечалось, в адаптивном обнаружителе в целях определения оптимального значения порога обнаружения для оценки интенсивности шума  $\lambda_0$  используется классифицированный обучающий ППП импульсов (обучающая выборка), соответствующий приему чистого шума.

Для удобства расчетов перейдем к величине  $\vartheta_0$ , обратной  $\lambda_0$ :

$$\vartheta_0 = 1/\lambda_0. \quad (1)$$

Тогда экспоненциальное распределение последовательности временных интервалов между соседними импульсами ППП при приеме чистого шума имеет вид (плотность вероятности случайной величины) [4]:

$$f(t) = 1/\vartheta_0 e^{-t/\vartheta_0}, \quad t > 0, \vartheta_0 > 0. \quad (2)$$

Среднее значение такой случайной величины равно  $\vartheta_0$ , а ее дисперсия  $\vartheta_0^2$ . Эффективной несмещенной оценкой параметра  $\vartheta_0$  экспоненциального распределения (1) является выборочное среднее:

$$\hat{\vartheta}_0 = 1/m_0 \sum_{i=1}^{m_0} t_i, \quad (3)$$

где  $m_0$  – объем классифицированной обучающей выборки, по которой проводится оценка параметра  $\vartheta_0$ .

Как известно [4], дисперсия выборочного среднего всегда (при независимых элементах выборки размера  $m_0$ ) в  $m_0$  раз меньше дисперсии исходного распределения:

$$V\{\hat{\vartheta}_0\} = \vartheta_0^2/m_0, \quad (4)$$

а математическое ожидание

$$E\{\hat{\vartheta}_0\} = \vartheta_0. \quad (5)$$

При  $m_0 \gg 1$  распределение оценки (3) приближается к гауссову с параметрами (4) и (5):

$$\begin{aligned} f(\hat{\vartheta}_0) &= 1/\sqrt{2\pi V\{\hat{\vartheta}_0\}} \times \\ &\times \exp\{-(\hat{\vartheta}_0 - E\{\hat{\vartheta}_0\})^2 / (2V\{\hat{\vartheta}_0\})\} = \\ &= \sqrt{0,5m_0/\pi} / \vartheta_0 \times \\ &\times \exp\{-(\hat{\vartheta}_0 - \vartheta_0)^2 / (2\vartheta_0^2/m_0)\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку точность оценки параметра  $\vartheta_0$  зависит от объема обучающей последовательности  $m_0$ , то и показатели качества адаптивного обнаружителя являются функциями этой величины. Поэтому вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги адаптивного обнаружителя ( $D_a, F_a$ ) вычисляются усреднением этих показателей для оптимального обнаружителя ( $D, F$ ) по неизвестному параметру, получаемому путем оценивания.

Таким образом, уравнение рабочей характеристики адаптивного обнаружителя с учетом выражений (4)–(6) и (8) из [5] можно записать в виде

$$\begin{aligned} D_a &= \int_{-\infty}^{\infty} D(m, F; \hat{\vartheta}_0/\vartheta_c) f(\hat{\vartheta}_0) d\hat{\vartheta}_0 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\hat{\vartheta}_0/\vartheta_c \sqrt{m} - (1 + \hat{\vartheta}_0/\vartheta_c) \Phi^{-1}(1-F)) \times \\ &\quad \times \sqrt{0,5m_0/\pi} / \vartheta_0 \times \\ &\quad \times \exp\{-(\hat{\vartheta}_0 - \vartheta_0)^2 / (2\vartheta_0^2/m_0)\} d\hat{\vartheta}_0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Phi(x) = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$  – интеграл вероятности,  $\Phi^{-1}(x)$  – функция, обратная интегралу вероятности,  $\vartheta_c = 1/\lambda_c$ .

Вычислить уравнение (7) аналитически в простой форме не удается. Поэтому воспользуемся известной аппроксимацией интеграла вероятности (ошибка аппроксимации составляет 5%) [7]:

$$\Phi(x) \cong 1 - a \exp\{-b(d+x)^2\}, \quad (8)$$

при  $x = 0-5,5$  и  $1 - \Phi(x) = 0,5 \cdot 10^{-8}$ , где  $a = 0,65$ ,  $b = 0,443$ ,  $d = 0,75$ .

Остановимся более подробно на использовании приближения интеграла вероятности (8).

Из уравнения (8) следует, что его можно использовать для нахождения вероятности пра-

вильного обнаружения, значение которой превышает 0,5:

$$D = \Phi(x_D) \cong 1 - a \exp\{-b(d + x_D)^2\}, D > 0,5, \quad (9)$$

где нижний индекс у  $x$  «привязывает» его к искомому показателю качества обнаружения. В данном случае это вероятность правильного обнаружения.

Очевидно, что если  $D < 0,5$ , то вероятность правильного обнаружения надо вычислять через вероятность пропуска  $1 - D$ , которая больше 0,5, и при выполнении условий в формуле (8):

$$1 - D = \Phi(x_{1-D}) \cong 1 - a \exp\{-b(d + x_{1-D})^2\}, \quad (10)$$

откуда

$$D \cong a \exp\{-b(d + x_{1-D})^2\}, \text{ при } D < 0,5. \quad (11)$$

Вероятность ложной тревоги  $F$  может находиться в пределах  $10^{-2}$ – $10^{-8}$ . При этом условия в формуле (8) не выполняются. Поэтому  $F$  найдем через вероятность правильного необнаружения  $1 - F$ :

$$1 - F = \Phi(x_{1-F}) \cong 1 - a \exp\{-b(d + x_{1-F})^2\}, \quad (12)$$

откуда

$$F = 1 - \Phi(x_{1-F}) \cong a \exp\{-b(d + x_{1-F})^2\}, \quad (13)$$

$$x_{1-F} = \Phi^{-1}(\Phi(x_{1-F})) = \Phi^{-1}(1 - F) = \sqrt{1/b \ln(a/F)} - d. \quad (14)$$

Вероятность правильного обнаружения  $D$  в уравнении (7) с учетом формул (9) и (14) равна

$$D(m, F; \hat{\vartheta}_0 / \vartheta_c) = \Phi(\hat{\vartheta}_0 / \vartheta_c \sqrt{m} - (1 + \hat{\vartheta}_0 / \vartheta_c) \Phi^{-1}(1 - F)) \cong 1 - a \exp\{-b(2d - \sqrt{1/b \ln(a/F)} + (\hat{\vartheta}_0 / \vartheta_c)(\sqrt{m} - \sqrt{1/b \ln(a/F)} + d))^2\}. \quad (15)$$

Подставим выражение (15) в (7):

$$D_a = \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - a \exp\{-b(2d - \sqrt{1/b \ln(a/F)} + (\hat{\vartheta}_0 / \vartheta_c)(\sqrt{m} - \sqrt{1/b \ln(a/F)} + d))^2\} \times \sqrt{0,5m_0 / \pi} / \vartheta_0 \times \exp\{-(\hat{\vartheta}_0 - \vartheta_0)^2 / (2\vartheta_0^2 / m_0)\} d\hat{\vartheta}_0 = 1 - a \sqrt{0,5m_0 / \pi} / \vartheta_0 \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-b(2d - \sqrt{1/b \ln(a/F)} +$$

$$+ (\hat{\vartheta}_0 / \vartheta_c)(\sqrt{m} - \sqrt{1/b \ln(a/F)} + d))^2\} \times \exp\{-(\hat{\vartheta}_0 - \vartheta_0)^2 / (2\vartheta_0^2 / m_0)\} d\hat{\vartheta}_0. \quad (16)$$

Выражение (16) можно привести к виду

$$D_a = 1 - a \sqrt{0,5m_0 / \pi} / \vartheta_0 \exp\{-bL^2 - M\vartheta_0^2\} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-p^2\hat{\vartheta}_0^2 + q\hat{\vartheta}_0\} d\hat{\vartheta}_0, \quad (17)$$

где

$$L = 2d - \sqrt{1/b \ln(a/F)}, M = 0,5m_0 / \vartheta_0^2; \\ q = 2(M\vartheta_0 - bLK), p^2 = bK^2 + M; \\ K = (1/\vartheta_c)(\sqrt{m} - \sqrt{1/b \ln(a/F)} + d).$$

Для вычисления формулы (17) воспользуемся табличным интегралом [8]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-p^2x^2 \pm qx\} dx = \sqrt{\pi} / p \exp\{q^2 / (4p^2)\}. \quad (18)$$

С учетом (18) выражение (17) приводится к виду

$$D_a = 1 - a \sqrt{0,5m_0 / \pi} / \vartheta_0 \times \exp\{-bL^2 - M\vartheta_0^2\} \sqrt{\pi} / \sqrt{bK^2 + M} \times \exp\{(2(M\vartheta_0 - bLK))^2 / (4(bK^2 + M))\}. \quad (19)$$

После преобразований формулы (19) имеем

$$D_a \cong 1 - a(1 + 2bg^2(d + \sqrt{m} - \sqrt{1/b \ln(a/F)})^2 / m_0)^{-0,5} \times \exp\{-b(d(2 + g) + g\sqrt{m} - (1 + g)\sqrt{1/b \ln(a/F)})^2 / (1 + 2bg^2 \times (d + \sqrt{m} - \sqrt{1/b \ln(a/F)})^2 / m_0)\}, \quad (20)$$

при  $D_a > 0,5$ .

Проведем проверку правильности полученного выражения. Положим,  $m_0 \rightarrow \infty$ , и из уравнения (20) получим

$$\lim_{m_0 \rightarrow \infty} D_a \cong 1 - \exp\{-b(d(2 + g) + g\sqrt{m} - (1 + g)\sqrt{1/b \ln(a/F)})^2\} \cong D. \quad (21)$$

Замечаем, что формула (21) представляет собой рабочую характеристику оптимального обнаружителя с точно известными параметрами [5]. Это подтверждает правильность выполненных преобразований.

Обратим внимание на то, что в известных авторам работах условную вероятность ложной тревоги адаптивного обнаружителя не рассматривают. Однако ее анализ приводит к интересным для практики результатам. Как отмечалось,

вероятность ложной тревоги адаптивного обнаружителя можно получить, усредняя по неизвестному параметру выражение для вероятности ложной тревоги оптимального обнаружителя:

$$F_a(m, F; \hat{\vartheta}_0 / \vartheta_0) = \Phi(\hat{\vartheta}_0 / \vartheta_0(\sqrt{m} - \Phi^{-1}(1 - F)) - \sqrt{m}).$$

Далее для использования аппроксимации интеграла вероятности перейдем к вероятности правильного необнаружения:

$$\begin{aligned} D_{\text{пр.н.а}}(m, F; \hat{\vartheta}_0 / \vartheta_0) &= 1 - F_a(m, F; \hat{\vartheta}_0 / \vartheta_0) = \\ &= 1 - \Phi(\sqrt{m} - \hat{\vartheta}_0 / \vartheta_0(\sqrt{m} - \Phi^{-1}(1 - F))) = \\ &= \Phi(\hat{\vartheta}_0 / \vartheta_0(\sqrt{m} - \Phi^{-1}(1 - F)) - \sqrt{m}) = \\ &= \Phi(\sqrt{m} + \hat{\vartheta}_0 / \vartheta_0 \times \\ &\quad \times (\sqrt{1/b \ln(a/F)} - d - \sqrt{m})). \end{aligned} \quad (22)$$

Вероятность правильного необнаружения адаптивного обнаружителя получаем, усредняя выражение (22) по неизвестному параметру

$$\begin{aligned} D_{\text{пр.н.а}} &\cong \int_{-\infty}^{\infty} D_{\text{пр.н.а}}(m, F; \hat{\vartheta}_0 / \vartheta_0) f(\hat{\vartheta}_0) d\hat{\vartheta}_0 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\sqrt{m} + \hat{\vartheta}_0 / \vartheta_0(\sqrt{1/b \ln(a/F)} - d - \\ &\quad - \sqrt{m})) \sqrt{0,5m_0 / \pi} / \vartheta_0 \times \\ &\quad \times \exp\{-(\hat{\vartheta}_0 - \vartheta_0)^2 / (2\vartheta_0^2 / m_0)\} d\hat{\vartheta}_0. \end{aligned} \quad (23)$$

Проводя преобразования уравнения (23), аналогичные получению вероятности правильного обнаружения, получаем

$$D_{\text{пр.н.а}} \cong 1 - a(1 + 2b(\sqrt{1/b \ln(a/F)} - d - \sqrt{m})^2 / m_0)^{-0,5} \times$$

$$\times \exp\{-\ln(a/F) / (1 + 2b(\sqrt{1/b \ln(a/F)} - d - \sqrt{m})^2 / m_0)\}, \quad (24)$$

откуда

$$\begin{aligned} F_a &= 1 - D_{\text{пр.н.а}} \cong a(1 + 2b(\sqrt{1/b \ln(a/F)} - \\ &\quad - d - \sqrt{m})^2 / m_0)^{-0,5} \times \exp\{-\ln(a/F) / (1 + \\ &\quad + 2b(\sqrt{1/b \ln(a/F)} - d - \sqrt{m})^2 / m_0)\}. \end{aligned} \quad (25)$$

В формуле (25) значения  $m$  должны выбираться не произвольно, а, как и в публикации [5], с учетом обеспечения заданных  $D$  и  $F$  при располагаемом  $g$ :

$$m = ((\Phi^{-1}(D) + (1 + g)\Phi^{-1}(1 - F)) / g)^2. \quad (26)$$

При  $m_0 \rightarrow \infty$  из выражения (27) получаем

$$\lim_{m_0 \rightarrow \infty} F_a \cong a \exp\{-\ln(a/F)\} \cong F. \quad (27)$$

Логарифмируя выражение (27), имеем  $\ln(F_a / a) \approx -\ln(a/F)$  и  $F_a \approx F$ , что подтверждает правильность выполненных преобразований.

**Заключение.** Итак, в адаптивном обнаружителе для стабилизации условной вероятности ложной тревоги осуществляется подстройка порога обнаружения по классифицированной обучающей выборке, которой является «шумовой» ППП.

Представленная методика расчета рабочих характеристик адаптивного обнаружителя слабых оптических сигналов позволила получить сравнительно простые выражения для условных вероятностей правильного обнаружения и ложной тревоги. Они в дальнейшем могут быть применены различными пользователями для конкретного анализа работы адаптивных обнаружителей слабых оптических сигналов, сравнения их с оптимальными.

## Литература

1. Шереметьев А. Г. Статистическая теория лазерной связи. М.: Связь, 1971. 264 с.
2. Макарова С. Н. Обнаружение слабых сигналов в оптическом диапазоне волн // Теория и техника радиолокации: Тр. МАИ. 1972. Вып. 207: Машиностроение. С. 198–208.
3. Сигналы и помехи в лазерной локации / под ред. В. Е. Зуева. М.: Радио и связь, 1985. 264 с.
4. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989. 752 с.
5. Никитенок В. И., Ветохин С. С. Об оптимальном обнаружении слабых оптических сигналов // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 88–91.
6. Никитенок В. И. Быстрые непараметрические алгоритмы обнаружения сигналов. Минск: БГУ, 2010. 131 с.
7. Тамм Ю. А., Гомозова Т. М. К аппроксимации интеграла вероятности // Электросвязь. 1970. № 9. С. 77–78.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 7-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 1237 с.

## References

1. Sheremet'ev A. G. *Statisticheskaya teoriya lazernoy svyazi* [Statistical theory of laser communication]. Moscow, Svyaz' Publ., 1971. 264 p.

2. Makarova S. N. Detection of weak signals in the optical band. *Trudy MAI "Teoriya i praktika radiolokatsii"* [MAI Proceedings "Theory and practice of radiolocation"], 1972, issue 207: Mechanical Engineering, pp. 198–208 (In Russian).

3. Signaly i pomekhi v lazernoy lokatsii [Signals and hindrance in laser location]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1985. 264 p.

4. Levin B. R. *Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical basic of statistical radio technique]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1989. 752 p.

5. Nikitionak V. I., Vetokhin S. S. On the optimal detection of weak light signals. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 88–91 (In Russian).

6. Nikitionak V. I. *Bystrye neparametricheskie algoritmy obnaruzheniya signalov* [Fast nonparametric algorithms of signal detection]. Minsk, BGU Publ., 2010. 131 p.

7. Tamm Yu. A., Gomozova T. M. On approximation of the probability integral. *Elektrosvyaz'* [Telecommunications], 1970, no. 9, pp. 77–78 (In Russian).

8. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [The tables of integrals, sums, series, and multiplications]. Moscow, Nauka Publ., 2011. 1237 p.

### Информация об авторах

**Никитенок Виктор Иванович** – кандидат технических наук, доцент кафедры физики и аэрокосмических технологий. Белорусский государственный университет (220006, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: nikitavi44@mail.ru

**Ветохин Сергей Сергеевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой физико-химических методов сертификации продукции. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: veto@belstu.by

**Бахарь Андрей Михайлович** – первый заместитель начальника военного факультета. Белорусский государственный университет (220006, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: bakhar30@mail.ru

**Терешко Елена Владимировна** – ассистент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tereshko@belstu.by

### Information about the authors

**Nikitsionak Viktor Ivanavich** – PhD (Engineering), Associate Professor, the Department of Physics and Aerospace Technologies. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: nikitavi44@mail.ru

**Vetokhin Siarhei Siarheevich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Department for Physical and Chemical Methods of Testing. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: veto@belstu.by

**Bakhar Andrey Mikhaylavich** – Deputy Head of the Military Department. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bakhar30@mail.ru

**Tereshko Elena Vladimirovna** – assistant lecturer, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tereshko@belstu.by

Поступила 10.05.2018

УДК 614.841.332

А. С. Дмитриченко<sup>1</sup>, С. В. Здитовецкая<sup>1</sup>, С. Ю. Яновский<sup>2</sup>, К. Д. Керимов<sup>2</sup><sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет<sup>2</sup>Университет гражданской защиты Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Беларусь**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ  
СВЕТОПРОЗРАЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ ПРИ ОГНЕВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ**

Рассматриваются вопросы, связанные с анализом термонапряженного состояния ограниченной стеклянной панели с учетом температурной зависимости теплофизических свойств стекла, воздуха и дымовых газов, конструктивных особенностей светопрозрачной конструкции и нелинейного характера изменения температуры окружающей среды при огневом воздействии.

**Ключевые слова:** светопрозрачная конструкция, тепловое воздействие, термическое напряжение.

A. S. Dmitrichenko<sup>1</sup>, S. V. Zditovetskaya<sup>1</sup>, S. Yu. Yanovskiy<sup>2</sup>, K. D. Kerimov<sup>2</sup><sup>1</sup>Belarusian State Technological University<sup>2</sup>University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus**STUDY OF THE THERMAL STRESS STATE  
OF GLAZING ASSEMBLY INDUCED BY FIRE**

The paper examines the issues related to the analysis of thermal stresses in the limited glass panel taking into account the temperature dependence of thermophysical properties of glass, air and combustion gases, design features of a translucent structure and the nonlinear nature of the ambient temperature change when exposed to fire.

**Key words:** translucent structure, thermal influence, thermal tension.

**Введение.** В настоящее время одной из главных тенденций современной архитектуры является широкое использование светопрозрачных конструкций (СПК) из стекла, которые делают современные здания более интересными и привлекательными. Основным препятствием для распространения данных технологий в строительстве является отсутствие в нормативных документах методик, позволяющих рассчитывать термические напряжения, возникающие за счет неравномерности нагрева при пожаре [1]. Актуальной задачей является разработка научно-обоснованного метода расчета термических напряжений в современных СПК.

При огневом воздействии на оконную панель ее открытая часть нагревается, а температура закрытой рамой части остается почти неизменной. Часть панели, которая закрыта рамой, испытывает напряжение за счет неравномерности прогрева по площади листа, что приводит к образованию в ней трещин и разрушению. Для определения термонапряженного состояния стеклянной панели необходимо решить задачу о распределении температуры и напряжений в ограниченной стеклянной пластине в условиях огневого воздействия на ее поверхность.

**Основная часть.** Рассмотрим задачу о распределении температуры в стеклянной панели,

заключенной в раму шириной  $d$ . Начало координат разместим в центре панели на краю рамы и направим ось  $z$  вдоль кромки рамы, ось  $y$  перпендикулярно кромке рамы по направлению к центру панели (высота панели равна  $2H$ ), ось  $x$  направлена перпендикулярно поверхности стеклянной панели толщиной  $L$ .

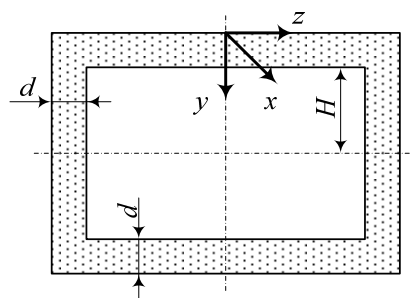


Рис. 1. Стеклянная панель, заключенная в раму

Для определения поля температуры в стеклянной пластине необходимо решить дифференциальное уравнение теплопроводности [2]:

$$\rho c \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + I(t) k e^{-kx} \eta(y); \quad 0 < x < L; \quad -d < y < H, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность,  $\text{кг/м}^3$ ;  $c$  – теплоемкость  $\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ ;  $T(x, y, t)$  – температура,  $\text{К}$ ;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\text{Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ;  $x, y$  – пространственные координаты,  $\text{м}$ ;  $t$  – время,  $\text{с}$ ;  $I(t)$  – плотность лучистого потока, поступающего на поверхность пластины,  $\text{Вт/м}^2$ ;  $k$  – коэффициент поглощения,  $\text{м}^{-1}$ ;  $\eta(y)$  – единичная функция Хевисайда ( $\eta(y) = 0$  при  $y < 0$ ;  $\eta(y) = 1$  при  $y > 0$ ).

Начальное условие имеет вид

$$T(x, y, 0) = T_i \text{ при } t = 0, \quad (2)$$

где  $T_i$  – начальная температура пластины,  $\text{К}$ .

Краевые условия записаны в виде

$$-\lambda \frac{\partial T(0, y, t)}{\partial x} = [h_1(T_{c1}(t) - T(0, y, t)) + \varepsilon_{\text{пр}}\sigma(T_{c1}^4(t) - T^4(0, y, t))]\eta(y) \text{ при } x = 0; \quad (3)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(L, y, t)}{\partial x} = [h_2(T(L, y, t) - T_{c2}(t)) + \varepsilon_{\text{пр}}\sigma(T^4(L, y, t) - T_{c1}^4(t))]\eta(y) \text{ при } x = L; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T(x, -d, t)}{\partial y} = \frac{\partial T(x, H, t)}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

где  $h_1, h_2$  – коэффициенты конвективной теплоотдачи с поверхностей,  $\text{Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ ;  $T_{c1}(t), T_{c2}(t)$  – температура окружающей среды,  $\text{К}$ ;  $\varepsilon_{\text{пр}}$  – приведенная степень черноты;  $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана ( $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К}^4)$ );  $L$  – толщина пластины,  $\text{м}$ .

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{(1/\varepsilon_{\text{ср}} + 1/\varepsilon_{\text{п}} - 1)}, \quad (6)$$

где  $\varepsilon_{\text{ср}}, \varepsilon_{\text{п}}$  – степень черноты среды и поверхности стекла соответственно.

Коэффициент конвективного теплообмена от среды, нагреваемой пожаром  $h_2(T(L, t), T_{c2}(t))$ , меняется с изменением температуры дымовых газов и температуры обогреваемой поверхности пластины, коэффициент конвективного теплообмена между необогреваемой поверхностью пластины и окружающим воздухом  $h_1(T(0, t), T_{c1})$  меняется с ростом температуры необогреваемой поверхности.

Средний коэффициент теплоотдачи для вертикальной поверхности высотой  $H$  с учетом ламинарного и турбулентного режимов в широком диапазоне изменения параметров ( $\text{Pr} = 0,022\text{--}7640, \text{Ra}_H = 10^{-4}\text{--}10^{15}$ ) можно определить из выражений [3]:

$$h_1 = \frac{\text{Nu}_{\text{ср,в}} \lambda_{\text{в}}}{H}; h_2 = \frac{\text{Nu}_{\text{ср,г}} \lambda_{\text{г}}}{H}, \quad (7)$$

где  $\text{Nu}_{\text{ср}}$  – критерий Нуссельта;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\text{Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ;  $H$  – высота стеклянной панели,  $\text{м}$ . Индексы: в – воздух; г – дымовые газы.

$$\text{Nu}_{\text{ср,в}}^{1/2} = 0,825 + \frac{0,387\text{Ra}_{H,\text{в}}^{1/6}}{\left[1 + (0,492/\text{Pr}_{\text{в}})^{9/16}\right]^{8/27}}; \quad (8)$$

$$\text{Nu}_{\text{ср,г}}^{1/2} = 0,825 + \frac{0,387\text{Ra}_{H,\text{г}}^{1/6}}{\left[1 + (0,492/\text{Pr}_{\text{г}})^{9/16}\right]^{8/27}},$$

где  $\text{Ra}$  – критерий Релея;  $\text{Pr}$  – критерий Прандтля.

$$\text{Gr}_{H,\text{в}} = \frac{g \beta_t (T_{\infty} - T_{\text{п}}) H^3}{\nu_{\text{в}}^2}; \quad (9)$$

$$\text{Gr}_{H,\text{г}} = \frac{g \beta_t (T_{\infty} - T_{\text{п}}) H^3}{\nu_{\text{г}}^2},$$

где  $\text{Gr}$  – критерий Грасгофа;  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\text{м/с}^2$ ;  $\beta_t = 1/T$  – термический коэффициент объемного расширения,  $\text{К}^{-1}$ ;  $T_{\infty}$  – температура окружающей среды,  $^{\circ}\text{C}$ ;  $T_{\text{п}}$  – температура поверхности стеклянной панели,  $^{\circ}\text{C}$ ;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $\text{м}^2/\text{с}$ .

$$\text{Pr}_{\text{в}} = \frac{\nu_{\text{в}}}{a_{\text{в}}}; \text{Pr}_{\text{г}} = \frac{\nu_{\text{г}}}{a_{\text{г}}}, \quad (10)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$ .

$$\text{Ra}_{H,\text{в}} = \text{Gr}_{H,\text{в}} \text{Pr}_{\text{в}}; \text{Ra}_{H,\text{г}} = \text{Gr}_{H,\text{г}} \text{Pr}_{\text{г}}. \quad (11)$$

Теплофизические и динамические параметры, входящие в формулы (4)–(10), берутся при температуре  $T_{\text{ср}}$ :

$$T_{\text{ср}} = \frac{T_{\infty} - T_{\text{п}}}{2}. \quad (12)$$

Свойства воздуха и дымовых газов при разных температурах, приведенные в таблицах [3], аппроксимированы полиномами второй степени:

$$\lambda_{\text{в}}(T) = 0,02428 + 8,120878 \cdot 10^{-3} \cdot T - 2,971432 \cdot 10^{-8} \cdot T^2; \quad (13)$$

$$\nu_{\text{в}}(T) = 1,319498 \cdot 10^{-5} + 9,118545 \cdot 10^{-8} \cdot T + 8,279991 \cdot 10^{-11} \cdot T^2; \quad (14)$$

$$\text{Pr}_{\text{в}}(T) = 0,707193 - 2,040537 \cdot 10^{-4} \cdot T + 3,26627 \cdot 10^{-7} \cdot T^2; \quad (15)$$

$$\lambda_r(T) = 0,022854 + 8,499151 \cdot 10^{-5} \cdot T - 9,64936 \cdot 10^{-10} \cdot T^2; \quad (16)$$

$$v_r(T) = 1,10659 \cdot 10^{-5} + 9,905 \cdot 10^{-8} \cdot T + 6,376374 \cdot 10^{-11} \cdot T^2; \quad (17)$$

$$Pr_r(T) = 0,71022 - 1,88012 \cdot 10^{-4} \cdot T + 5,594406 \cdot 10^{-8} \cdot T^2. \quad (18)$$

Теплофизические свойства образцов оконного стекла исследовались в интервале температур 25–500°C на приборе LFA 457 MicroFlash фирмы NETZSCH [4] методом лазерной вспышки [5].

Зависимость коэффициента теплопроводности и коэффициента температуропроводности оконного стекла от температуры может быть аппроксимирована полиномами второй степени:

$$\lambda = 0,718899 + 1,541745 \cdot 10^{-3} \cdot T - 1,39502 \cdot 10^{-6} \cdot T^2; \quad (19)$$

$$a = 4,378452 \cdot 10^{-7} + 4,179546 \cdot 10^{-10} \cdot T + 5,629294 \cdot 10^{-10} \cdot T^2. \quad (20)$$

Среднеобъемную температуру помещения при огневом воздействии  $T_{c2}(t)$  зададим при помощи стандартной кривой пожара [6]:

$$T_n(t) = 345 \lg(0,1383t + 1) + T_0, \quad (21)$$

где  $T_n(t)$  – температура огневого воздействия, °C;  $t$  – время воздействия, с;  $T_0$  – начальная температура огневого воздействия, °C.

Распределение напряжений  $\sigma_{zz}$ , Н/м<sup>2</sup> в стекле в области  $-d < y < H$  можно определить из выражения [2]:

$$\sigma_{zz}(y, t) = \frac{E\beta}{L(H+d)} \int_{-d}^H \int_0^L T(x, y, t) dx dy - \frac{E\beta}{L} \int_0^L T(x, y, t) dx, \quad (22)$$

где  $E$  – модуль Юнга, Н/м<sup>2</sup>;  $\beta$  – коэффициент линейного теплового расширения стекла, К<sup>-1</sup>.

Для расчета распределения температуры в стеклянной панели с учетом температурной зависимости теплофизических характеристик стекла, воздуха, дымовых газов и нелинейного характера изменения температуры окружающей среды в процессе пожара задачи (4)–(21) были решены методом конечных элементов с использованием пакета FlexPDE [7].

На рис. 2 показаны профили температуры на обогреваемой стороне панели при разных интенсивностях падающего на нее теплового излучения. При этом принимались коэффициент поглощения  $k = 50 \text{ см}^{-1}$ , половина ширины панели 0,9 м, толщина панели 6 мм, ширина затенения 18 мм.

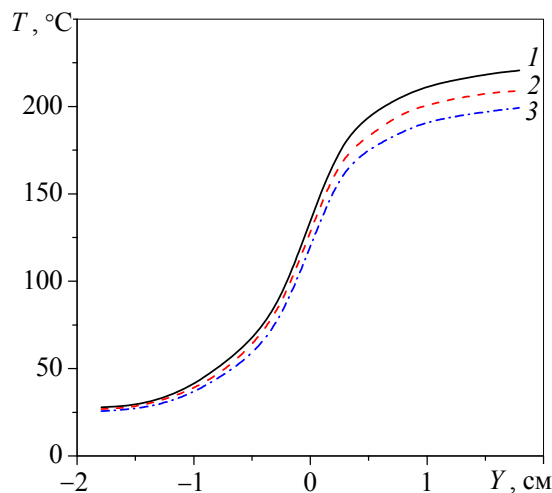


Рис. 2. Распределение температуры по обогреваемой поверхности стеклянной панели в момент времени  $t = 180$  с:  $1 - I = 15 \text{ кВт/м}^2$ ;  $2 - I = 10 \text{ кВт/м}^2$ ;  $3 - I = 5 \text{ кВт/м}^2$

На приведенных зависимостях показано, что температура в области, затененной рамой, остается близкой к начальному значению, а затем быстро возрастает по направлению к центру панели. Чем выше интенсивность теплового излучения, тем выше температура панели.

По определенному температурному профилю по формуле (22) были рассчитаны термические напряжения, возникающие за счет неравномерности прогрева поверхности панели.

На рис. 3 показано распределение напряжений в области панели, затененной рамой, и в открытой области. Видно, что наибольшие растягивающие напряжения возникают в области панели, затененной рамой. При этом напряжения тем больше, чем больше интенсивность падающего теплового излучения. По направлению к центру панели напряжения снижаются и достигают небольших сжимающих значений.

Время достижения критических напряжений  $\tau_b$  в панели, приводящих к ее разрушению, определяется из формулы (23):

$$\sigma_{zz}(-d, \tau_b) = \sigma_b, \quad (23)$$

где  $\sigma_b$  – критические напряжения, приводящие к разрушению стекла.

Выражение (23) можно переписать в виде

$$\Delta T(-d, \tau_b) = \frac{\sigma_{zz}(-d, \tau_b)}{E\beta} = \frac{\sigma_b}{E\beta} = T_k, \quad (24)$$

где  $T_k$  – критическая температура перегрева центральной части панели относительно ее края, приводящая к возникновению критических напряжений.

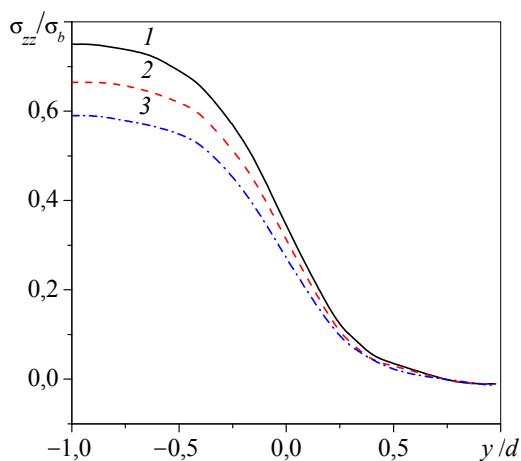


Рис. 3. Распределение напряжений в области, затененной рамой, и открытой области в момент времени  $t = 100$  с: 1 –  $I = 15$  кВт/м<sup>2</sup>; 2 –  $I = 10$  кВт/м<sup>2</sup>; 3 –  $I = 5$  кВт/м<sup>2</sup>

По формулам (23) и (24) были проведены расчеты времени достижения критических напряжений  $\tau_b$  в панели, приводящих к ее разрушению, при различной вариации параметров модели.

На рис. 4 показана зависимость времени достижения критических напряжений  $\tau_b$  в панели от интенсивности радиационного теплового потока  $I$ , поступающего на поверхность панели при разных длинах поглощения излучения  $l = 1/k$ . Половина ширины панели равна  $H = 0,9$  м, толщина панели 6 мм, ширина затенения 18 мм.

Как видно из приведенных зависимостей, время разрушения панели уменьшается с увеличением интенсивности радиационного теплового потока и увеличивается с увеличением критических напряжений в панели.

Зависимость времени достижения критических напряжений  $\tau_b$  в панели от ширины затенения панели рамой  $d$ , мм, при разных длинах поглощения излучения показана на рис. 5. Видно, что время разрушения панели уменьшается с увеличением ширины затенения и тем больше, чем больше длина поглощения и чем больше критическая температура (критическое напряжение).

Увеличение времени  $\tau_b$  с уменьшением ширины затенения объясняется тем, что рас-

тягивающие напряжения, возникающие в затененной области, пропорциональны разности температур центральной зоны панели, подверженной излучению, и ее затененной части. Если ширину затененной части панели уменьшить, то за счет теплопроводности температура этой зоны повысится и уменьшится разность температур с центральной зоной, а значит, уменьшатся и напряжения. Поэтому центральная зона панели должна нагреться до больших значений, чтобы возникли критические напряжения, то есть время разрушения увеличится.

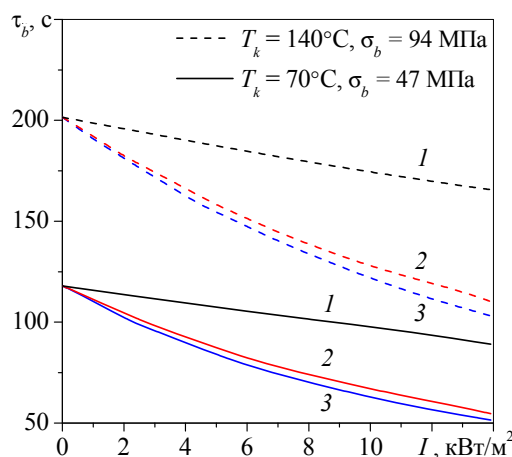


Рис. 4. Зависимость времени достижения критических напряжений в панели от интенсивности падающего излучения при разных длинах поглощения: 1 –  $l = 20$  мм; 2 –  $l = 2$  мм; 3 –  $l = 0,2$  мм

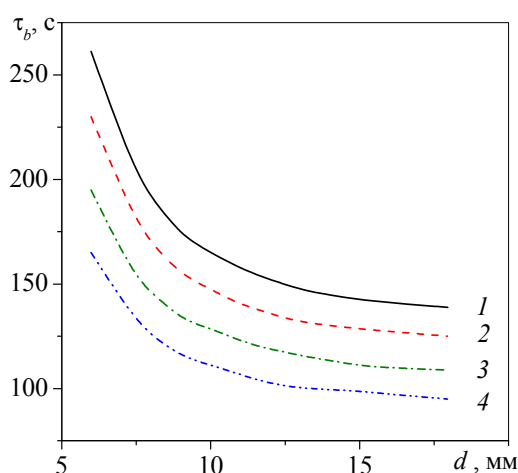


Рис. 5. Зависимость времени достижения критических напряжений в панели от ширины затенения панели при разных длинах поглощения: 1 –  $l = 20$  мм; 2 –  $l = 10$  мм; 3 –  $l = 5$  мм; 4 –  $l = 2$  мм



На рис. 6 представлена зависимость времени  $\tau_b$  от толщины панели при разной ширине затенения панели рамой. Критическая температура  $110^\circ\text{C}$  при  $\sigma_b = 73 \text{ МПа}$ , интенсивность падающего излучения  $10 \text{ кВт/м}^2$ .

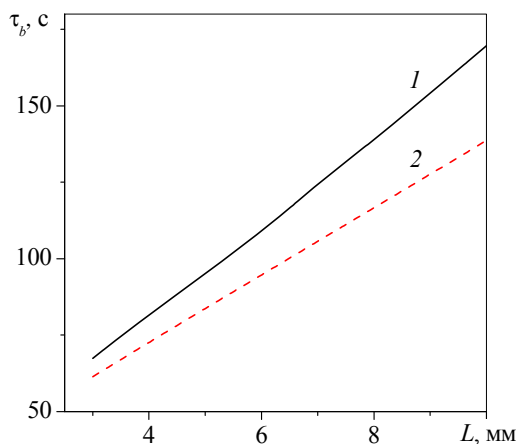


Рис. 6. Зависимость времени достижения критических напряжений в панели от ее толщины при разной ширине затенения панели:  
1 –  $d = 10 \text{ мм}$ ; 2 –  $d = 18 \text{ мм}$

Из приведенных на рис. 5 данных следует, что с увеличением толщины панели время достижения критических напряжений, приводящих к ее разрушению, увеличивается, и тем больше, чем меньше ширина затенения.

**Заключение.** Выполнены расчеты, связанные с анализом термонапряженного состояния ограниченной стеклянной панели с учетом температурной зависимости теплофизических свойств стекла, воздуха и дымовых газов, конструктивных особенностей светопрозрачной конструкции и нелинейного характера изменения температуры окружающей среды при огневом воздействии.

На основе разработанного с помощью пакета FlexPDE программного кода для расчета распределения температуры и напряжений в ограниченной стеклянной панели с учетом температурной зависимости теплофизических характеристик стекла, воздуха и дымовых газов, конструктивных особенностей СПК и нелинейного характера изменения температуры окружающей среды в процессе пожара возможно оценивать время разрушения светопрозрачной конструкции при пожаре.

### Литература

1. Расчет предела огнестойкости светопрозрачной конструкции по критерию потери целостности / А. С. Дмитриченко [и др.] // Чрезвычайные ситуации: предупреждение и ликвидация. 2017. № 2 (42). С. 27–37.
2. Joshi A. A., Pagni P. J. Glass Breaking in Fires // Fire Safety Sciences: Proceedings of the Third International Symposium. 1991. P. 791–802.
3. Мартыненко О. Г., Соковитин Ю. А. Свободно-конвективный теплообмен. Справочник. Минск: Наука и техника, 1982. 399 с.
4. Приборы термического анализа группы NETZSCH. URL: <http://www.netzsch-thermal-analysis.com/en/products-solutions.html> (дата обращения: 20.01.2018).
5. Parker W. J., Jenkins R. J., Butler C. P. Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity // Journal of Appl. Physics. 1961. Vol. 32, no. 9. P. 1675–1684.
6. Стекло и изделия из него. Метод испытания на огнестойкость: ГОСТ 33000-2014. М.: Стандартинформ, 2015. 13 с.
7. FlexPDE finite element model builder for Partial Differential Equations. URL: <http://www.pdesolutions.com> (дата обращения 15.01.2018).

### References

1. Dmitrichenko A. S., Yanovskiy S. Yu., Chernevich O. V., Kerimov K. D. Calculation of the fire resistance time of translucent structures according to the criterion of the loss of thermal insulation capacity. *Chrezvychaynye situatsii: preduprezhdenie i likvidatsiya* [Emergency situations: prevention and elimination], 2017, no. 2 (42), pp. 27–37 (In Russian).
2. Joshi A. A., Pagni P. J. Glass Breaking in Fires. *Proceedings of the Third International Symposium "Fire Safety Sciences"*, 1991, pp. 791–802.
3. Martynenko O. G., Sokovishin Yu. A. *Svobodno-konvektivnyy teploobmen. Spravochnik* [Free and convective heat exchange. Reference book]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1982. 399 p.
4. *Pribory termicheskogo analiza gruppy NETZSCH* [Devices of the thermal analysis of NETZSCH group]. Available at: <http://www.netzsch-thermal-analysis.com/en/products-solutions.html> (accessed 20.01.2018).
5. Parker W. J., Jenkins R. J., Butler C. P. Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity. *Journal of Appl. Physics*, 1961, vol. 32, no. 9, pp. 1675–1684.
6. GOST 33000-2014. Glass and products from it. A test method on fire resistance. Moscow, Standartinform Publ., 2015. 13 p. (In Russian).

7. FlexPDE finite element model builder for Partial Differential Equations. Available at: <http://www.pdesolutions.com> (accessed 15.01.2018).

### Информация об авторах

**Дмитриченко Александр Степанович** – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой энергосбережения, гидравлики и теплотехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [egit@belstu.by](mailto:egit@belstu.by)

**Здитовецкая Светлана Валентиновна** – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры энергосбережения, гидравлики и теплотехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [teka\\_11@mail.ru](mailto:teka_11@mail.ru)

**Яновский Сергей Юрьевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Университет гражданской защиты Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Беларусь (220118, г. Минск, ул. Машиностроителей, 25, Республика Беларусь). E-mail: [yanovskiy@mail.ru](mailto:yanovskiy@mail.ru)

**Керимов Керим Джамалович** – адъюнкт. Университет гражданской защиты Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Беларусь (220118, г. Минск, ул. Машиностроителей, 25, Республика Беларусь).

### Information about the authors

**Dmitrichenko Aleksandr Stepanovich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Energy-Saving, Hydraulics and Heat Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [egit@belstu.by](mailto:egit@belstu.by)

**Zditovetskaya Svetlana Valentinovna** – PhD (Engineering), Senior Lecturer, the Department of Energy-Saving, Hydraulics and Heat Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [teka\\_11@mail.ru](mailto:teka_11@mail.ru)

**Yanovskiy Sergey Yur'yevich** – PhD (Physics and Mathematics), Senior Research. University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus (25, Mashinostroiteley str., 220118, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [yanovskiy@mail.ru](mailto:yanovskiy@mail.ru)

**Kerimov Kerim Dzhamalovich** – adjunct. University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus (25, Mashinostroiteley str., 220118, Minsk, Republic of Belarus).

*Поступила 10.05.2018*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

---

УДК 681.53

**Д. А. Гринюк, И. Г. Сухорукова, Н. М. Олиферович, И. О. Оробей**  
Белорусский государственный технологический университет

### **АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИТЕРИЕВ**

В статье рассматриваются различные варианты настройки ПИД-алгоритма для одновременного решения задачи компенсации отклонений по сигналам задания и возмущения. Исследованы различные варианты конструкции регуляторов с двумя степенями свободы (of the two-degree-of-freedom structure, 2DoF). Для объекта управления с несколькими вариантами динамики произведен анализ как известной структуры регулятора с двумя степенями свободы, так и собственный вариант. Также были разработаны и рассмотрены варианты построения нелинейного ПИД-регулятора с двумя степенями свободы. В качестве основы настройки и последующего сравнения линейных и нелинейных вариантов 2DoF-регуляторов использованы два варианта интегральных критериев. Показано, что два варианта структур с двумя степенями свободы улучшают работу ПИД-регулятора, но не являются эквивалентными и не обеспечивают одновременной минимизации интегральных критериев возмущения и заданного значения. Сделан вывод, что при выборе структур для решения прикладных задач, следует обладать априорной информацией об амплитуде и интенсивности основных возмущений, которые будут воздействовать на объект управления. Среди использованных для комплексной настройки интегральных критериев модифицированный интегральный критерий приводит к более приемлемому для технологических объектов переходному процессу.

Обнаружено меньшее расхождение между работами двух нелинейных структур 2DoF. Для рассмотренных вариантов динамики объекта управления с точки зрения интегральных критериев нелинейная структура лучше справлялась с подавлением возможных отклонений.

**Ключевые слова:** ПИД-регулятор, регулятор с двумя степенями свободы, нелинейный регулятор, интегральные критерии настройки.

**D. A. Hryniuk, I. G. Suhorukova, N. M. Oliferovich, I. O. Orobei**  
Belarusian State Technological University

### **ANALYSIS OF THE EFFICIENCY OF PID CONTROLLER WITH TWO-DEGREE-OF-FREEDOM STRUCTURE WITH INTEGRATED CRITERIA**

The article considers various options for configuring the PID algorithm for simultaneous solution of the problem of compensation of deviations from the reference and disturbance signals. Different variants of the controller with two-degree-of-freedom structure (2DoF) are investigated. For a control object with several variants of dynamics, analysis of both the known structure of a controller with two degrees of freedom, so its own version, is performed. Also options for constructing a nonlinear PID controller with two degrees of freedom were developed and considered. Two variants of integral criteria are used as a basis for tuning and subsequent comparison of linear and nonlinear variants of 2DoF controllers. It is shown that two versions of structures with two degrees of freedom improve the operation of the PID controller, but are not equivalent and don't provide simultaneous minimization of integral disturbance criteria and a given value. It is concluded that when choosing the structures for solving applied problems, it is necessary to have a priori information about the amplitude and intensity of the main disturbances that will affect the control object. Among the integral criteria used for complex turning, the modified integral criterion leads to a more transient process that is more acceptable for technological processes.

A smaller discrepancy is found between the work of two nonlinear 2DoF structures. For the considered variants of the dynamics of the control object, from the point of view of integral criteria, the nonlinear structure copes better with suppression of possible deviations.

**Key words:** PID controller, controller with two-degree-of-freedom structure, non-linear PID, integral performance criteria.

**Введение.** Качественная настройка промышленных регуляторов способствует повышению стабильности технологических параметров и уменьшает энергозатраты на единицу продукции. Это обусловлено уменьшением переходных процессов и критических отклонений. Практика обучения специалистов теории управления, а также большинство учебной литературы используют наблюдение за переходным процессом вследствие изменения сигнала задания для проверки качества регулирования. В то же время большинство систем стабилизации технологических параметров предназначены для подавления возмущений в процессе функционирования. Иногда возникают задачи, при которых система подвергается частым возмущениям как со стороны канала возмущения, так и ввиду частого изменения сигнала задания.

**Основная часть.** Одним из вариантов решения проблемы является использование two-degree-of-freedom structure (2DoF) [1–7]. Существует классический вариант реализации структуры (рис. 1 [3]), но можно предложить и альтернативный вариант. Несмотря на введение дополнительных коэффициентов  $a$  и  $b$ , задачу поиска настроек регулятора можно легко разделить на два этапа: настройка основных коэффициентов  $K_P$ ,  $T_I$  и  $T_D$ , а затем поиск дополнительных коэффициентов  $a$  и  $b$ .

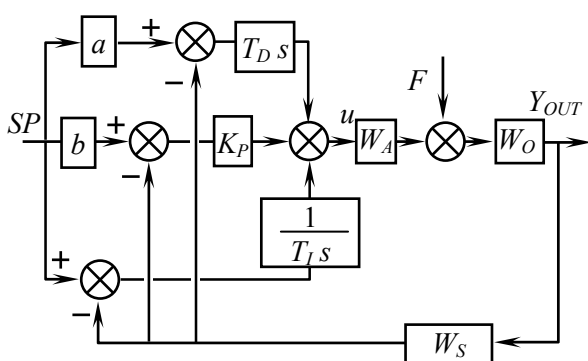


Рис. 1. Классический вариант регулятора с двумя степенями свободы (КРДСС).

$SP$  – сигнал задания;  $Y_{OUT}$  – выход;  
 $K_P$  – коэффициент усиления;  $T_I$  – время интегрирования;  $T_D$  – время дифференцирования;  
 $W_A$  – передаточная функция исполнительного механизма;  $W_S$  – передаточная функция измерительного преобразователя;  
 $W_O$  – передаточная функция объекта;  $F$  – сигнал возмущения;  $s$  – оператор передаточной функции

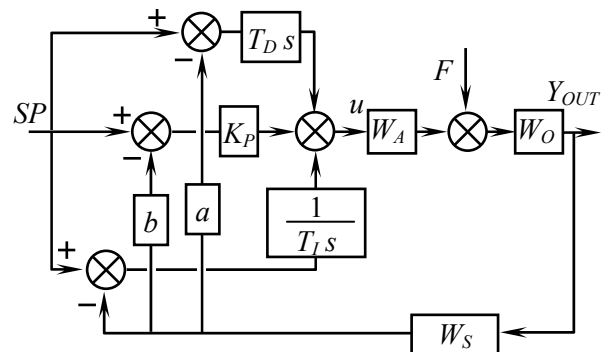


Рис. 2. Альтернативный вариант регулятора с двумя степенями свободы (АРДСС)

В качестве критерия настройки, как отражено в работе [8], легко можно использовать интегральные критерии [9]. В работе были использованы два интегральных критерия настройки.

Первый критерий является классическим, в то же время второй обеспечивает компромиссный вариант между быстродействием, перерегулированием и запасом по устойчивости [9].

$$\int_0^{tf} e(t)^2 dt \rightarrow \min; \tag{1}$$

$$\int_0^{tf} t^2 |e(t)| dt \rightarrow \min. \tag{2}$$

При настройке по информационному каналу задания ошибка вычислялась как

$$e(t) = SP - Y_{OUT}. \tag{3}$$

При настройке по информационному каналу возмущения ошибка соответствовала выходному значению

$$e(t) = Y_{OUT}. \tag{4}$$

Алгоритм настройки предполагает попеременное применение формул (3) и (4). Для структуры на рис. 1 сначала находятся настройки  $K_P$ ,  $T_I$  и  $T_D$  по критерию с использованием формулы (4), а затем по тому же критерию уже с использованием выражения (3) рассчитываются дополнительные коэффициенты  $a$  и  $b$ . В случае использования структуры на рис. 2  $K_P$ ,  $T_I$  и  $T_D$  определялись в соответствии с (3), а уже  $a$  и  $b$  по формуле (4).

Для исследования была выбрана система со следующими передаточными функциями:

$$W_A(s) = \frac{1}{5s+1}; \quad (5)$$

$$W_S(s) = \frac{1}{10s+1}; \quad (6)$$

$$W_O(s) = \frac{1}{(15s+1)(25s+1)} \exp(-\tau s). \quad (7)$$

Поскольку транспортное запаздывание времени  $\tau$  существенно влияет на результат применения интегральных критериев [8], методика настройки была проверена для нескольких значений  $\tau = [0; 3; 7,5; 15]$ .

Минимизация критериев производилась в Matlab. Время моделирования для каждого значения  $\tau$  было свое, оно определялось предварительным экспериментом. При использовании критерия (1) время  $tf$  было в 1,5 раза больше, чем при использовании критерия (2), что являлось следствием большей длительности процесса затухания.

Кроме линейных структур использовался и ПИД-регулятор с нелинейной характеристикой [8, 10].

$$\mu(e) = \text{sign}(e) \ln(1 + |e|) - 1. \quad (8)$$

При этом нелинейное преобразование использовалось только для интегральной и пропорциональной составляющих регулятора (второй вариант нелинейного ПИД-регулятора на рис. 3).

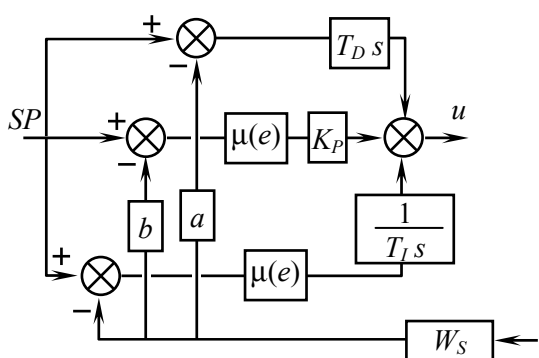


Рис. 3. Нелинейный альтернативный вариант регулятора с двумя степенями свободы

Соотношения между настройками линейного (LR) и нелинейного (NR) ПИД-регуляторов по каналу возмущения  $f$  и задания  $SP$  можно видеть в табл. 1–2, где  $K_{P,SP}$ ,  $T_{I,SP}$ ,  $T_{D,SP}$  – настройки, которые были найдены при минимизации интегральных критериев по каналу сигнала задания;  $K_{P,F}$ ,  $T_{I,F}$ ,  $T_{D,F}$  – настройки,

которые были найдены при минимизации интегральных критериев по каналу возмущения.

Таблица 1

Соотношения между параметрами регуляторов, которые найдены по критерию (1)

Тип ПИД	Соотношение параметров	$\tau, c$			
		0	3	7,5	15
LR	$K_{P,SP}/K_{P,F}$	0,8615	0,8686	0,8690	0,8847
	$T_{I,SP}/T_{I,F}$	16,4030	7,2977	4,4148	2,9489
	$T_{D,SP}/T_{D,F}$	0,5319	0,6145	0,6391	0,6593
NR	$K_{P,SP}/K_{P,F}$	0,9375	0,9188	0,9000	0,8647
	$T_{I,SP}/T_{I,F}$	11,9070	6,1048	3,8248	2,6693
	$T_{D,SP}/T_{D,F}$	0,5737	0,6377	0,6598	0,6812

Таблица 2

Соотношения между параметрами регуляторов, которые найдены по критерию (2)

Тип ПИД	Соотношение параметров	$\tau, c$			
		0	3	7,5	15
LR	$K_{P,SP}/K_{P,F}$	0,3689	0,5342	0,4882	0,6394
	$T_{I,SP}/T_{I,F}$	5,9179	3,4831	2,7151	1,9518
	$T_{D,SP}/T_{D,F}$	0,3486	0,5221	0,4102	0,5660
NR	$K_{P,SP}/K_{P,F}$	0,5797	0,7028	0,7083	0,7849
	$T_{I,SP}/T_{I,F}$	4,8036	2,8595	2,3341	1,6585
	$T_{D,SP}/T_{D,F}$	0,5107	0,6459	0,6205	0,7453

Табл. 3–7 получены путем деления значения интегрального критерия на минимальное значение интегрального критерия при данном запаздывании, где  $KID_{SP}$  – относительное значение интегрального критерия для настроек классического ПИД-регулятора, найденных при настройках по каналу задания;  $KID_F$  – относительное значение интегрального критерия для настроек классического ПИД-регулятора, найденных при настройках по каналу возмущения.

Таблица 3

Относительный интегральный критерий по возмущению по критерию (1)

Тип ПИД	Соотношение параметров	$\tau, c$			
		0	3	7,5	15
LR	АРДСС	3,9087	2,4091	1,8054	1,4594
	$KID_{SP}$	5,2363	2,8780	2,0339	1,5660
	$KID_F$	1	1,0114	1,0192	1,0246
NR	АРДСС	3,1277	1,9829	1,5357	1,2920
	$KID_{SP}$	3,8849	2,3120	1,7251	1,4231
	$KID_F$	1,0024	1	1	1

Таблица 4  
Относительный интегральный критерий по заданию по критерию (1)

Тип ПИД	Соотношение параметров	$\tau, c$			
		0	3	7,5	15
LR	КРДСС	2,4908	1,7292	1,4404	1,2781
	$KID_{SP}$	1	1	1	1
	$KID_F$	2,9579	2,1497	1,7578	1,4768
NR	КРДСС	2,4406	1,8364	1,4698	1,2759
	$KID_{SP}$	1,0576	1,0601	1,0504	1,0503
	$KID_F$	2,4936	1,9342	1,5796	1,3642

Таблица 5  
Относительный интегральный критерий по возмущению по критерию (2)

Тип ПИД	Соотношение параметров	$\tau, c$			
		0	3	7,5	15
LR	АРДСС	10,986	5,9113	4,4847	2,7973
	$KID_{SP}$	28,975	14,531	7,0241	4,1731
	$KID_F$	1,0260	1,0375	1,0036	1,0563
NR	АРДСС	7,7601	4,8329	3,2140	2,3835
	$KID_{SP}$	27,575	12,215	5,8081	3,2652
	$KID_F$	1	1	1	1

Таблица 6  
Относительный интегральный критерий по заданию по критерию (2)

Тип ПИД	Критерий	$\tau, c$			
		0	3	7,5	15
LR	КРДСС	3,2499	2,6725	2,2413	2,0020
	$KID_{SP}$	1,0964	1,0028	1,0798	1
	$KID_F$	5,5760	4,6725	3,8762	3,2010
NR	КРДСС	6,5172	4,1317	3,1874	1,5022
	$KID_{SP}$	1	1	1	1,0195
	$KID_F$	6,5461	4,7148	4,0921	2,8739

Таблица 7  
Относительное улучшение от использования структур КРДСС и АРДСС для обеспечения универсальности

Тип ПИД	Критерий	$\tau, c$			
		0	3	7,5	15
$KID_F/КРДСС$					
LR	(2)	1,7157	1,7483	1,7294	1,5989
	(1)	1,1874	1,2430	1,2202	1,1554
NR	(2)	1,0044	1,1411	1,2839	1,9131
	(1)	1,0217	1,0533	1,0747	1,0692
$KID_{SP}/АРДСС$					
LR	(2)	2,5328	2,3851	1,5598	1,4897
	(1)	1,3565	1,1967	1,1271	1,0731
NR	(2)	3,2352	2,4157	1,7805	1,3669
	(1)	1,2483	1,1682	1,1252	1,1027

Анализ таблиц показывает, что отличия между оптимальными настройками регуляторов по каналу задания и возмущения могут

отличаться в несколько раз. Наибольшее отличие наблюдается во времени интегрирования. Следует отметить, что использование нелинейного преобразования ошибки придает ПИД-регулятору большую универсальность при стабилизации технологических параметров.

Данные таблиц показывают, что дополнительные коэффициенты настроек позволяют уменьшить значение интегральных критериев, однако не всегда существенно. Наибольший эффект достигается для объектов без запаздывания или при небольшом его значении. Улучшения наблюдаются также и по перерегулированию, и по времени переходного процесса (рис. 4–9). Использование критерия (1), как обычно [9], приводит к высокой колебательности и длительности затухания.

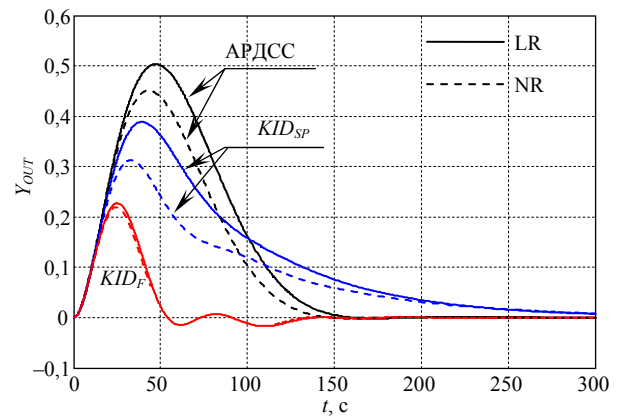


Рис. 4. Переходной процесс по возмущению для запаздывания  $\tau = 0$ . Настройка по критерию (2)

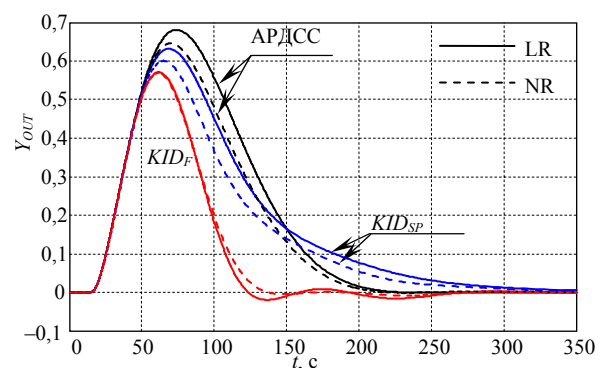


Рис. 5. Переходной процесс по возмущению для запаздывания  $\tau = 15$ . Настройка по критерию (2)

В целом структура КРДСС за счет дополнительных коэффициентов способствует уменьшению перерегулирования и времени переходного процесса. Структура АРДСС, в первую очередь, способствует улучшению быстродействия и уменьшению переходного процесса.

Результаты работы нелинейного регулятора по анализу таблиц и переходных процессов свидетельствуют о его преимуществе в сравнении с линейным регулятором. С практической точки зрения он показывает выигрыш не только по интегральному критерию, но и по времени переходного процесса, перерегулированию.

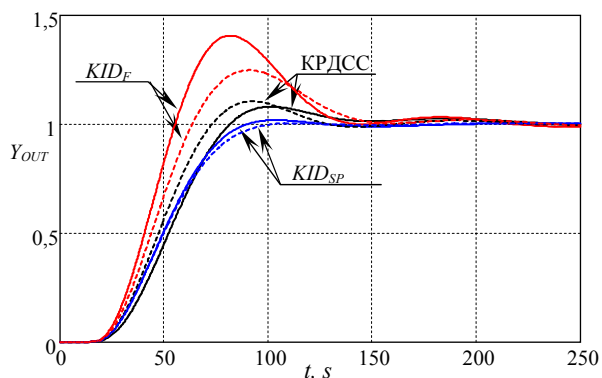


Рис. 6. Переходной процесс по заданию для запаздывания  $\tau = 15$ . Настройка по критерию (2)

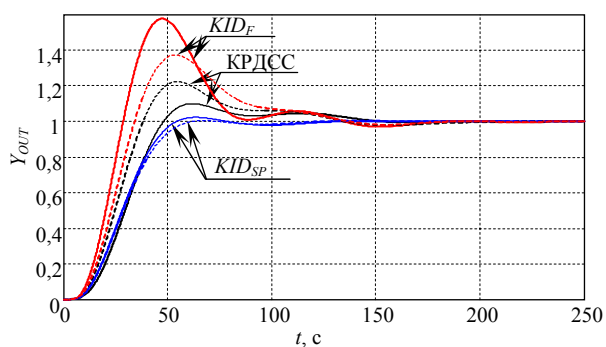


Рис. 7. Переходной процесс по заданию для запаздывания  $\tau = 3$ . Настройка по критерию (2)

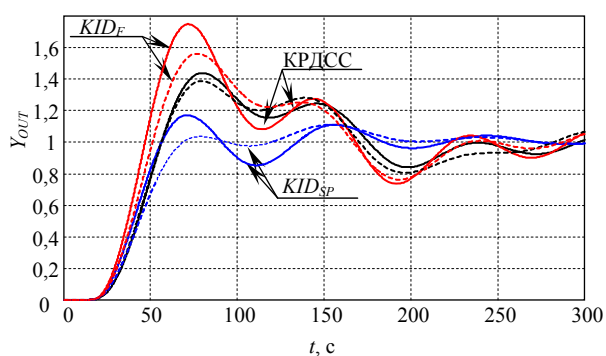


Рис. 8. Переходной процесс по заданию для запаздывания  $\tau = 15$ . Настройка по критерию (1)

Использование интегрального критерия (1) не способствует получению качественного переходного процесса для работы в прикладных условиях. Как было показано в публикации [9], использование данного критерия приводит к малому запасу по устойчивости, большому перерегулированию и длительному процессу затухания колебаний.

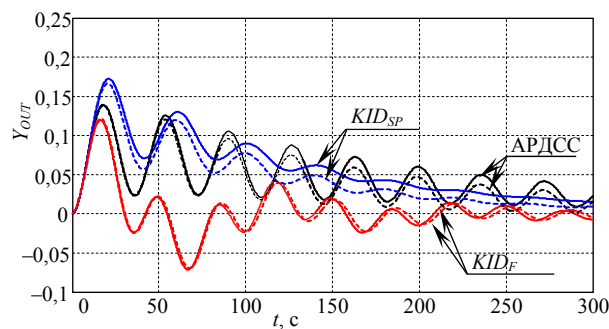


Рис. 9. Переходной процесс по возмущению для запаздывания  $\tau = 0$ . Настройка по критерию (1)

Следует отметить, что отдельно были проверены варианты использования 2DoF для ПИ-регулятора. Во многом они совпадают с результатами анализа работы ПИД-регулятора.

Методика последовательной настройки структуры 2DoF ПИД-регулятора путем использования интегрального критерия дает устойчивый вариант комплексной настройки. Одновременная настройка всех пяти коэффициентов позволит добиться большего баланса. Но в этом случае потребуется сформировать обобщенный критерий для канала по возмущению и сигналу задания с весовыми коэффициентами. Вариация этих весовых коэффициентов позволит перераспределять эффективность функционирования исходя из требований прикладной технологии.

**Заключение.** В результате проведенных исследований сделаем следующие выводы:

1. При использовании ПИД-регулятора для стабилизации технологических параметров следует заранее определить основные источники возмущений и на их основании производить выбор структуры и настройку регулятора two-degree-of-freedom.

2. Предложенные нелинейные варианты two-degree-of-freedom чаще всего обеспечивают лучшее качество функционирования контуров с обратными связями.

### Литература

1. Aström K. J., Hägglund T. Advanced PID control. ISA – the Instrumentation, Systems, and Automation Society. Durham: Research Triangle Park, 2006. 461 p.
2. Alfaro V. M., Vilanova R. Model-Reference Robust Tuning of PID Controllers. Cham: Springer International Publishing Switzerland, 2016. 202 p.
3. Денисенко В. В. Компьютерное управление технологическим процессом, экспериментом, оборудованием. М.: Горячая линия – Телеком, 2009. 608 с.

4. O'Dwyer A. Handbook of PI and PID controller tuning rules. London: Imperial College Press, 2009, 624 p.
5. Viteckova M., Vitecek A. 2DOF PI and PID Controllers Tuning // IFAC Proceedings. 2010. Vol. 43, issue 2. P. 343–348.
6. Latha K., Rajinikanth V. 2DOF PID controller tuning for unstable systems using bacterial foraging algorithm // SEMCCO 2012: Swarm, Evolutionary, and Memetic Computing, Lecture Notes in Computer Science. 2012. P. 519–527. DOI: 0.1007/978-3-642-35380-2\_61.
7. Multi-objective optimization based tuning tool for industrial 2DoF PID controllers / C. Gamboa [et al.] // IFAC-PapersOnLine, July 2017. Vol. 50, issue 1. P. 7511–7516.
8. Hryniuk D., Suhorukova I., Orobei I. Non-linear PID controller and methods of its setting // Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream), 2017, pp. 1–4. DOI: 10.1109/eStream.2017.7950327.
9. Гринюк Д. А., Оробей И. О., Сухорукова И. Г. Модификация интегральных критериев для повышения запаса по устойчивости // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 118–121.
10. Гринюк Д. А., Оробей И. О., Кузьмицкий И. Ф. Численное исследование алгоритмов уменьшения интегрального насыщения // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. 2005. Вып. XIII. С. 140–143.

### References

1. Aström K. J., Hägglund T. Advanced PID control. ISA – the Instrumentation, Systems, and Automation Society. Durham, Research Triangle Park, 2006. 461 p.
2. Alfaro V. M., Vilanova R. Model-Reference Robust Tuning of PID Controllers. Cham, Springer International Publishing Switzerland, 2016. 202 p.
3. Denisenko V. V. *Kompyuternoe upravlenie tekhnologicheskim protsessom, eksperimentom, oborudovaniem* [Computer control of technological process, experiment, equipment]. Moscow, Goryachaya liniya – Telekom Publ., 2009. 608 p.
4. O'Dwyer A. Handbook of PI and PID controller tuning rules. London, Imperial College Press, 2009, 624 p.
5. Viteckova M., Vitecek A. 2DOF PI and PID Controllers Tuning. *IFAC Proceedings*, 2010, vol. 43, issue 2, pp. 343–348.
6. Latha K., Rajinikanth V. 2DOF PID controller tuning for unstable systems using bacterial foraging algorithm. *SEMCCO 2012: Swarm, Evolutionary, and Memetic Computing, Lecture Notes in Computer Science*, 2012, pp. 519–527. DOI: 0.1007/978-3-642-35380-2\_61.
7. Gamboa C., Rojas J. D., Arrieta O., Vilanova R. Multi-objective optimization based tuning tool for industrial 2DoF PID controllers. *IFAC-PapersOnLine*, July 2017, vol. 50, issue 1, pp. 7511–7516.
8. Hryniuk D., Suhorukova I., Orobei I. Non-linear PID controller and methods of its setting. *Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream)*, 2017, pp. 1–4. DOI: 10.1109/eStream.2017.7950327.
9. Hryniuk D. A., Orobey I. O., Sukhorukova I. G. Modification of integral criteria for increasing the margin of stability. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6, Physics and Mathematics. Informatics, pp. 118–121 (In Russian).
10. Hryniuk D. A., Orobey I. O., Kuz'mitskiy I. F. Numerical study of algorithms for decreasing integral saturation. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physics and Mathematics. Informatics, 2005, issue XIII, pp. 140–143 (In Russian).

### Информация об авторах

**Гринюк Дмитрий Анатольевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: hryniuk@tut.by

**Сухорукова Ирина Геннадьевна** – ассистент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: irina\_x@ Rambler.ru

**Олиферович Надежда Михайловна** – ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: bogosnadya@ Rambler.ru



**Оробей Игорь Олегович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: orobei@tut.by

#### **Information about the authors**

**Hryniuk Dmitry Anatol'yevich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hryniuk@tut.by

**Suhorukova Irina Gennad'yevna** – assistant lecturer, the Department of Information Systems and Technology. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: irina\_x@rambler.ru

**Oliferovich Nadezhda Mikhaylovna** – assistant lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bogosnadya@rambler.ru

**Orobei Igor' Olegovich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: orobei@tut.by

*Поступила 15.05.2018*

УДК 681.53

**Н. М. Олиферович, Д. А. Гринюк, И. О. Оробей, И. Г. Сухорукова**  
Белорусский государственный технологический университет

### **DEADBEAT РЕГУЛЯТОР С ПРОГНОЗИРУЕМЫМ УРОВНЕМ СИГНАЛА УПРАВЛЕНИЯ**

В статье рассматриваются различные алгоритмы для расчета параметров настройки аperiodического цифрового (deadbeat) регулятора. Данный регулятор имеет высокое быстродействие, однако требует возможности формирования большого управляющего воздействия.

Основное внимание при разработке алгоритмов расчета уделено возможности построения deadbeat регулятора для стабилизации технологических параметров в условиях ограничения на управляющее воздействие. Предложена методика расчета настроек deadbeat регулятора при условии формирования максимально возможных управляющих импульсов на начальной стадии отработки сигнала задания. Проанализирована зависимость максимально возможного управляющего воздействия от времени дискретизации при различных вариантах удлинения переходного процесса.

На примере показаны временные зависимости переходных процессов и управляющих воздействий работы регуляторов, которые были синтезированы на основании разработанных алгоритмов расчета с различным временем переходного процесса и временем дискретизации. Проведен анализ влияния выбора структуры на устойчивость. Устойчивость анализировалась как с помощью вариации параметров объекта, так и путем оценки запаса устойчивости по амплитуде и по фазе с помощью диаграммы Боде. Сделан вывод об усилении устойчивости (робастности) с увеличением количества тактов переходного процесса. Отмечены ограничения в применении разработанных алгоритмов расчета на практике.

**Ключевые слова:** цифровой регулятор, аperiodический регулятор, робастность.

**N. M. Oliferovich, D. A. Hryniuk, I. O. Orobei, I. G. Suhorukova**  
Belarusian State Technological University

### **DEADBEAT CONTROLLER WITH PREDICTABLE LEVEL OF CONTROL SIGNAL**

This article considers various calculating algorithms for the settings of an deadbeat controller. This controller has a high speed, but it requires the possibility of high control action forming.

The main attention in the development of calculation algorithms is given to the possibility of a deadbeat controller constructing for stabilization of process parameters in conditions of limitation on the control action. We propose a technique for calculating the settings of the deadbeat controller under the condition that the maximum possible control pulses are formed at the initial stage of the reference signal. The paper analyzes the dependence of the maximum possible control action on the sample time under different variants of the transient process elongation.

We provide examples of the time dependences of the transient processes and control actions of the controllers, which were synthesized on the basis of the developed calculation algorithms with different transient time and sampling time. The influence of structure selection on stability is analyzed. Stability was analyzed both with the help of variation in the object's parameters, and by estimating the stability margin in amplitude and phase using the Bode diagram. The conclusion is made about the increasing the stability (robustness) with the increasing the number of transient process steps. We have noted the limitations in the application of the developed calculation algorithms in practice.

**Key words:** digital controller, deadbeat controller, robustness.

**Введение.** В современных системах управления практически все алгоритмы реализуются в цифровом виде. В то же время, за редким исключением, при стабилизации технологических параметров используются аналоговые методы синтеза.

На сегодняшний день базовым алгоритмом стабилизации технологических параметров является пропорционально-дифференциально-интегральный (ПИД) закон регулирования. Чаще всего этот алгоритм реализуется в различных

вариациях с использованием программируемых логических контролеров (ПЛК). Иногда для этих целей используются отдельные модули или микропроцессорные регуляторы. Во всех случаях, за исключением ПЛК, время квантования является фиксированным параметром и устанавливается производителем. ПЛК обладает более широкими возможностями по стабилизации технологических параметров. Если в старых системах цифрового управления

время квантования являлось фиксированным параметром, то программное обеспечение современных ПЛК легко может быть оптимизировано под конкретную задачу управления и во многих случаях перенастраиваться. Современные ПЛК интегрированы в системы управления SCADA (Supervisory Control And Data Acquisition) и MES (Manufacturing Execution System), которые обладают еще большими возможностями по прогнозированию и адаптации работы алгоритмов управления для конкретного технологического процесса.

ПИД-алгоритм имеет ряд ограничений. Существует проблема возникновения интегрального насыщения при ограничении управляющего воздействия, проблема быстрогодействия, адаптация настроек при изменении динамических характеристик объекта.

При синтезе каскадных систем управления желательно иметь внутренний регулятор, который настроен на апериодический переходной процесс типа deadbeat [1–2]. Это не только обеспечивает высокую скорость внутренней цепи (что является основной задачей внутренних регуляторов), но и облегчает задачу синтеза внешнего регулятора (наличие комплексных корней в объекте усложняет настройку внешнего регулятора). Алгоритмы deadbeat контроллера широко используются в управлении двигателем [3], в модуляции балансировки напряжения [4].

**Основная часть.** Расчет многих цифровых регуляторов, в том числе deadbeat [1–2], гораздо более алгоритмизирован. Данный регулятор характеризуется высоким быстродействием. Однако это достигается путем формирования высокого значения управляющего воздействия, что сложно реализовать в прикладных условиях. В то же время можно добиться соответствия контроллера технологическим нормам за счет увеличения времени шаговых ответов [5].

Следует отметить, что существуют и другие подходы к проектированию deadbeat регуляторов [6–8]. Однако в прикладных решениях [9] находят большее применение подход из работы [1].

Система управления deadbeat – это, в первую очередь, цифровая система управления. В данной статье рассмотрены синтез производятся на основании функции  $z$ -преобразования элементов систем управления. Общая структура системы управления показана на рис. 1.

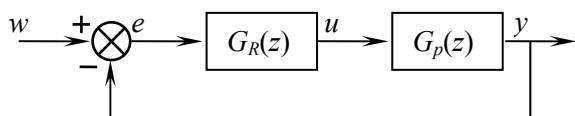


Рис. 1. Структура deadbeat регулятора:

$w$  – сигнал задания;  $e$  – сигнал ошибки;

$u$  – управляющее воздействие;  $y$  – выход системы

Передаточная функция  $G_R(z)$  регулятора и объекта может быть записана следующим образом [1]

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}; G_P(z) = \frac{A(z)}{B(z)}, \quad (1)$$

где  $Q(z)$ ,  $P(z)$  – многочлены передаточной функции регулятора;  $A(z)$ ,  $B(z)$  – многочлены передаточной функции объекта.

Коэффициенты многочленов  $Q(z)$ ,  $P(z)$  для классического deadbeat регулятора могут быть найдены с использованием уравнений [1]:

$$\begin{cases} q_0 = \frac{1}{b_1 + b_2 + \dots + b_m}, \\ q_i = q_0 a_i, \\ p_i = q_0 b_i, \end{cases} \quad (2)$$

где  $a_i$ ,  $b_i$  – коэффициенты многочленов функции  $z$ -передачи непрерывного объекта  $A(z)$ ,  $B(z)$ ;  $m$  – порядок передаточной функции объекта. Коэффициенты многочлена  $Q(z)$  можно выразить так:

$$\begin{cases} q_0 = u(0), \\ q_0 = u(i) - u(i-1), \quad i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3)$$

Таким образом, начальное значение управляемой переменной  $u(0)$  зависит только от суммы (2) коэффициентов функции  $z$ -передачи объекта  $b_i$ .

Основным недостатком deadbeat регулятора является то, что время выборки  $t_s$  и управляемая переменная  $u(0)$  обратно пропорциональны. Значение  $t_s$  обусловлено величиной показателя  $u_{\max}$ , которая зависит от различных факторов.

Для решения этой проблемы предлагаются различные варианты, такие как изменение алгоритма расчета. Авторы вводят дополнительный полином для ограниченного вывода [10]. Но могут быть и другие решения. Возможны системы управления с переменным временем выборки  $t_s$ .

В работе [1] получены выражения для выбора первичного импульса. Расширим его на большее количество тактов.

$$w(k) = 1 \text{ для } k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Для случая  $b_0 = 0$   $z$ -преобразования задающей, регулируемой и управляющей переменных имеют следующий вид:

$$w(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}; \quad (5)$$

$$y(z) = y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + 1[z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots]; \quad (6)$$

$$u(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + \dots + u(m)[z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots]. \quad (7)$$

Разделив уравнения (6) и (7) на (5), получим:

$$\frac{y(z)}{w(z)} = p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \dots + p_mz^{-m} = P(z); \quad (8)$$

$$\frac{u(z)}{w(z)} = q_0 + q_1z^{-1} + \dots + q_mz^{-m} = Q(z). \quad (9)$$

Условие построения аperiodического регулятора независимо от количества заданных тактов не меняется:

$$\frac{b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_mz^{-m}} = \frac{p_1z^{-1} + \dots + p'_mz^{-(m+1)}}{q_0 + q_1z^{-1} + \dots + q_mz^{-m}}. \quad (10)$$

Условие для получения значений коэффициентов запишем в виде:

– для двух тактов задания первоначальных значений

$$\frac{P}{Q} = \frac{(p'_1z^{-1} + \dots + p'_mz^{-m})(a_1 - z^{-1})(a_2 - z^{-1})}{(q'_0 + \dots + q'_mz^{-m})(a_1 - z^{-1})(a_2 - z^{-1})}; \quad (11)$$

– для трех тактов задания первоначальных значений

$$\frac{P}{Q} = \frac{(p'_1z^{-1} + \dots + p'_mz^{-m})}{(q'_0 + \dots + q'_mz^{-m})} \cdot \frac{(a_1 - z^{-1})}{(a_1 - z^{-1})} \cdot \dots \times \frac{(a_3 - z^{-1})}{(a_3 - z^{-1})}. \quad (12)$$

Сокращение одинаковых множителей приводит к единому результату:

$$\frac{b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_mz^{-m}} = \frac{p'_1z^{-1} + \dots + p'_mz^{-m}}{q'_0 + \dots + q'_mz^{-m}}. \quad (13)$$

Для получения расчетных коэффициентов необходимо сопоставить коэффициенты с одинаковыми степенями свободы:

$$\begin{aligned} q'_1 &= a_1q'_0; & p'_1 &= b_1q'_0; \\ q'_2 &= a_2q'_0; & p'_2 &= b_2q'_0; \\ &\dots & &\dots \\ q'_m &= a_mq'_0; & p'_m &= b_mq'_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда для двух тактов задания первоначальных значений получим:

$$\begin{aligned} q_0 &= \alpha_1\alpha_2q'_0; \\ q_1 &= \alpha_1\alpha_2q'_1 - (\alpha_1 + \alpha_2)q'_0; \\ q_2 &= \alpha_1\alpha_2q'_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)q'_1 + q'_0; \\ &\dots \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} q_m &= \alpha_1\alpha_2q'_{m-1} - (\alpha_1 + \alpha_2)q'_m + q'_{m-2}; \\ q_{m+1} &= (\alpha_1 + \alpha_2)q'_m + q'_{m-1}; \\ q_{m+2} &= q'_m; \\ p_1 &= \alpha_1\alpha_2p'_1; \\ p_2 &= \alpha_1\alpha_2p'_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)p'_1; \\ p_3 &= \alpha_1\alpha_2p'_3 - (\alpha_1 + \alpha_2)p'_2 + p'_1; \\ &\dots \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} p_m &= \alpha_1\alpha_2p'_{m-1} - (\alpha_1 + \alpha_2)p'_m + p'_{m-2}; \\ p_{m+1} &= (\alpha_1 + \alpha_2)p'_m + p'_{m-1}; \\ p_{m+2} &= p'_m. \end{aligned}$$

Для варианта трех тактов задания первоначальных значений приведем выражение только для знаменателя.

$$\begin{aligned} q_0 &= q_{d1}q'_0; \\ q_1 &= q_{d1}q'_1 - q_{d2}q'_0; \\ q_2 &= q_{d1}q'_2 - q_{d2}q'_1 + q_{d3}q'_0; \\ q_3 &= q_{d1}q'_3 - q_{d2}q'_2 + q_{d3}q'_1 - q'_0; \\ &\dots \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} q_{m+2} &= q_{d2}q'_m - q'_{m-1}; \\ q_{m+3} &= -q'_m, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} q_{d1} &= a_1a_2a_3; \\ q_{d2} &= a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3; \\ q_{d3} &= a_1 + a_2 + a_3. \end{aligned} \quad (18)$$

С другой стороны, из условия обеспечения наилучшего быстродействия мы можем иметь ограничение на управляющее воздействие, тогда будем искать выражение параметров управления исходя из того, что:

– для одного такта задания

$$u_{SP} = u(0) = u(1); \quad (19)$$

– для двух тактов задания

$$u_{SP} = u(0) = u(1) = u(2); \quad (20)$$

– для трех тактов задания

$$u_{SP} = u(0) = u(1) = u(2) = u(3). \quad (21)$$

Тогда формула для двух тактов задания преобразуется к виду

$$\begin{aligned} q_0 &= u_{SP}; \\ q_1 &= 0; \\ q_2 &= u_{SP}(a_2 - a_1^2) + D_2; \\ q_3 &= u_{SP}(a_3 - a_2a_1) + a_1D_2; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &\dots \\ q_m &= u_{SP}(a_m - a_{m-1}a_1) + a_{m-2}D_2; \\ q_{m+1} &= u_{SP}(-a_m a_1) + a_{m-1}D_2; \\ q_{m+2} &= a_m D_2; \\ p_1 &= u_{SP}b_1; \\ p_2 &= u_{SP}(b_2 - b_1a_1); \\ p_3 &= u_{SP}(b_3 - b_2a_1) + b_1D_2; \\ p_4 &= u_{SP}(b_4 - b_3a_1) + b_2D_2; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &\dots \\ p_m &= u_{SP}(b_m - b_{m-1}a_1) + b_{m-2}D_2; \\ p_{m+1} &= u_{SP}(-b_m a_1) + b_{m-1}D_2; \\ p_{m+2} &= b_m D_2, \end{aligned}$$

где

$$D_2 = q_C - u_{SP} + a_1 u_{SP}; \quad q_C = \frac{1}{\sum_{k=1}^m b_k}. \quad (24)$$

Вариант расчета настроек для трех тактов сигнала задания следующей:

$$\begin{aligned} q_0 &= u_{SP}; \\ q_1 &= 0; \\ q_2 &= 0, \\ q_3 &= u_{SP}(a_3 - a_1a_2 + a_1E_1) - E_2; \\ q_3 &= u_{SP}(a_4 - a_1a_3 + a_2E_1) - a_1E_2; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &\dots \\ q_m &= u_{SP}(a_m - a_1a_{m-1} + a_{m-2}E_1) - a_{m-3}E_2; \\ q_{m+1} &= u_{SP}(-a_1a_m + a_{m-1}E_1) - a_{m-2}E_2; \\ q_{m+2} &= u_{SP}(a_m E_1) - a_{m-1}E_2; \\ q_{m+3} &= -a_m E_2; \\ p_1 &= u_{SP}b_1; \\ p_2 &= u_{SP}(b_2 - a_1b_1); \\ p_3 &= u_{SP}(b_3 - a_1b_2 + b_1E_1); \\ p_4 &= u_{SP}(b_4 - a_1b_3 + b_2E_1) - b_1E_0; \\ p_5 &= u_{SP}(b_5 - a_1b_4 + b_3E_1) - b_2E_0; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &\dots \\ p_m &= u_{SP}(b_{m-3} - a_1b_{m-4} + b_{m-5}E_1) - b_{m-6}E_0; \\ p_{m+1} &= u_{SP}(-a_1b_{m-3} + b_{m-4}E_1) - b_{m-5}E_0; \\ p_{m+2} &= u_{SP}(b_{m-3}E_1) - b_{m-4}E_0; \\ p_{m+3} &= -b_{m-3}E_0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} E_0 &= u_{SP}(1 - a_1 + a_1^2 - a_2) - q_C; \\ E_1 &= a_1^2 - a_2. \end{aligned} \quad (27)$$

Получим выражение для выполнения условий (19)–(21):

– для одного такта задания с учетом формул (7.2)–(7.9) из пособия [1]

$$u_{SP} = \frac{q_C}{1 - a_1}; \quad (28)$$

– для двух тактов с учетом формул (22) и (24)

$$u_{SP} = \frac{q_C}{1 - a_1^2 - a_2 - a_1}; \quad (29)$$

– для трех тактов с учетом формул (25) и (27)

$$u_{SP} = \frac{q_C}{1 + a_1(a_1 - a_1^2 - 2a_2 - 1) - a_2 - a_3}. \quad (30)$$

### Моделирование и оценка робастности.

Для оценки работы синтезированных регуляторов был использован объект с передаточной функцией

$$\begin{aligned} W_O(s) &= \frac{2s + 1}{(10s + 1)(7s + 1)(3s + 1)} \times \\ &\times \exp(-4s). \end{aligned} \quad (31)$$

Влияние времени дискретизации  $t_S$  и количества одинаковых управляющих воздействия первых тактов  $N$  на максимальное управляющее воздействие при переходном процессе можно видеть на рис. 2–5.

Оценка устойчивости произведена по диаграммам Боде с определением запасов по амплитуде  $\Delta A$  и фазе  $\Delta \varphi$  (рис. 9–10).

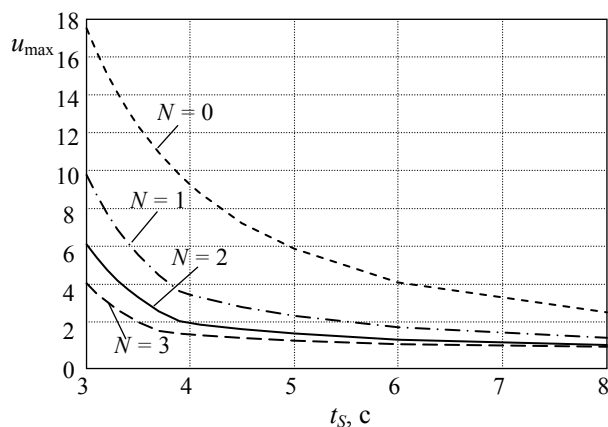


Рис. 2. Зависимость первого максимального управляющего воздействия  $u_{\max}$  от  $t_S$

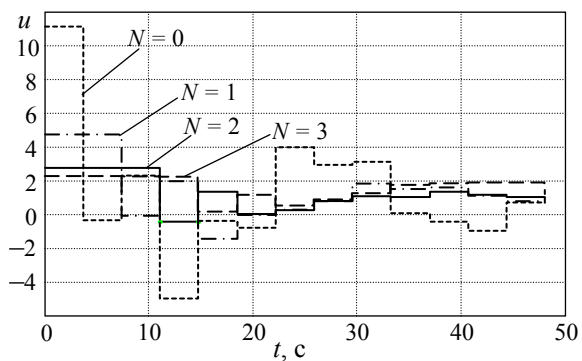


Рис. 3. Переходной процесс сигнала управления  $u$  при  $t_s = 3,7$  с

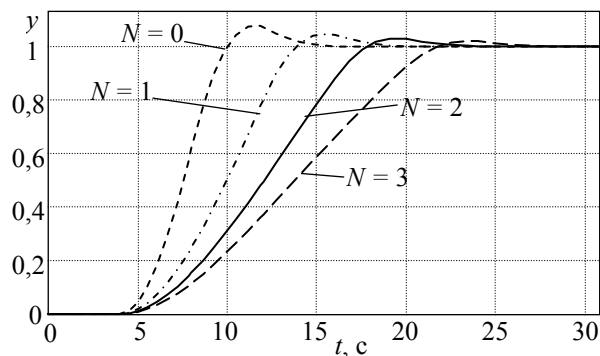


Рис. 7. Переходной процесс выходного сигнала  $y$  при  $t_s = 4$  с

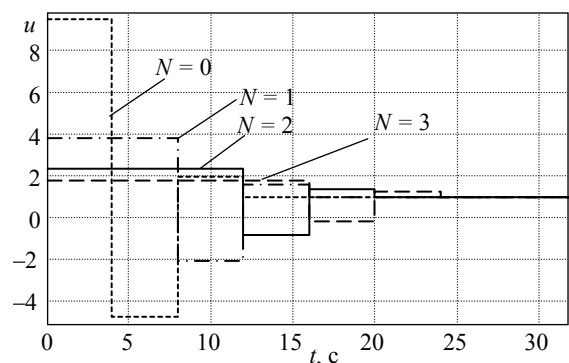


Рис. 4. Переходной процесс сигнала управления  $u$  при  $t_s = 4$  с

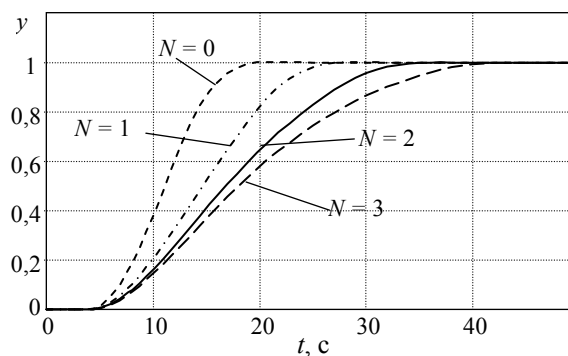


Рис. 8. Переходной процесс выходного сигнала  $y$  при  $t_s = 8$  с

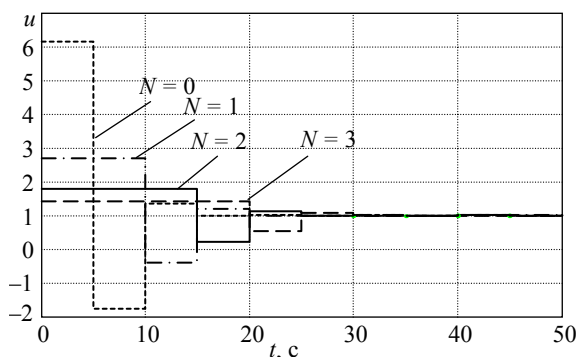


Рис. 5. Переходной процесс сигнала управления  $u$  при  $t_s = 8$  с

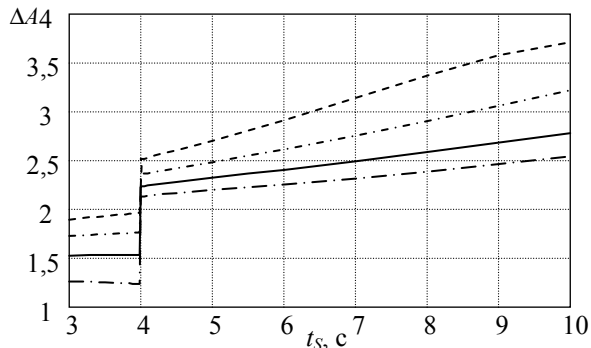


Рис. 9. Зависимость запаса по амплитуде  $\Delta A$  от  $t_s$  при разном  $N$

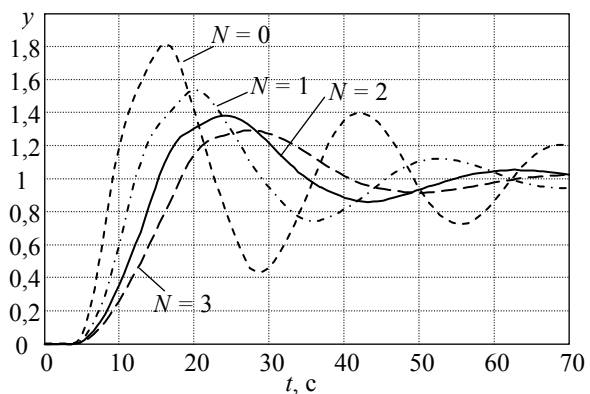


Рис. 6. Переходной процесс выходного сигнала  $y$  при  $t_s = 3,7$  с

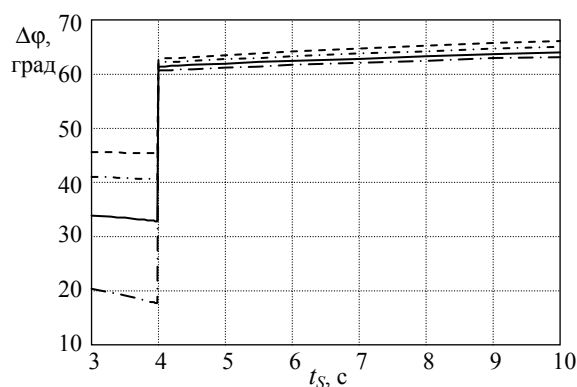


Рис. 10. Зависимость запаса по фазе  $\Delta\phi$  от  $t_s$  при разном  $N$

Следует отметить, что при  $t_S$  меньше величины запаздывания наблюдается неоднозначная зависимость запасов по фазе и амплитуде от  $t_S$ . При некоторых значениях можно было наблюдать неустойчивый режим работы замкнутой системы.

ПИД-регулятор, настроенный по критерию [11–12]

$$\int_0^{t_f} t^2 |e(t)| dt \rightarrow \min, \quad (32)$$

показывал лучший запас устойчивости и по амплитуде, и по фазе (рис. 10) при  $t_S$  значительно меньше постоянной времени и запаздывания объекта, чем цифровые регуляторы. Однако уже при  $t_S = 1$  запас по амплитуде у ПИД-регулятора практически идентичный цифровому регулятору для  $N = 3$ .

Критерий (32) был выбран для сравнения по причине того, что его минимизация при настройке ПИД-регулятора для объектов с запаздыванием обычно приводит к переходным процессам, близким к аperiodическим [12].

Следует отметить, что для успешного использования немаловажную роль играет порядок передаточной функции объекта [5].

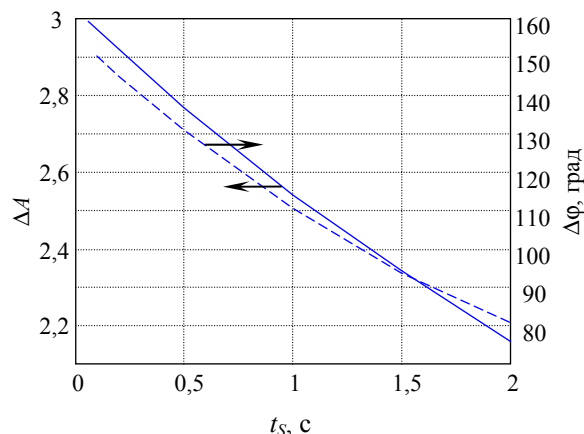


Рис. 11. Зависимость запасов по фазе и амплитуде для ПИД-регулятора

**Заключение.** Использование полученных условий (28)–(30) позволяет легко перенастраивать алгоритм работы системы с обратной связью в зависимости от существования ограничений на управляющее воздействие.

Увеличение параметра  $N$  позволяет существенно увеличить робастность системы с аperiodическим цифровым регулятором.

### Литература

1. Изерман Р. Цифровые системы управления: пер. с англ. М.: Мир, 1984. 541 с.
2. Plsek S., Matusu R. Application of Adaptive Dead-beat Controller in Drying Process // *Procedia Engineering*. 2015. Vol. 100. P. 756–764.
3. Deadbeat model-predictive torque control with discrete space-vector modulation for PMSM drives / Y. Wang [et al.] // *IEEE Trans. Ind. Electron.* 2017. Vol. 64, no. 5. P. 3537–3547.
4. Deadbeat control for a single-phase cascaded H-bridge rectifier with voltage balancing modulation / C. Qi [et al.] // *IET Power Electronics*. 2018. Vol. 11, issue 3. P. 610–617.
5. Цифровые алгоритмы для управления технологическими процессами / Д. А. Гринюк [и др.] // Информационные технологии и системы – 2013 (ИТС – 2013): материалы междунар. науч. конф., Минск, 23 окт. 2013 г. Белорус. гос. ун-т информатики и радиоэлектроники, Минск, 2013. С. 38–39.
6. Balasevicius L., Dervinis G. Design of the Deadbeat Controller with Limited Output // *Electronics and electrical engineering*. 2011. No. 4 (110). P. 93–96.
7. Kučera V. Deadbeat Control, Pole Placement, and LQ Regulation // *Kybernetika*. 1999. Vol. 35, no. 6. P. 681–692.
8. Westphal L. C. *Handbook of Control Systems Engineering*. New York: Springer Science + Business Media, 2001. 1073 p.
9. Irfan A. Implementation of PID and Deadbeat Controllers with the TMS320 Family. Application report: SPRA083. Texas Instruments, 1997. 59 p.
10. Deadbeat Controller with Two Additional Steps / L. Balasevicius [et al.] // *Elektronika ir Elektrotechnika*. 2017. Vol. 23, no. 5. P. 11–14.
11. Hryniuk D., Suhorukova I., Orobei I. Non-linear PID controller and methods of its setting // *Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream)*. 2017, P. 1–4. DOI: 10.1109/eStream.2017.7950327.
12. Гринюк Д. А., Оробей И. О., Сухорукова И. Г. Модификация интегральных критериев для повышения запаса по устойчивости // *Труды БГТУ*. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 118–121.

### References

1. Isermann R. *Digital Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg GmbH, 1981. 566 p. (Russ. ed.: Izerman R. *Tsifrovyye sistemy upravleniya*. Moscow, Mir Publ., 1984. 541 p.).

2. Plsek S., Matusu R. Application of Adaptive Dead-beat Controller in Drying Process. *Procedia Engineering*, 2015, vol. 100, pp. 756–764.
3. Wang Y., Wang X., Xie W., Wang F., Dou M., Kennel R. M., Lorenz R. D., Gerling D. Deadbeat model-predictive torque control with discrete space-vector modulation for PMSM drives. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 2017, vol. 64, no. 5, pp. 3537–3547.
4. Qi C., Chen X., Tu P. Wang P. Deadbeat control for a single-phase cascaded H-bridge rectifier with voltage balancing modulation. *IET Power Electronics*, 2018, vol. 11, issue 3, pp. 610–617.
5. Grinyuk D. A., Orobey I. O., Sukhorukova I. G., Oliferovich N. M. Digital algorithms for process control. *Materialy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii "Informatsionnye tekhnologii i sistemy – 2013"* [Materials of the International Scientific Conference "Information Technologies and Systems – 2013"]. Minsk, 2013, pp. 38–39 (In Russian).
6. Balasevicius L., Dervinis G. Design of the Deadbeat Controller with Limited Output. *Electronics and electrical engineering*, 2011, no. 4 (110), pp. 93–96.
7. Kučera V. Deadbeat Control, Pole Placement, and LQ Regulation. *Kybernetika*, 1999, vol. 35, no. 6, pp. 681–692.
8. Westphal L. C. Handbook of Control Systems Engineering. New York, Springer Science + Business Media, 2001. 1073 p.
9. Irfan A. Implementation of PID and Deadbeat Controllers with the TMS320 Family. Application report: SPRA083. Texas Instruments, 1997. 59 p.
10. Balasevicius L., Baranauskas V., Dervinis G., Derviniene A. Deadbeat Controller with Two Additional Steps. *Elektronika ir Elektrotechnika*, 2017, vol. 23, no. 5, pp. 11–14.
11. Hryniuk D., Suhorukova I., Orobei I. Non-linear PID controller and methods of its setting. *Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream)*, 2017, pp. 1–4. DOI: 10.1109/eStream.2017.7950327.
12. Grinyuk D. A., Orobey I. O., Sukhorukova I. G. Modification of integral criteria for increasing the margin of stability. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 118–121 (In Russian).

#### Информация об авторах

**Олиферович Надежда Михайловна** – ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: bogosnadya@rambler.ru

**Гринюк Дмитрий Анатольевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: hryniuk@tut.by

**Оробей Игорь Олегович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: orobei@tut.by

**Сухорукова Ирина Геннадьевна** – ассистент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова 13а, Республика Беларусь). E-mail: irina\_x@rambler.ru

#### Information about the authors

**Oliferovich Nadezhda Mikhaylovna** – assistant lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bogosnadya@rambler.ru

**Hryniuk Dmitry Anatol'yevich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hryniuk@tut.by

**Orobei Igor' Olegovich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: orobei@tut.by

**Suhorukova Irina Gennad'yevna** – assistant lecturer, the Department of Information Systems and Technology. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: irina\_x@rambler.ru

Поступила 15.05.2018



УДК 502.3

**А. В. Бурмакова, Ж. М. Ибрагим, В. В. Смелов**  
Белорусский государственный технологический университет

**ПРИМЕНЕНИЕ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК В КОМПЛЕКСНОЙ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПОСЛЕДСТВИЙ  
АВАРИЙНОГО ПРОЛИВА НЕФТЕПРОДУКТОВ**

Статья посвящена расширению комплексной математической модели прогнозирования последствий аварийного пролива нефтепродуктов. Модель является основой экспертной системы, предназначенной для поддержки принятия решений по выбору эффективных с точки зрения экологии, технологий реабилитации геологической среды, описывает процесс загрязнения нефтепродуктами поверхностного слоя, почвы, грунта, а также распространение загрязнения с грунтовыми водами. С ее помощью можно прогнозировать форму и границы наземного пятна загрязнения, значения концентраций нефтепродуктов в почве и в грунте, а также концентрацию нефтепродуктов в грунтовых водах, границы наземного пятна, вертикальную и горизонтальную скорости проникновения и распространения загрязнения. В качестве входных используются данные о географических координатах пролива, тип и объем пролитого нефтепродукта, справочные данные о физико-химических свойствах нефтепродуктов, почвы и грунта.

Расширенная модель позволит использовать основную модель прогнозирования в условиях неполноты исходных данных, применив экспертные оценки.

**Ключевые слова:** математическая модель, прогнозирование, экология, нефтепродукты, экспертная система.

**A. V. Burmakova, J. M. Ibrahim, V. V. Smelov**  
Belarusian State Technological University

**APPLICATION OF EXPERT ASSESSMENTS IN INTEGRATED  
MATHEMATICAL MODEL FOR PREDICTING THE CONSEQUENCES  
OF THE EMERGENCY EXPLOSION OF OIL PRODUCTS**

The article is devoted to the expansion of the complex mathematical forecasting model of consequences of emergency spillage of oil products. The model is the basis of an expert system for supporting decision-making on the choice of optimal and efficient, in terms of ecology, rehabilitation technologies of geological environment, describes the process of over-contamination of a surface layer, the soil, the soil, by oil products as well as the dissemination of-contamination with groundwater. It can be used to predict properties of oil concentrations in soil as well as the concentration of oil in groundwater, boundaries of a ground stain, vertical and horizontal penetration rate and the spread of contamination. The geographical coordinates of the strait, the type and amount of oil spilled, reference data on physical and chemical properties of mineral oil, ground and soil are used as input data.

The extended model will allow to apply the main forecasting model in the conditions of incompleteness of the initial data, using expert estimates.

**Key words:** mathematical model, forecasting, ecology, oil products, expert system.

**Введение.** Математическая модель прогнозирования (ММП) последствий аварийного пролива нефтепродуктов (НП) описана в публикации [1]. ММП является основой экспертной системы реабилитации геологической среды, загрязненной в результате аварийного пролива НП, и предназначена для поддержки принятия решений по формированию перечня мероприятий для реабилитации загрязненной геологической среды [2, 3]. Модель является комплексной и включает 4 уровня: поверхностный, почвенный, грунтовый и уровень грунтовых вод.

Поверхностный слой модели позволяет прогнозировать массу испарившегося НП, площадь

и форму пятна загрязнения, а также определить массу НП, достигшую почвенного слоя.

Площадь  $S_1$  пятна загрязнения ( $m^2$ ) вычисляется по следующей формуле:

$$S_1 = V_0 \cdot d_1, \quad (1)$$

где  $V_0$  – объем пролитого НП ( $m^3$ );  $d_1$  – коэффициент растекания НП ( $m^{-1}$ ).

Коэффициент растекания нефтепродукта  $d_1$  является справочной величиной и зависит от типа и объема нефтепродукта, типа почвы, а также угла наклона поверхности [4].

Для вычисления массы  $M_1$  испарившегося нефтепродукта (кг) применяется следующая формула:

$$M_1 = S_1 \cdot q_1(T), \quad (2)$$

где  $q_1(T)$  – удельная величина выбросов нефтепродукта ( $\text{кг}/\text{м}^2$ ).

Значение  $q_1(T)$  зависит от температуры  $T$  воздуха и является справочной величиной ( $\text{кг}/\text{м}^2$ ) [5].

После испарения НП оставшийся объем проникает в почву и далее в грунт, может достигать грунтовых вод.

Для вычисления формы пятна загрязнения применяется эвристический алгоритм [6], исходными данными для которого являются географические координаты центра, площадь  $S_1$  пролива, а также данные о рельефе поверхности в точках окрестности центра пролива, позволяющие вычислить углы  $\alpha$  наклона поверхности. Результатом расчета является множество координат  $(x, y)$  границы наземного пятна загрязнения.

Почвенный слой ММП позволяет прогнозировать адсорбированную почвой массу НП и максимальную глубину их проникновения в почву.

Адсорбированная почвой масса  $M_2$  НП ( $\text{кг}$ ) вычисляется по следующей формуле:

$$M_2 = S_1 \cdot h_2 \cdot u_2 \cdot \rho_0, \quad (3)$$

где  $h_2$  – средняя высота почвенного слоя ( $\text{м}$ );  $u_2$  – нефтеемкость почвы;  $\rho_0$  – средняя плотность НП ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ).

Значение  $u_2$  – нефтеемкость почвы, является максимальной возможной концентрацией НП в почве. Нефтеемкость  $u_2$  и средняя плотность НП  $\rho_0$  являются справочными величинами [5, 7].

Максимальная глубина проникновения  $H_2$  НП в почву ( $\text{м}$ ) вычисляется следующим образом:

$$H_2 = h_3 \cdot \frac{M_0 - M_1}{M_2}, \quad (4)$$

где  $M_0$  – масса пролитого НП ( $\text{кг}$ ).

Если НП не был адсорбирован полностью в почвенном слое, то оставшийся объем проникает в грунтовый слой.

Грунтовый слой модели позволяет прогнозировать адсорбированную грунтом массу НП и максимальную глубину проникновения НП в грунт.

Адсорбированная грунтовым слоем масса  $M_3$  НП ( $\text{кг}$ ) рассчитывается по формуле

$$M_3 = h_3 \cdot S_1 \cdot \rho_v \cdot m_3 \cdot w_3 \cdot \frac{\delta_0}{\delta_v}, \quad (5)$$

где  $h_3$  – мощность слоя грунта;  $\rho_v$  – плотность воды ( $\text{кг}/\text{м}^3$ );  $m_3$  – пористость грунта (от 0 до 1);  $w_3$  – капиллярная влагоемкость грунта (от 0 до 1);  $\delta_0$  – коэффициент поверхностного натяжения

НП ( $\text{кг}/\text{с}^2$ );  $\delta_v$  – коэффициент поверхностного натяжения воды ( $\text{кг}/\text{с}^2$ ).

Плотность воды  $\rho_v$  [8], коэффициент поверхностного натяжения НП  $\delta_0$ , коэффициент поверхностного натяжения воды  $\delta_v$  [9], пористость грунта  $m_3$  и капиллярная влагоемкость грунта  $w_3$  [10] являются справочными величинами.

Максимальная глубина проникновения  $H_3$  НП в грунт ( $\text{м}$ ) зависит от адсорбированной в грунте массы:

$$H_3 = \begin{cases} h_3 \cdot \frac{M_0 - (M_1 + M_2)}{M_3}; \\ M_0 - (M_1 + M_2) \leq M_3; \\ h_3, M_0 - (M_1 + M_2) > M_3. \end{cases} \quad (6)$$

Данная статья посвящена расширению ММП для применения экспертных знаний, которые основаны на опыте специалистов из области экологии.

**Основная часть.** Как правило, знания экспертов (экспертизы) могут быть описаны в такой форме: «При проливе 30  $\text{м}^3$  бензина на песчаный грунт ровной поверхности проникновение НП составило 2,5  $\text{м}$ », или, например, «При проливе 50  $\text{м}^3$  бензина на песчаный грунт, угол поверхности которого 3°, проникновение НП в почву составило 0,2  $\text{м}$ ». В некоторых случаях могут быть неизвестными тип грунта, угол наклона поверхности, конкретная марка НП и т. п.

Одну экспертизу можно представить в виде вектора:

$$\langle \text{Тип НП, Тип Гр, } V_0, S_1, \alpha, H_2, H_3 \rangle. \quad (7)$$

В общем случае  $n$  экспертиз могут быть заданы в форме матрицы.

$$\begin{bmatrix} \text{Тип НП}^1 & \text{Тип Гр}^1 & V_0^1 & S_1^1 & \alpha^1 & H_2^1 & H_3^1 \\ \text{Тип НП}^2 & \text{Тип Гр}^2 & V_0^2 & S_1^2 & \alpha^2 & H_2^2 & H_3^2 \\ \text{Тип НП}^3 & \text{Тип Гр}^3 & V_0^3 & S_1^3 & \alpha^3 & H_2^3 & H_3^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Тип НП}^n & \text{Тип Гр}^n & V_0^n & S_1^n & \alpha^n & H_2^n & H_3^n \end{bmatrix} \quad (8)$$

В том случае, если тип НП, тип грунта, объем пролитого НП и т. д. неизвестны, считаем их значения равными *undefined*.

Например, в первой экспертизе следующей матрицы неизвестен тип нефтепродукта, во второй – объем пролитого НП, в третьей – площадь НП, а в последней неизвестными являются тип и объем пролитого НП (формула (9)). В простейшем случае в экспертизе неизвестен только один компонент. Тогда экспертизы могут выглядеть следующим образом (формула (10)).

$$\begin{bmatrix} \text{undefined} & \text{Тип Гр}^1 & V_0^1 & S_1^1 & \alpha^1 & H_2^1 & H_3^1 \\ \text{Тип НП}^2 & \text{Тип Гр}^2 & \text{undefined} & S_1^2 & \alpha^2 & H_2^2 & H_3^2 \\ \text{Тип НП}^3 & \text{Тип Гр}^3 & V_0^3 & \text{undefined} & \alpha^3 & H_2^3 & H_3^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{undefined} & \text{Тип Гр}^n & \text{undefined} & S_1^n & \alpha^n & H_2^n & H_3^n \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \langle \text{Тип НП}, \text{Тип Гр}, V_0, \text{undefined}, \alpha, H_2, H_3 \rangle \\ & \langle \text{Тип НП}, \text{Тип Гр}, \text{undefined}, S_1, \alpha, H_2, H_3 \rangle \\ & \langle \text{Тип НП}, \text{Тип Гр}, V_0, S_1, \alpha, \text{undefined}, H_3 \rangle \\ & \langle \text{Тип НП}, \text{Тип Гр}, V_0, S_1, \alpha, H_2, \text{undefined} \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

В этих случаях  $S_1, V_0, H_2, H_3$  могут быть вычислены по формулам (1), (5) и (7).

Если неизвестен тип НП, но известно, что НП достиг грунта, экспертиза принимает следующий вид:

$$\langle \text{undefined}, \text{Тип Гр}, V_0, S_1, \alpha, H_2, H_3 \rangle. \quad (11)$$

Из формулы (6) можно выразить значение поверхностного натяжения НП:

$$\delta_0 = \frac{M_3 \cdot \delta_B}{h_3 \cdot S_1 \cdot m_3 \cdot w_3 \cdot \rho_B}, \quad (12)$$

и определение типа НП сведется к поиску экстремума:

$$|\delta_0 - \delta_0^i| \rightarrow \min, \quad i = 1, \dots, k, \quad (13)$$

где  $\delta_0^i$  – справочные значения поверхностного натяжения нефтепродуктов. Определив  $\delta_0^i$ , минимизируя разность  $|\delta_0 - \delta_0^i|$  в соответствии со справочником [9], можно выяснить тип НП.

Если известно, что НП полностью адсорбировался в почве и не попал в грунт, то из формулы (4) можно выразить его плотность:

$$\rho_0 = \frac{M_2}{h_2 \cdot S_1 \cdot u_2}, \quad (14)$$

и определение типа НП сведется к поиску экстремума:

$$|\rho_0 - \rho_0^i| \rightarrow \min, \quad i = 1, \dots, k, \quad (15)$$

где  $\rho_0^i$  – справочные значения плотности нефтепродуктов. Определив  $\rho_0^i$ , минимизируя разность  $|\rho_0 - \rho_0^i|$  в соответствии со справочником [6], можно выяснить тип НП.

Если неизвестен тип грунта, то экспертиза имеет вид

$$\langle \text{Тип НП}, \text{undefined}, V_0, S_1, \alpha, H_2, H_3 \rangle. \quad (16)$$

Тогда в соответствии с формулой (6) может быть выражена величина, характеризующая тип

грунта: произведение пористости грунта  $m_3$  на его капиллярную влагоемкость  $w_3$ :

$$m_3 \cdot w_3 = \frac{M_3}{h_3 \cdot S_1 \cdot \rho_B \cdot \frac{\delta_0}{\delta_B}}. \quad (17)$$

Определение типа грунта в этом случае сведется к поиску экстремума в выражении

$$|m_3 \cdot w_3 - m_0^i \cdot w_0^i| \rightarrow \min, \quad i = 1, \dots, k, \quad (18)$$

где  $m_0^i$  и  $w_0^i$  – справочные значения пористости и капиллярной влагоемкости грунта. Определив  $m_0^i$  и  $w_0^i$ , минимизируя разность  $|m_3 \cdot w_3 - m_0^i \cdot w_0^i|$  в соответствии со справочником [10], можно выяснить тип грунта.

Если неизвестен угол  $\alpha$  наклона поверхности, экспертиза принимает вид

$$\langle \text{Тип НП}, \text{Тип Гр}, V_0, S_1, \text{undefined}, H_2, H_3 \rangle. \quad (19)$$

Из формулы (1) выражается значение коэффициента растекания НП, характеризующее значение угла наклона поверхности [4].

Если неизвестна площадь пролива и тип НП, экспертиза принимает вид

$$\langle \text{undefined}, \text{Тип Гр}, V_0, \text{undefined}, \alpha, H_2, H_3 \rangle. \quad (20)$$

Формула (1) позволяет найти площадь пролитого НП, и если при этом известно, что НП достиг грунта, то определение типа НП может быть осуществлено по формулам (13), (14). В том случае, если НП полностью адсорбировался в почве, то определение типа НП сводится к примеру, описанному выше (формулы (15), (16)).

Если одновременно неизвестны площадь пролитого НП и тип грунта, экспертиза имеет следующий вид:

$$\langle \text{undefined}, \text{underfined}, V_0, S_0, \alpha, H_2, H_3 \rangle. \quad (21)$$

В этом случае вычисление неизвестных величин сводится к применению формул (1) и (17).

При неизвестных площади пролитого НП и глубине проникновения НП в грунт экспертиза принимает вид

$$\langle \text{Тип НП, Тип Гр, } V_0, \text{undefined}, \alpha, H_2, \text{undefined} \rangle. \quad (22)$$

Для этого случая вычисление неизвестных величин сводится к применению формул (1) и (5)–(7).

**Заключение.** В условиях реальной эксплуатации экспертной системы прогнозирования последствий аварийного пролива нефтепродук-

тов [1] может оказаться, что некоторые исходные данные для расчета отсутствуют, но при этом пользователь владеет некоторыми экспертными знаниями, которыми можно дополнить исходные данные, вычислить неизвестные значения и осуществить необходимый прогноз.

Описанная в статье расширенная ММП решает эту задачу. Очевидно, что в этом случае полученные прогнозируемые значения в формулах (13), (15), (18) будут обладать другим качеством, оценка которого является отдельной задачей, для решения которой целесообразно применять аппарат нечетких вычислений [11].

### Литература

1. Бурмакова А. В., Смелов В. В., Захаров А. А. Реализация комплексной математической модели прогнозирования последствий аварийного пролива нефтепродуктов // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 1 (206). С. 82–87.
2. Разработка экспертной системы реабилитации геологической среды, загрязненной нефтепродуктами, на этапе опытно-конструкторских работ / Оношко М. П. [и др.] // Минералогия Казахстана: материалы Международ. науч.-практ. конф., Алматы, 21–22 сент. 2017 / Ин-т геол. наук. Алматы, 2017. С. 143–145.
3. Смелов В. В., Блинова Е. А. Экспертная система прогнозирования последствий аварийного пролива нефтепродуктов // Водные ресурсы и климат: материалы V Международ. водного форума, Минск, 5–6 окт. 2017 г. В 2-х ч. Ч. 1 / Белорус. гос. технол. ун-т. Минск, 2017. С. 196–198.
4. Методика расчета минимальной оснащенности аварийно-спасательных служб (формирований), предназначенных для локализации и ликвидации разливов нефти и нефтепродуктов на территории Российской Федерации, на континентальном шельфе и в исключительной экономической зоне Российской Федерации. Приложение 1 к Проекту приказа МЧС Российской Федерации // МЧС России: сайт. М., 2011. URL: [http://mchs.gov.ru/upload/site1/document\\_file/KsIgABroCa.doc](http://mchs.gov.ru/upload/site1/document_file/KsIgABroCa.doc) (дата обращения: 03.04.2018).
5. Определение ущерба окружающей среде при авариях на магистральных нефтепроводах. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2010. 43 с.
6. Бурмакова А. В., Смелов В. В., Буснюк Н. Н. Эвристический алгоритм вычисления формы пятна загрязнения поверхности земли нефтепродуктами // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 1 (206). С. 125–127.
7. Гольдберг В. М., Газда С. Гидрогеологические основы охраны подземных вод от загрязнения. М.: Недра, 1984. 262 с.
8. Методика прогнозирования объема экологического загрязнения грунтов и грунтовых вод при проливе экологически вредных веществ / А. В. Вагнер [и др.] // Экологический вестник России. 2004. № 5. С. 45–51.
9. Основы изучения загрязнения геологической среды легкими нефтепродуктами / Н. С. Огняник [и др.]. Киев: АПН, 2006. 278 с.
10. Экологическая гидрогеология: учеб. для вузов / А. П. Белоусова [и др.]. М.: Академкнига, 2006. 397 с.
11. Конышева Л. К., Назаров Д. М. Основы теории нечетких множеств. СПб.: Питер, 2011. 192 с.

### References

1. Burmakova A. V., Smelov V. V., Zakharov A. A. Rehabilitation of the complex mathematical model of predicting the consequences of an emergency spill of oil products. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1 (206), pp. 82–87 (In Russian).
2. Onoshko M. P., Absametov M. K., Smelov V. V., Shagarova L. V., Cherepanskiy M. M., Tomina N. M., Zakharov A. A. Development of an expert system for the rehabilitation of the geological environment contaminated with oil products, at the stage of development work. *Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Minerageniya Kazakhstana"* [Materials of the International Scientific and Practical Conference "Minerageny of Kazakhstan"], Almaty, 2017, pp. 143–145 (In Russian).
3. Smelov V. V., Blinova E. A. Expert system for predicting the consequences of emergency spillage of petroleum products. *Materialy Mezhdunarodnogo vodnogo foruma "Vodnye resursy i klimat"* [Materials of the V International Water Forum "Water Resources and Climate"], Minsk, 2017, pp. 196–198 (In Russian).

4. *Metodika rascheta minimal'noy osnashchennosti avariynno-spasatel'nykh sluzhb (formirovaniy), prednaznachennykh dlya lokalizatsii i likvidatsii razlivov nefiti i nefteproduktov na territorii Rossiyskoy Federatsii, na kontinental'nom shel'fe i v isklyuchitel'noy ekonomicheskoy zone Rossiyskoy Federatsii. Prilozhenie 1 k Proektu prikaza MChS Rossiyskoy Federatsii* [Methodology for calculating the minimum equipment of rescue services (formations) intended for localization and liquidation of oil and oil products spills in the territory of the Russian Federation, on the continental shelf and in the exclusive economic zone of the Russian Federation. Appendix 1 to the Draft Order of the Ministry of Emergency Situations of the Russian Federation] (In Russian). Available at: [http://mchs.gov.ru/upload/site1/document\\_file/KsIlgABroCa.doc](http://mchs.gov.ru/upload/site1/document_file/KsIlgABroCa.doc) (accessed 03.04.2018).

5. *Opredelenie ushcherba okruzhayushchey srede pri avariyaх na magistral'nykh nefteprovodakh* [Definition of damage to the environment during accidents on main oil pipelines]. Omsk, OmSTU Publ., 2010. 43 p.

6. Burmakova A. V., Smelov V. V., Busnyuk N. N. Heuristic algorithm for calculating the shape of the spot of pollution of the earth's surface by oil products. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3: Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1 (206), pp. 125–127 (In Russian).

7. Goldberg V. M., Gazda S. *Gidrogeologicheskie osnovy okhrany podzemnykh vod ot zagryazneniya* [Hydrogeological basis for protection of groundwater from pollution]. Moscow, Nedra Publ., 1984. 262 p.

8. Vagner A. V., Bukharin S. K., Kochemasov S. G., Priymak V. M. A technique for predicting the volume of environmental contamination of soils and groundwater in the strait of environmentally hazardous substances. *Ekologicheskij vestnik Rossii* [Ecological Bulletin of Russia], 2004, no. 5, pp. 45–51 (In Russian).

9. Ognyanik N. S., Paramonova N. K., Briks A. L., Pashkovskiy I. S., Konnov D. V. *Osnovy izucheniya zagryazneniya geologicheskoy sredy legkimi nefteproduktami* [Fundamentals of studying the pollution of the geological environment with light oil products]. Kiev: APN Publ., 2006. 278 p.

10. Belousova A. P., Gavich I. K., Lisenkov A. B., Popov E. V. *Ekologicheskaya gidrogeologiya: uchebnik dlya vuzov* [Ecological hydrogeology: a textbook for high schools]. Moscow: Academkniga Publ., 2006. 397 p.

11. Konysheva L. K., Nazarov D. M. *Osnovy teorii nechetkikh mnozhestv* [Fundamentals of the theory of fuzzy sets]. Saint-Petersburg: Peter, 2011. 192 p.

#### Информация об авторах

**Бурмакова Анастасия Владимировна** – магистрант кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: burmakova@belstu.by

**Ибрагим Жад Мишель** – аспирант кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: Ibrahimjad29@gmail.com

**Смелов Владимир Владиславович** – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: smw@belstu.by

#### Information about the authors

**Burmakova Anastasia Vladimirovna** – Master's degree student, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: burmakova@belstu.by

**Ibrahim Jad Mishel** – PhD student, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Ibrahimjad29@gmail.com

**Smelov Vladimir Vladislavovich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: smw@belstu.by

Поступила 15.05.2018

УДК 004.021

**В. Л. Колесников, А. И. Бракович**

Белорусский государственный технологический университет

**ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ С ПОДВИЖНЫМИ АСИМПТОТАМИ  
ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ  
СОЕДИНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ**

В статье описывается разработанная методика получения и использования стохастических логистических моделей с подвижными нижней и верхней асимптотами, позволяющих генерировать и количественно оценивать в динамике работу размалывающих машин, включаемых последовательно-параллельно, когда результат размолла в одной машине является началом процесса в последующей. По комбинаторному плану вычислительного эксперимента методом Монте-Карло решена задача минимизации удельных расходов энергии для получения заданного качества размолотой массы. Минимальные удельные расходы энергии увеличиваются при получении волокнистой массы с длинными волокнами и высокой степенью помола. Для получения и визуализации стохастических моделей использовались авторские программные средства: Complex, Model Builder v3, а также математический пакет MathCAD.

**Ключевые слова:** стохастические логистические модели, методика, программное средство, вычислительный эксперимент, метод Монте-Карло.

**V. L. Kolesnikov, A. I. Brakovich**

Belarusian State Technological University

**PROBABILISTIC MODELS WITH MOBILE ASYMPOTES  
FOR OPTIMIZATION OF SYSTEMS WITH SERIES-PARALLEL SYSTEMS  
CONNECTION OF THE ELEMENTS**

The article describes the developed technique for obtaining and using stochastic logistic models with moving lower and upper asymptotes that allow to generate and to quantify in dynamics the operation of grinding machines that are switched on in series-parallel, when the result of grinding in one machine is the beginning of the process in the following machine. According to the combinatorial plan of the computational experiment, the Monte Carlo method solves the problem of minimizing the specific energy expenditure for obtaining a given quality of the ground mass. The minimum specific energy consumption increases with the production of pulp with long fibers and a high degree of grinding. To obtain and visualize stochastic models, the author's software tools were used: Complex, Model Builder v3, and the mathematical package MathCAD.

**Key words:** stochastic logistic models, methodology, software, computing experiment, Monte Carlo method.

**Введение.** При организации производства на современных предприятиях со сложной структурой материальных потоков, например на бумажных фабриках, процесс размолла осуществляется на последовательно-параллельно соединенных размалывающих машинах. Причем нагрузки на двигатели мельниц, как правило, устанавливают «вслепую», руководствуясь накопленным опытом и интуицией. Поэтому между оптимальными и реальными затратами электроэнергии на размол существует значительный интервал, который возможно сократить путем оптимизации условий проведения процесса.

**Основная часть.** Если бы размол осуществлялся в одну ступень, то для достижения конечных результатов на данном размалывающем оборудовании его продолжительность определялась бы установкой соответствующей нагрузки на двигатель и дросселированием массы на выходе.

При последовательном соединении нескольких машин заданные показатели качества размолотой массы будут складываться из времени пребывания суспензии в зоне размолла на каждой мельнице. Поскольку от дросселирования зависит производительность потока, то количество машин, объединяемых в батарею, определяется заданным объемом производства конечной продукции.

Схема потоков и текущие изменения параметров размалываемой массы представлены на рис. 1.

Для математического описания процессов, происходящих в батарее машин, необходимо разработать информационную сеть для проведения эксперимента на одной машине так, чтобы на ней воспроизводились условия работы всей системы. Своеобразие такого эксперимента заключается в том, что в него необходимо одновременно включать однотипные параметры условий и результатов.

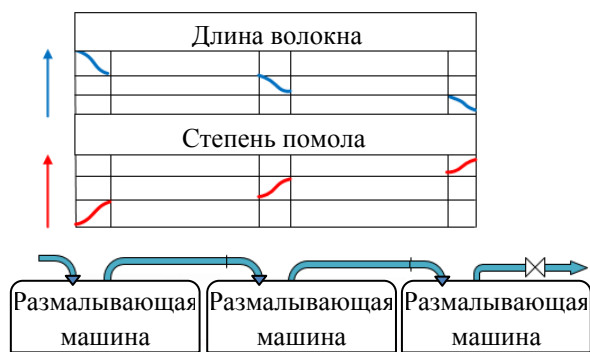


Рис. 1. Характерные изменения параметров качества волокнистой суспензии при последовательном соединении размалывающих машин

Обычно качество размолотой массы оценивается двумя функциями степени помола (FG) и длины волокна (FL) в зависимости от времени размола (T) и нагрузки на двигатель машины (W). В этом эксперименте функции и аргументы связаны с начальными и конечными условиями, протекающими во времени в одной машине при различных нагрузках на двигатель. Ортогональная таблица плана эксперимента получена для пяти факторов с пятью уровнями варьирования. Таблично заданные функции, полученные по результатам эксперимента, представлены на рис. 2.

	A	B	C	D	E	F	G
	C концентрация	L начальная	G начальная	T время	W нагрузка	Y1 Степень помола	Y2 Длина волокна
1							
2	9	350	15	2	50	18	345
3	3	200	25	5	150	38	180
4	3	300	35	8	125	42	250
5	3	150	20	10	100	35	106
6	3	250	30	15	75	45	210
7	7	300	20	2	75	25	285
8	7	150	30	5	50	35	140
9	7	250	15	8	150	29	203
10	7	350	25	10	125	34	269
11	7	200	35	15	100	48	164
12	10	250	25	2	100	27	205
13	10	350	35	5	75	42	335
14	10	200	20	8	50	26	195
15	10	300	30	10	150	39	214
16	10	150	15	15	125	22	95
17	15	200	30	2	125	33	185
18	15	300	15	5	100	24	236
19	15	150	25	8	75	29	140
20	15	250	35	10	50	43	231
21	15	350	20	15	150	38	212
22	20	150	35	2	150	40	123
23	20	250	20	5	125	29	200
24	20	350	30	8	100	37	305
25	20	200	15	10	75	22	132
26	20	300	25	15	50	33	282

Рис. 2. Таблично заданные функции по результатам эксперимента

Эксперимент проводился в производственных условиях Сегежского ЦБК. Аналитический вид нелинейных вероятностных полиномиальных моделей получен путем формирования вектор-столбцов псевдофакторов  $X_{ij}$  из независимых переменных рис. 2. Для оценки взаимного влияния параметров, линейризации подвергались их парные произведения, а для анализа нелинейности главных управляющих воздействий (времени и нагрузки на двигатели) в модель введены квадратические зависимости. На рис. 3 показана конструкция модели степени помола с рассчитанными значениями коэффициентов полинома.

Подобные результаты были получены для модели длины волокна.

Общий вид моделей, линейризованных с помощью преобразующих соответствий (1) и (2), показан на рис. 4:

$$YG = FG(C, L, G, T, W); \tag{1}$$

$$YL = FL(C, L, G, T, W). \tag{2}$$

Условия работы одной машины в батарее определяются закрепленным набором значений концентрации массы  $C$ , начальных значений степени помола  $G$  и начальных значений длины волокна  $L$ , а эффект размола определяется значениями установленной нагрузки  $W$  на двигатель описываемой машины и времени нахождения массы в зоне размола, которые для этой мельницы можно оперативно менять. При передаче размолотой массы из одной мельницы в другую необходимо осуществлять переприсвоение  $L = YL, G = YG$ .

Известно, что изменение степени помола происходит по логистическим кривым [1–3]. Для их получения использована линейризация (3), предложенная в работе [4]:

$$YG_i = \ln \left( \frac{|Y_i - AsGn_i|}{|AsGv - Y_i|} \right), \tag{3}$$

где  $i$  – порядковый номер машины в батарее; значения  $Y_i$  в таблично заданной функции, полученной по результатам эксперимента, заменяются рассчитанными по (3) значениями  $YG_i$ ;  $AsGv$  – неподвижная верхняя асимптота, представляющая собой максимальное достижимое значение параметра  $G$ .

Степень помола описывается полиномиальной логистической моделью с подвижной нижней асимптотой [4]:

$$YG_{i+1} = AsGn_i + \frac{((AsGv - AsGn_i) \cdot \exp(YG))}{1 + \exp(YG)} \tag{4}$$

Визуализация изменений степени помола в батарее трех последовательно соединенных машин приведена на рис. 4.

v	1	1	Роль: псевдофактор	Кэфф. -2,290685
v	x1	C концентрация	Роль: скрытый X	Кэфф. -0,220406
v	x2	L начальная	Роль: скрытый X	Кэфф. 0,011274
v	x3	G начальная	Роль: скрытый X	Кэфф. 0,875158
v	x4	T время	Роль: по оси абсцисс	Кэфф. -4,283482
v	x5	W нагрузка	Роль: по оси ординат	Кэфф. 0,655953
v	y	Y1 Степень помола	Роль: показатель	Кэфф. 0
v	Двоспр	Y2 Длина волокна	Роль: скрытый Y	Кэфф.
v	(x2*x4)	L начальная * T время	Роль: псевдофактор	Кэфф. 0,014431
v	(x2*x5)	L начальная * W нагрузка	Роль: псевдофактор	Кэфф. -0,001405
v	(x3*x4)	G начальная * T время	Роль: псевдофактор	Кэфф. 0,063242
v	(x3*x5)	G начальная * W нагрузка	Роль: псевдофактор	Кэфф. -0,00528
v	(x4*x5)	T время * W нагрузка	Роль: псевдофактор	Кэфф. 0,013891
v	sq(x4)	Квадрат T время	Роль: псевдофактор	Кэфф. -0,091662
v	sq(x5)	Квадрат W нагрузка	Роль: псевдофактор	Кэфф. -0,0013

Рис. 3. Конструкция модели степени помола в программном средстве Model Builder v3

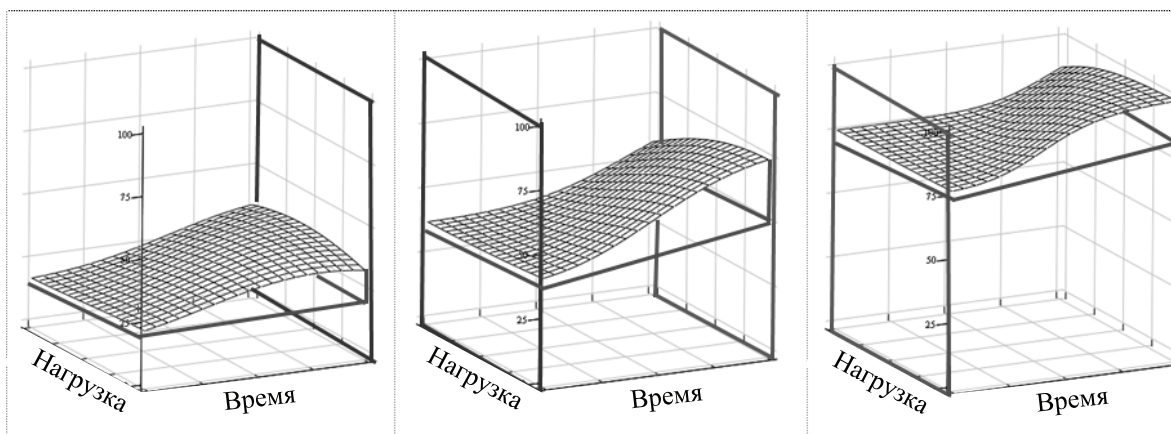


Рис. 4. Графики поверхности отклика функции степени помола с подвижной нижней асимптотой в математическом пакете MathCAD

Уменьшение длины волокна в процессе размола на последовательно соединенных машинах описывается с помощью включения в модель подвижных верхних асимптот. Прием линеаризации модели  $YL$ , полученной по результатам эксперимента, осуществляется путем замены значений  $Y_i$ , рассчитанных по формуле (5), значениями  $YL_i$ . Величина  $AsLv_i$  выполняет функцию подвижной верхней асимптоты:

$$YL_i = \ln \left( \frac{|AsLv_i - Y_i|}{|Y_i - AsLn|} \right), \quad (5)$$

где  $YL_i$  – значения линеаризованной таблично заданной функции;  $AsLv_i$  – подвижная верхняя

асимптота, равная  $YG_{i+1}$  предыдущей мельницы;  $Y_i$  – значения свойства в таблично заданной функции;  $AsLn$  – значение исходной длины волокна неразмолотой массы.

Логистическая модель длины волокна с подвижной верхней асимптотой для батареи последовательно соединенных машин имеет вид

$$YG_{i+1} = AsLv_i - \frac{((AsLv_i - AsLn) \cdot \exp(YL))}{1 + \exp(YL)}. \quad (6)$$

Визуализация изменений длины волокна в батарее трех последовательно соединенных машин приведена на рис. 5.



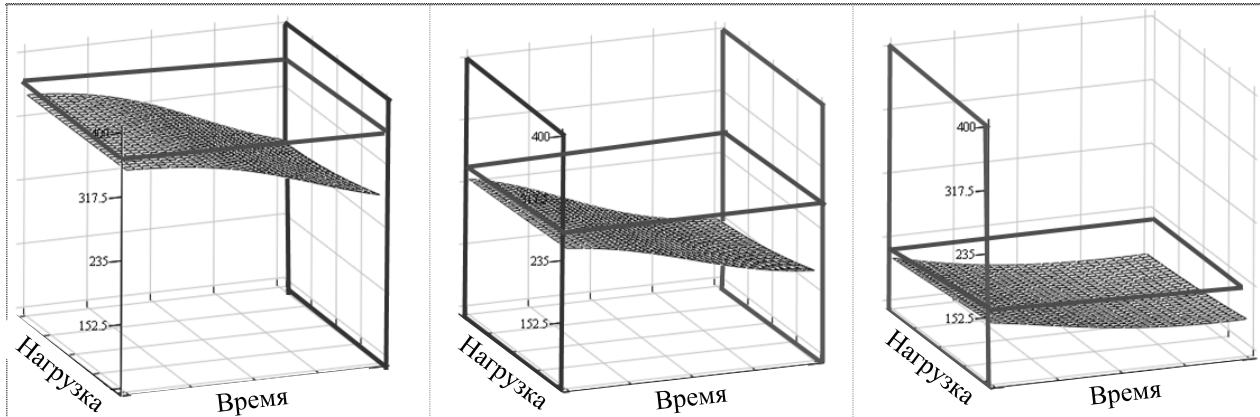


Рис. 5. Графики поверхности отклика функции длины волокна с подвижной верхней асимптотой в математическом пакете MathCAD

<b>Результат оптимизации</b> R= 14394.63 RUD= 41.963 NM= 40						<b>Результат оптимизации</b> R= 21994.86 RUD= 29.196 NM= 60						<b>Результат оптимизации</b> R= 144131.84 RUD= 126.572 NM= 280					
Ступ	Ч.м	Нагру	Конц	Ст.пом	Дл.вол	Ступ	Ч.м	Нагру	Конц	Ст.пом	Дл.вол	Ступ	Ч.м	Нагру	Конц	Ст.пом	Дл.вол
1	4	384.75	10.0	15.1	233.2	1	10	364.36	5.0	15.2	212.1	1	20	333.05	20.0	14.5	248.3
2	4	454.42	10.0	17.0	211.4	2	10	319.72	5.0	16.2	190.3	2	20	488.61	20.0	15.8	244.1
3	4	410.68	10.0	18.8	195.5	3	10	468.23	5.0	18.9	154.2	3	20	479.64	20.0	17.1	239.9
4	4	355.31	10.0	20.2	183.8	4	10	398.54	5.0	20.9	133.9	4	20	482.44	20.0	18.6	235.1
5	4	334.91	10.0	21.5	173.5	5	10	337.60	5.0	22.3	120.6	5	20	395.10	20.0	19.7	231.9
6	4	327.21	10.0	22.8	163.8	6	10	311.02	5.0	23.4	109.9	6	20	423.97	20.0	21.0	227.8
7	4	275.77	10.0	23.7	156.5	<b>Результат оптимизации</b>						7	20	541.34	20.0	23.3	219.4
8	4	366.75	10.0	25.2	145.0	R= 26941.53 RUD= 39.278 NM= 84						8	20	599.36	20.0	26.3	206.7
9	4	338.65	10.0	26.5	135.3	Ступ	Ч.м	Нагру	Конц	Ст.пом	Дл.вол	9	20	536.80	20.0	28.5	196.2
10	4	350.21	10.0	27.7	125.4	1	7	263.27	3.5	14.6	219.2	10	20	544.16	20.0	30.5	184.3
<b>Результат оптимизации</b>						2	7	344.04	3.5	15.9	186.1	11	20	622.28	20.0	32.8	166.2
R= 8923.12 RUD= 33.576 NM= 24						3	7	263.60	3.5	16.7	169.4	12	20	587.28	20.0	34.4	151.4
Ступ	Ч.м	Нагру	Конц	Ст.пом	Дл.вол	4	7	298.84	3.5	17.7	152.5	13	20	623.37	20.0	35.9	135.0
1	2	467.09	5.0	16.0	191.0	5	7	416.16	3.5	19.9	127.4	<b>Результат оптимизации</b>					
2	2	368.13	5.0	17.5	168.3	6	7	259.09	3.5	20.7	117.6	R= 8843.11 RUD= 36.448 NM= 24					
3	2	272.84	5.0	18.4	156.3	7	7	413.92	3.5	22.8	99.3	Ступ	Ч.м	Нагру	Конц	Ст.пом	Дл.вол
4	2	287.00	5.0	19.5	144.5	8	7	363.79	3.5	24.3	87.0	1	4	492.37	3.5	16.3	169.8
5	2	328.57	5.0	20.8	131.2	9	7	331.71	3.5	25.4	77.8	2	4	395.16	3.5	18.2	143.9
6	2	252.20	5.0	21.6	122.9	10	7	350.23	3.5	26.5	69.1	3	4	291.81	3.5	19.2	131.1
7	2	306.07	5.0	22.7	112.7	11	7	288.02	3.5	27.2	63.5	4	4	256.59	3.5	20.0	121.4
8	2	357.98	5.0	24.2	100.7	12	7	256.11	3.5	27.7	59.3	5	4	324.70	3.5	21.3	109.2
9	2	284.98	5.0	25.1	93.1	<b>Результат оптимизации</b>						6	4	450.14	3.5	23.7	90.0
10	2	562.36	5.0	28.4	70.1	R= 40073.77 RUD= 87.969 NM= 60						<b>Результат оптимизации</b>					
11	2	459.58	5.0	30.0	58.9	Ступ	Ч.м	Нагру	Конц	Ст.пом	Дл.вол	R= 16084.90 RUD= 89.298 NM= 42					
12	2	514.76	5.0	31.7	48.4	1	10	711.20	20.0	16.5	236.9	Ступ	Ч.м	Нагру	Конц	Ст.пом	Дл.вол
<b>Результат оптимизации</b>						2	10	708.20	20.0	19.7	222.8	1	3	336.71	15.0	14.7	245.1
R= 11990.51 RUD= 54.943 NM= 26						3	10	743.57	20.0	23.8	203.4	2	3	426.03	15.0	15.9	237.2
Ступ	Ч.м	Нагру	Конц	Ст.пом	Дл.вол	4	10	488.52	20.0	25.7	197.3	3	3	328.81	15.0	16.7	232.3
1	2	408.10	3.5	15.6	191.6	5	10	692.64	20.0	29.4	178.1	4	3	490.36	15.0	18.7	220.7
2	2	357.45	3.5	17.0	164.5	6	10	663.25	20.0	32.2	159.8	5	3	522.80	15.0	21.4	206.1
3	2	362.97	3.5	18.6	142.5	<b>Результат оптимизации</b>						6	3	506.73	15.0	24.0	191.7
4	2	395.68	3.5	20.5	121.3	R= 30701.56 RUD= 22.573 NM= 55						7	3	428.44	15.0	25.9	181.3
5	2	467.74	3.5	23.3	97.2	Ступ	Ч.м	Нагру	Конц	Ст.пом	Дл.вол	8	3	325.78	15.0	26.9	175.0
6	2	564.42	3.5	27.0	70.1	1	11	456.79	3.5	16.0	179.5	9	3	336.08	15.0	27.9	168.2
7	2	485.31	3.5	29.0	56.4	2	11	538.99	3.5	19.5	128.3	10	3	373.23	15.0	29.1	160.0
8	2	444.34	3.5	30.3	48.0	3	11	530.16	3.5	23.2	96.3	11	3	254.75	15.0	29.6	155.6
9	2	435.87	3.5	31.4	42.2	4	11	611.32	3.5	27.5	65.7	12	3	327.28	15.0	30.4	149.3
10	2	382.51	3.5	32.1	38.8	5	11	653.79	3.5	31.0	45.3	13	3	396.36	15.0	31.4	140.4
11	2	520.87	3.5	33.4	34.8	6	11	625.05	3.5	31.0	45.5	14	3	308.28	15.0	32.0	135.0

Рис. 6. Вычислительный эксперимент для оптимизации распределения нагрузок на двигатели машин

Оптимизация распределения нагрузок на двигатели машин осуществлялась путем формирования разнообразных вариантов. Генерирование вариантов осуществлялось по методу Монте-Карло.

Исходными данными служили заданные значения производительности потока и качества размолотой массы по степени помола и длине волокна. Результаты оценивались по величине удельного расхода энергии на размол тонны волокна на один градус Шоппер-Ригглера. При проведении вычислительного эксперимента было сформировано и проанализировано 1500 вариантов распределения нагрузок на двигатели машин при различных требуемых значениях показателей качества размолотой массы. Фрагмент результатов вычислительного эксперимента представлен на рис. 6. Последовательность и параллельность включения машин в батарею определялась необходимостью изменения концентрации массы.

Визуализация изменений длины волокна в батарее трех последовательно соединенных машин приведена на рис. 5.

Анализ рис. 6 позволяет сделать некоторые важные обобщения. Приrost степени помола быстрее и дешевле достигается при высоких концентрациях массы. Наоборот, сокращение длины волокна легче осуществляется при низкой концентрации. Отсюда возникает естественный вывод о том, что процесс размола следует организовывать в несколько ступеней, причем сначала нужно обращать внимание на разработку поверхности волокон при высокой концентрации, а затем, на последующих ступенях, добиваться снижения длины волокна на разбавленной массе.

Таким образом, если сокращение времени размола в мельнице путем дросселирования на выходе не позволяет достичь требуемого качества размолотой массы, то приходится в батарею добавлять последовательно несколько дополнительных единиц размалывающего оборудования. Если батарея не обеспечивает требуемой производительности, то в нее следует добавить несколько машин, включив их параллельно.

При опытно-промышленном испытании разработанной методики оказалось, что, заменив органолептическое управление, использующее опыт, квалификацию и интуицию персонала, на оптимизированное распределение нагрузок между двигателями машин, из 118 работающих машин 30 могут быть отключены.

**Заключение.** Разработана методика получения и использования стохастических логических моделей с подвижными нижней и верхней асимптотами, позволяющих генерировать и количественно оценивать в динамике работу размалывающих машин, включаемых последовательно-параллельно, когда результат размола в одной машине является началом процесса в последующей. По комбинаторному плану вычислительного эксперимента методом Монте-Карло решена задача минимизации удельных расходов энергии для получения заданного качества размолотой массы. Минимальные удельные расходы энергии увеличиваются при получении волокнистой массы с длинными волокнами и высокой степенью помола. Для получения и визуализации стохастических моделей использовались авторские программные средства: Complex, Model Builder v3, а также математический пакет MathCAD.

### Литература

1. Колесников В. Л. Математические основы компьютерного моделирования химико-технологических систем. Минск: БГТУ, 2003. 312 с.
2. Kolesnikov V., Urbanovich P., Brakovich A. Modeling and software implementation of fibrous waste disposal processes // *New Electrical and Electronic Technologies and their Industrial Implementation – NEET' 2015: proc. of the 9-th Intern. conf. Lublin, 2015.* P. 37.
3. Колесников В. Л., Жарский И. М., Урбанович П. П. Компьютерное моделирование и оптимизация химико-технологических систем. Минск: БГТУ, 2004. 532 с.
4. Колесников В. Л. Системный анализ производственных процессов в полиграфии. Минск: БГТУ, 2011. 360 с.

### References

1. Kolesnikov V. L. *Matematicheskie osnovy komp'yuternogo modelirovaniya khimiko-tekhnologicheskikh sistem* [Mathematical fundamentals of computer modeling of chemical-technological systems]. Minsk, BGTU Publ., 2003. 312 p.
2. Kolesnikov V., Urbanovich P., Brakovich A. Modeling and software implementation of fibrous waste disposal processes. *New Electrical and Electronic Technologies and their Industrial Implementation – NEET' 2015: proc. of the 9-th Intern. conf. Lublin, 2015,* p. 37.
3. Kolesnikov V. L., Zharskiy I. M., Urbanovich P. P. *Komp'yuternoe modelirovanie i optimizatsiya khimiko-tekhnologicheskikh sistem* [Computer simulation and optimization of chemical processes: manual for universities]. Minsk, BGTU Publ., 2004. 532 p.

4. Kolesnikov V. L. *Sistemnyy analiz proizvodstvennykh protsessov v poligrafii* [System analysis of industrial processes in polygraphy]. Minsk, BGTU Publ., 2011. 360 p.

#### **Информация об авторах**

**Колесников Виталий Леонидович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: vityalkolesnikov@mail.ru

**Бракович Андрей Игоревич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: brakovich@yandex.ru

#### **Information about the authors**

**Kolesnikov Vitaliy Leonidovich** – DSc (Engineering), Professor, Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vityalkolesnikov@mail.ru

**Brakovich Andrey Igorevich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: brakovich@yandex.ru

*Поступила 15.05.2018*

# СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ОБУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ

---

УДК 004.853

**Я. А. Жук, Н. И. Гурин**

Белорусский государственный технологический университет

## РЕАЛИЗАЦИЯ ДИАЛОГА С КОМПЬЮТЕРНОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМОЙ НА ЯЗЫКЕ JAVASCRIPT С ПОМОЩЬЮ ВЕБ-СЕРВИСОВ

Статья посвящена созданию модуля диалога с компьютерной обучающей системой на основе веб-технологий. Модуль размещается на веб-странице путем добавления в HTML-код ссылок на код JavaScript и стили CSS. Работа модуля диалога основана на использовании семантической сети, записанной в виде списка дуг в двумерный текстовый массив, и созданных на языке JavaScript функций. Поскольку окно диалога размещается на веб-страницах, в базе знаний допускается применение различных HTML-тегов, в том числе добавляющих на страницу изображения, анимации и видеозаписи. При поиске ответа вызывается функция, наполняющая в диалоговом модуле блок истории вопросом и ответом. Для текстовых ответов выполняется озвучивание при помощи веб-сервиса Yandex SpeechKit синтеза речи. Для получения ответа используется функция, выполняющая анализ вопроса и поиск ответа в семантической сети обучающей системы. В ходе анализа вопроса выполняется поиск сказуемого по псевдоокончаниям, занесенным в отдельный массив. Поиск выполняется в трех циклах обработки базы знаний, каждый следующий выполняет поиск при отсутствии результата от предыдущего, используя менее строгие проверки.

**Ключевые слова:** обработка естественного языка, семантическая сеть, вопросно-ответная система.

**Ya. A. Zhuk, N. I. Gurin**

Belarusian State Technological University

## IMPLEMENTATION OF DIALOGUE WITH THE COMPUTER TRAINING SYSTEM IN JAVASCRIPT USING WEB SERVICES

The article describes the creation of a dialogue module for a computer learning system based on web technologies. The module is placed on the page by adding links to JavaScript code and CSS styles to the HTML code. The work of the module is based on a semantic network, recorded as a list of arcs in a two-dimensional array, and three functions in JavaScript. Deployment of the answers on HTML pages allows using a variety of HTML tags in the knowledge base, including adding images, animations and videos to the page. Immediately after pressing the answer search button, the first function is called. This function fills the history block of the dialog box with a question and answer. For textual responses text is transformed to speech using the speech synthesis web service. The answer is returned by the second function that performs an analysis of the question and finds the answer to the question in the semantic network. The answer search is performed in three cycles; each following performs a search in the absence of a result from the previous one, and uses less stringent checks when searching. During the analysis of the question, the search for the predicate is performed using the third function, which uses the pseudo-endings array.

**Key words:** natural language processing, semantic network, question-answer system.

**Введение.** Существующие компьютерные обучающие системы (КОС) часто основаны на веб-технологиях. С целью создания универсальных дополнительных модулей для таких систем целесообразно использовать преимущественно базовые функции языка JavaScript, а не дополнительных библиотек. Одним из широко распро-

страненных недостатков существующих КОС, используемых в дистанционном образовании, является предоставление большей части информации в текстовом либо графическом виде. Такой подход не учитывает особенности личности студентов-аудиалов, склонных к восприятию информации на слух [1]. В качестве решения данной

проблемы предлагается использовать сервисы распознавания и синтеза речи, а также предоставить возможность речевого диалога с КОС. Выбор синтезатора и распознавателя речи из программного пакета Yandex SpeechKit обусловлен бесплатностью для некоммерческих проектов и наличием подробной русскоязычной документации.

Кроме того, предлагаемый метод может быть использован для любой информационной или справочной системы, поскольку обеспечение в ней речевого компьютерного диалога с пользователем способно автоматизировать либо вообще заменить работу операторов так называемых call-центров сервисного обслуживания.

**Основная часть.** Разработанный диалоговый модуль представлен на страницах КОС в виде блока, изначально расположенного за краем экрана и выдвигаемого поверх веб-страницы по щелчку. В состав диалогового модуля входят текстовое поле для ввода вопроса, кнопка подключения сервиса распознавания вопроса в речевом варианте, кнопка запуска поиска ответа и прокручиваемая по вертикали область для вывода истории вопросов и ответов. Корректное расположение и отображение блока диалогового модуля и его составных компонентов обеспечено при помощи стилей CSS. Выдвижение и скрытие модуля выполнено отдельной функцией на языке JavaScript. Интерфейс диалогового модуля показан на рис. 1.

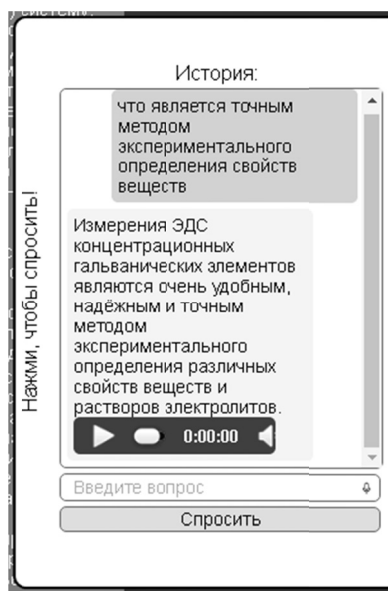


Рис. 1. Интерфейс диалогового модуля

При динамическом добавлении диалогового модуля на страницы выполняется привязка веб-сервиса распознавания речи Yandex SpeechKit JavaScript Web API к полю ввода вопроса. Код привязки функции голосового ввода к текстовому полю приведен на рис. 2.

```
var textline = new ya.speechkit.Textline(
  'Qdialog', {
    onInputFinished: function(text) {
      ask("Qdialog");
    }
  });
```

Рис. 2. Подключение распознавания речи

При активизации режима поиска ответа на введенный вопрос вызывается функция *ask*, отвечающая за размещение вопроса и ответа в соответствующей области диалогового модуля.

Для получения ответа функция *ask* вызывает функцию *getAnswer*, выполняющую поиск ответа в базе знаний (БЗ) информационной системы. Структура БЗ представляет собой список дуг семантической сети, записанный в форме двумерного массива. Каждая строка массива представляет собой простое или сложноподчиненное предложение, разбитое на 3 ячейки. В первую ячейку записывается подлежащее с относящимися к нему дополнительными членами, стоящие в начале предложения в соответствии с требованиями научного функционального стиля, к которому относятся учебники [2]. Далее под подлежащим будет пониматься именно такое содержание первой ячейки. Во вторую ячейку записывается сказуемое, стоящее в середине предложения. В третьей ячейке размещаются вспомогательные члены предложения, расположенные после сказуемого, в т. ч. подчиненные части сложноподчиненных предложений [3]. Пример записи сложноподчиненного предложения показан на рис. 3.

```
[ "электрохимия",
  "- это",
  "раздел химической науки, в котором "+
  "рассматриваются системы и межфазные границы "+
  "при протекании через них электрического тока, "+
  "исследуются процессы в проводниках, "+
  "на электродах и в ионных проводниках." ],
```

Рис. 3. Запись в базе знаний

Поскольку ответы размещаются на HTML-странице КОС, в ячейках БЗ кроме простого текста применяются различные HTML-теги для форматирования текста, вставки изображений, анимационных роликов и видеозаписей. Пример записи, содержащей анимационный ролик в формате SWF приведен на рис. 4.

```
[ "первооткрывателем мира микробов",
  "считается",
  "Антони ван Левенгук "+
  "(Antony van Leeuwenhoek, 1632-1723), "+
  "который жил в Голландии и занимался, "+
  "в основном, пошивом одежды: <br>"+
  "<embed src='1a.swf' />"],
```

Рис. 4. Запись с анимацией в базе знаний

Поиск ответа состоит из анализа вопроса и трех проходов по дугам семантической сети. Ожидается вопрос со строго определенной структурой: вопросное слово, сказуемое и подлежащее. Учитывая такую структуру, анализ состоит в разбиении введенной строки на массив слов и нахождении сказуемого при помощи

функции *getEnding*. Слова, стоящие за сказуемым, считаются подлежащим. Проходы по дугам БЗ выполняют сравнение подлежащего и сказуемого из вопроса с соответствующими ячейками. Упрощенный алгоритм анализа вопроса и поиска ответа, демонстрирующий работу только одного прохода, представлен на рис. 5.

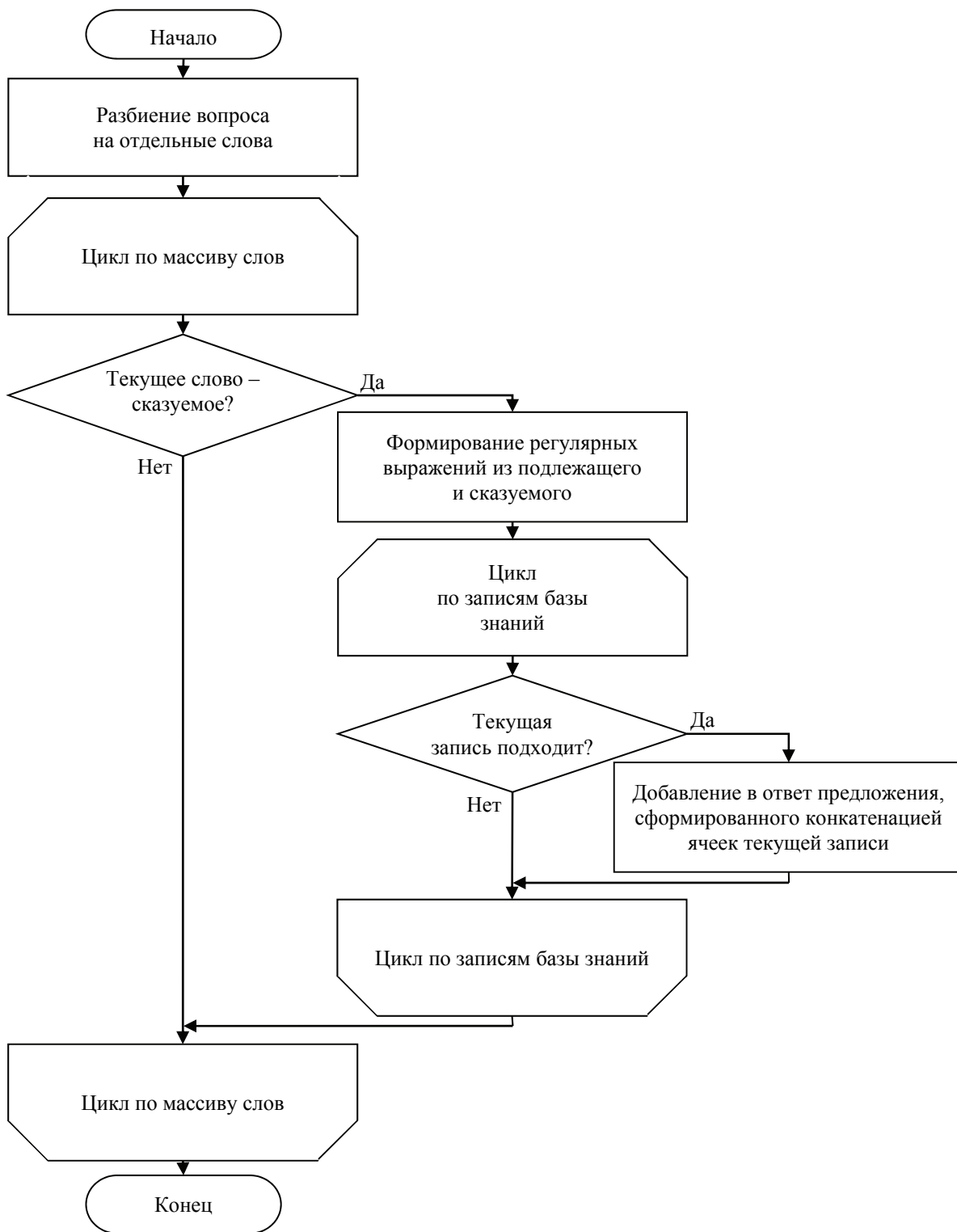


Рис. 5. Блок-схема алгоритма анализа вопроса и поиска ответа

Первый проход выполняет поиск записи, в которой сказуемое и подлежащее полностью совпадают с аналогичными частями вопроса. Такой проход позволяет в КОС по географии в качестве ответа на вопрос «Что такое океан?» вместо описания всех океанов вывести конкретное определение. Во втором цикле выполняется поиск соответствий при помощи регулярных выражений, позволяющих выбрать сказуемое, стоящее в другой форме, а также подлежащее с пропущенными словами. С целью учета синонимичности сказуемых третий цикл выполняет поиск только с помощью регулярного выражения, составленного на основе слов подлежащего из вопроса. Так, на вопрос к КОС по электрохимии «От чего зависит

стандартный электродный потенциал?» будет дан ответ: «Стандартный электродный потенциал  $E^\circ$  – табличная величина, зависящая только от природы электрода и от температуры», в котором в роли сказуемого выступает символ тире. После получения результата от функции *getAnswer* в функции *ask* на основании типа последнего тега ответа делается вывод о необходимости озвучивания, которое выполняется для текстовых ответов при помощи веб-сервиса синтеза речи Yandex SpeechKit Cloud API. Если же в качестве ответа из БЗ был извлечен уже озвученный видеоматериал, озвучивание полученного ответа не выполняется. Блок-схема функции *ask* представлена на рис. 6.

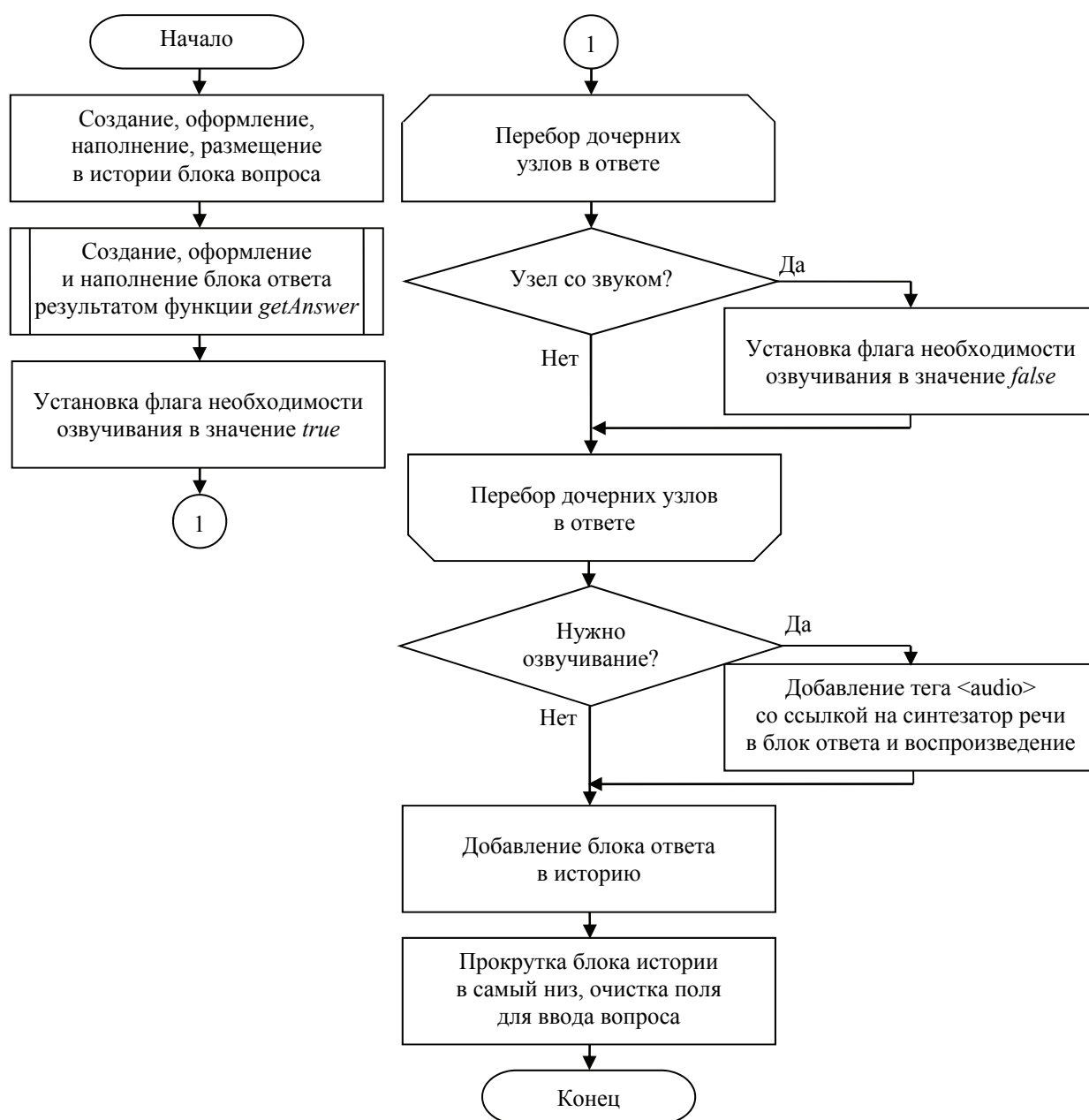


Рис. 6. Блок-схема алгоритма добавления в историю вопросов и ответов

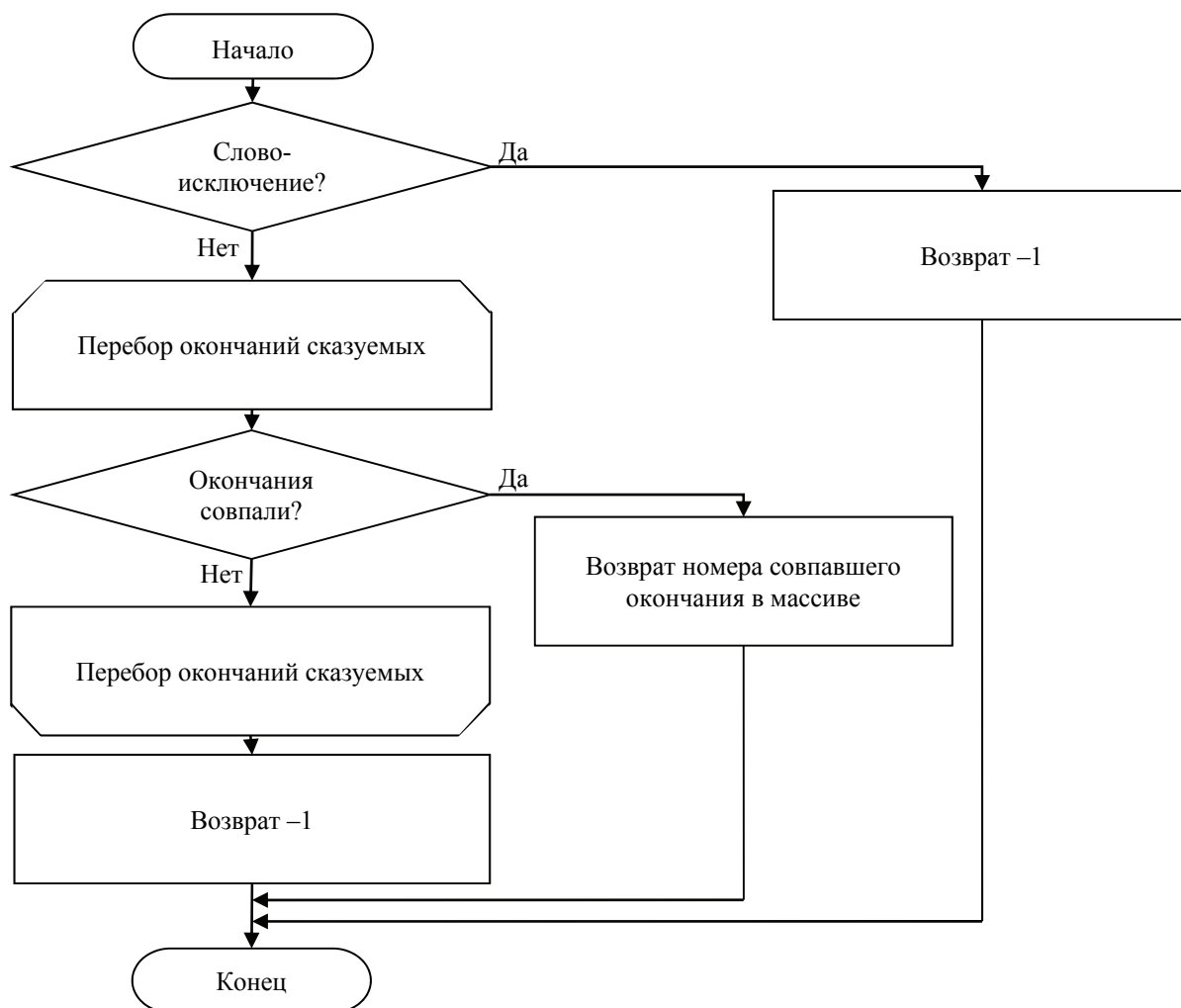


Рис. 7. Блок-схема алгоритма распознавания принадлежности слова к сказуемым

Функция *getEnding*, позволяющая определить, является ли слово сказуемым, выполняет сравнение последних символов слова с набором псевдоокончаний глаголов, кратких прилагательных и причастий, которые хранятся в отдельном двумерном массиве. Именно перечисленные части речи чаще других выступают в качестве сказуемых в текстах научного функционального стиля. При нахождении совпадающего псевдоокончания функция возвращает его номер в массиве. Во втором столбце массива хранятся наборы допустимых псевдоокончаний, используемых в других формах слова: единственное и множественное число у глаголов, различные род и число у кратких прилагательных и причастий. Описанный метод не является совершенным, так как некоторые слова обладают псевдоокончаниями перечисленных частей речи, но при этом принадлежат другим частям речи. Например, слова «бегут» и «атрибут» оба заканчиваются на «ут», но первое является глаголом, а второе – существительным. Чтобы учесть этот факт функция *getEnding* проверяет переданные в нее слова на наличие

в массиве таких слов-исключений и в случае нахождения их в массиве возвращает «-1» вместо номера псевдоокончания, что является признаком того, что слово не принадлежит к искомым частям речи. Отметим, что практическое применение предложенного метода организации речевого диалога с КОС на основе использования псевдоокончаний показало достаточно высокую эффективность при составлении списка слов-исключений, используемых в содержании КОС. Блок-схема определения принадлежности слова к сказуемым показана на рис. 7.

Полученные от функции *getEnding* наборы допустимых псевдоокончаний используются при формировании регулярного выражения для поиска сказуемого во втором проходе по БЗ при поиске ответа в функции *getAnswer*. Также в массив кроме наборов допустимых псевдоокончаний внесены другие слова, которые могут стоять в вопросе перед подлежащим и соответствующие им сказуемые, используемые в БЗ в записях, подходящих в качестве ответов. Например, для корректной обработки вопросов, начинающихся на «что такое» в массив вносится слово «такое»,



а во второй столбец вносится знак «←», используемый в качестве сказуемого в определении, которое будет ответом на вопрос такой структуры. Фрагмент массива приведен на рис. 8.

```
var endings =
  [ ["ет", " (ет|ут|ют) "],
    ["ут", " (ет|ут|ют) "],
    ["ют", " (ет|ут|ют) "],

    ["ется", " (ет|ут|ют) ся"],
    ["утся", " (ет|ут|ют) ся"],
    ["ются", " (ет|ут|ют) ся"],
```

Рис. 8. Псевдоокончания глаголов 1-го спряжения

**Заключение.** Описанный подход позволяет улучшить функциональность КОС, основанных на использовании веб-технологий, путем интеграции в них модуля диалога, в том числе речевого, особенно при дистанционном обучении.

Разработанный программный модуль требует для применения в КОС лишь простейших инструментов веб-разработки и подготовки текстового массива списка дуг семантической сети БЗ КОС. Кроме того, предоставляемый модулем функционал может быть полезен не только в КОС, но и в других информационных системах, где требуется консультация пользователей.

### Литература

1. Денишова Д. А. Репрезентативная система, каналы восприятия и синестезия в рамках вопроса о восприятии человека // Гуманитарный научный вестник. 2017. № 5. С. 8–16.
2. Стилистический энциклопедический словарь русского языка / под ред. М. Н. Кожинной. М.: Флинта: Наука, 2011. 696 с.
3. Гурин Н. И., Жук Я. А. Генератор семантической сети информационной системы в таблицу реляционной базы данных // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 181–185.

### References

1. Denishova D. A. Representational system, channels of perception and synesthesia within the framework of the question of human perception. *Gumanitarnyy nauchnyy vestnik* [Humanities scientific journal], 2017, no. 5, pp. 8–16 (In Russian).
2. *Stilisticheskiy entsiklopedicheskiy slovar' russkogo yazyka* [Stylistic encyclopedic dictionary of Russian language]. Moscow, Flinta Publ., Nauka Publ., 2011. 696 p.
3. Gurin N. I., Zhuk Ya. A. The information system semantic network generator to a relational database table generator. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 181–185 (In Russian).

### Информация об авторах

**Гурин Николай Иванович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ngourine@mail.ru

**Жук Ярослав Александрович** – аспирант кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: zhuk@belstu.by

### Information about the authors

**Gurin Nikolay Ivanovich** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ngourine@mail.ru

**Zhuk Yaroslav Aleksandrovich** – PhD student, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zhuk@belstu.by

Поступила 15.05.2018

УДК 004.932.2

**Н. Н. Бич, Б. А. Ассанович**

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

**РЕАЛИЗАЦИЯ РАСПОЗНАВАНИЯ И ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ  
БИОМЕДИЦИНСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ КЛЕТОЧНОГО УРОВНЯ**

Описана методика для экспериментального изучения биомедицинских цифровых изображений, детектирования и анализа конкретных его элементов (областей), построения их геометрических моделей, извлечения их параметров и статистической оценки появляющейся методической погрешности, а также создано специализированное программное обеспечение на основе программных средств широкого применения (библиотеки OpenCV, среды программирования Delphi 7, языка программирования Pascal и системы управления базами данных MySQL).

**Ключевые слова:** цифровое биомедицинское изображение, детектирование объекта, распознавание объекта, функция-классификатор, библиотека компьютерного зрения.

**N. N. Bich, B. A. Assanovich**

Yanka Kupala State University of Grodno

**IMPLEMENTATION OF RECOGNITION AND ESTIMATION  
OF PARAMETERS BIOMEDICAL IMAGES THE CELLULAR LEVEL**

This paper describes the technique for experimental study of biomedical digital images, detection and analysis of its specific elements (regions), construction of their geometric models, extraction of their parameters and statistical estimation of the emerging methodical error is described, as well as the creation of specialized software based on wide application software (OpenCV libraries, Delphi 7 programming environment, Pascal programming language and MySQL database management system) is described.

**Key words:** digital biomedical image, detection of an object, recognition of an object, function qualifier, library of computer sight.

**Введение.** Современные методы медицинской диагностики и биомедицинских исследований, основанные на использовании таких электронно-вычислительных средств, как микроскопы, рентгено- и термографические аппараты, томографы и многое другое, дают возможность получить полную информацию о строении и изменении различных органов и тканей организма человека.

Одной из приоритетных целей применения данных методов является обнаружение (детектирование) и распознавание искомого объекта на цифровом изображении, а в дальнейшем его регистрация, цифровая обработка и анализ. В настоящее время проблеме распознавания отдельной области или конкретного элемента изображения посвящено множество работ. Однако в целом данная задача еще далека от разрешения.

Основные трудности состоят в том, что структура исследуемых объектов на медицинских изображениях является сложной, неоднородной и требует от специалистов владения определенным практическим опытом, а также знаниями в области общепатологических процессов, позволяющих поставить максимально точный диагноз. Использование вычислительной техники и математических методов в этом направлении дает возможность повысить точность результатов исследований, а также провести аналогию между свойствами изображений и

результатами биомедицинских экспериментов. Применение систем управления базами данных для хранения изображений позволяет их сортировать, обмениваться изображениями и результатами их изучения с другими исследователями, используя для этого современные средства компьютерных телекоммуникаций.

В данной работе изучены особенности методов детектирования и распознавания конкретных объектов изображения. Спроектирована и разработана экспериментальная модель для хранения, обработки, детектирования, распознавания, анализа элементов (областей) цифрового снимка биомедицинских изображений в виде информационной системы, использующей данные и программное обеспечение (библиотека компьютерного зрения OpenCV, среда программирования Delphi 7, язык программирования Pascal, система управления базами данных MySQL).

**Основная часть.** В качестве тестируемого объекта выбран цифровой снимок образца семенного канальца.

Постановка задачи состоит в детектировании объекта (биологической клетки) на цифровом снимке, нахождении его контура, аппроксимации найденного контура геометрическим примитивом, численной обработке выделенных параметров. Метод решения задачи состоит из нескольких этапов.

Первый этап заключается в предварительной подготовке цифрового изображения к анализу и включает следующие шаги: фильтрацию изображения по цвету – настройку цветовой маски; проведение преобразований, связанных с приведением масштабов всех полученных цифровых изображений тестируемого образца к одинаковому масштабу. Процедуры выполняются автоматически отдельным блоком программного приложения. Второй этап заключается в выделении или, другими словами, детектировании на цифровом изображении интересующего исследователя элемента, подразумевает нахождение и прорисовку контуров найденного объекта [1]. Третий этап предусматривает проведение измерительной и статистической обработки результатов [2]. Четвертый – сохранение образцов и полученных результатов в базу данных. Подробно опишем второй этап.

Детектирование объекта – это обнаружение объекта на цифровом снимке с последующим выделением области его расположения. Обнаружение (детектирование) элемента или области на изображении ставит перед собой цель его локализации, определения и выделения в цифровом потоке. Информация о присутствии одного либо нескольких объектов на изображении полезна в системах автоматического учета числа объектов, например при подсчете здоровых и больных клеток в разрезе ткани. Для дальнейшей оценки некоторых количественных характеристик (диаметра) клетки путем подсчета клеток по отдельным полям зрения возникает систематическая погрешность, связанная с учетом пограничных клеток, частично попавших в кадр, поэтому все пограничные клетки следует исключить.

В общем виде алгоритм обнаружения объекта заключается в том, чтобы по данным цифрового снимка на входе системы определить, имеется ли на данном изображении конкретный элемент, если да, то указать, где он находится и каков его размер [3]. Основным требованием, которое предъявляется к подобному классу алгоритмов, является высокое качество изображения, напрямую зависящее от оптической системы ввода. Медицинские электронно-вычислительные средства, используемые для получения изображений исследуемой области, работают в двухмерном режиме. В этом случае распознавание происходит на основе плоского изображения. Двухмерные аппараты весьма чувствительны к уровню освещенности помещения, от этого параметра в значимой мере зависит качество конечного изображения (при плохом свете изображение будет трудноразличимым). Безусловно, конечный результат зави-

сит не только от вышеуказанных характеристик. Большое значение имеют также фокусное расстояние, разрешение, углы обзора и множество других параметров. В частности, использование того или иного микроскопа, а также цифровой видеокамеры сказывается на точности анализа изображения. Поэтому, проводя морфологические исследования посредством компьютерной цифровой микроскопии, необходимо учитывать равномерность освещения, высокие разрешающие способности используемой техники и контрастность изображения.

Для автоматизации процесса распознавания и обработки цифровых изображений используется библиотека алгоритмов компьютерного зрения и обработки изображений с открытым исходным кодом OpenCV [4]. Задача нахождения графических примитивов решается во многих системах компьютерного зрения, в частности, MatLAB Image Processing Toolbox, Juno, Cognitive Passport, Pisoft Image Framework и др. Но перечисленные программные пакеты в отличие от OpenCV дают возможность обработки цифровой картинки удаленно от разрабатываемой под конкретную задачу программы. OpenCV – хранилище алгоритмов из разных областей (вычислительная геометрия, обработка сигнала, машинное обучение). Все алгоритмы делятся на две категории: методы моделирования изображения и методы эмпирического детектирования. Каждый из алгоритмов можно использовать в приложении, написанном на любом языке программирования, в качестве отдельной функции.

Методы моделирования изображения опираются на инструментарий распознавания образов, в них задача обнаружения объектов рассматривается как частный случай общей задачи распознавания. Работа большинства таких алгоритмов заключается в сканировании входного изображения окном, имеющим определенную форму и различный масштаб, и в определении, к какому классу относится изображение внутри этого окна («искомый элемент» либо «неискомый элемент»). Таким образом, задача выделения объекта на изображениях сводится к построению классификатора, эффективно разделяющего классы «искомого элемента» и «неискомого элемента». На основе обучающей выборки строится модель изображения объекта, и задача обнаружения сводится к проверке входного изображения на удовлетворение полученной модели [5].

Данные методы можно назвать весьма производительными, так как все шаги алгоритмов выделения объектов (группирование векторов, вычисление градиента, поиск контуров) требуют лишь нескольких операций на каждый пиксель изображения. К тому же все современные

компьютеры имеют несколько ядер, и цифровой поток может независимо вычисляться на своем ядре, не мешая остальному анализу. Производительность зависит от размера и количества анализируемых изображений, поэтому точную алгоритмическую сложность подсчитать невозможно.

Существует класс изображений, который трудно анализировать в автоматическом режиме путем выбора систем анализа изображений, использующих методы, основанные на вышеуказанных алгоритмах. К таким изображениям относятся снимки микроструктур. Процесс получения таких снимков является, как правило, непростым и многоэтапным, что может сказываться как негативно, так и положительно на качестве полученного изображения. Поэтому в данной работе использован один из эмпирических методов детектирования, который в качестве признака использует цвет области для поиска объекта по контуру [6].

Контур – это внешние очертания (обвод) предмета или объекта. Контурный анализ – это один из методов описания, хранения, распознавания, сравнения и поиска графических образов или объектов. Во время анализа внутренние точки объекта во внимание не принимаются. Проблемы, связанные с выделением контура на изображениях, возникают из-за одинаковой яркости с фоном, объект может не иметь четкой границы или может быть зашумлен помехами, что приводит к невозможности выделения контура. Перекрывание объектов или их группировка приводит к тому, что контур выделяется неправильно и не соответствует границе объекта. Контурный анализ имеет слабую устойчивость к помехам. Любое пересечение или лишь частичная видимость объекта приводит к ложности детектирования. Простота и быстродействие контурного анализа позволяют вполне успешно применять данный подход (при четко выраженном объекте на контрастном фоне при отсутствии помех).

В данной работе для определения контура выбран метод «жука», заключающийся в попиксельном обходе замкнутого контура [7]. Метод рассматривается на цветовом простран-

стве Saturation, в котором насыщенность цвета зависит от расстояния между центром и краем изображения. Варьируется в пределах 0–100 или 0–1. Чем больше этот параметр, тем «чище» цвет, поэтому этот параметр иногда называют чистотой цвета. А чем ближе этот параметр к нулю, тем ближе цвет к нейтральному серому. Изначально «жук» ставится на пиксель по цвету, близкому к нейтральному, и движется до тех пор, пока не попадет на элемент заданного цвета. Как только он дойдет до пикселя заданного цвета, поворачивает налево и переходит на следующий элемент. Если этот элемент нейтрального цвета, то он поворачивает направо, иначе – снова поворачивает налево. Обход контура заканчивается, как только «жук» снова дойдет до первого посещенного темного пикселя. Во время обхода сохраняются координаты каждого перехода между элементами с разной интенсивностью.

К недостаткам этого метода можно отнести потенциальную возможность ложного обнаружения предметов с цветом, близким к цвету детектируемого элемента, и зависимость от цветового баланса соответствующего оборудования и цвета освещения.

На основании выбранного метода детектирования искомого объекта (клетки семенного канальца) на цифровом изображении выделяется его контур. Посредством координат его точек определяется геометрический шаблон формы контура [8] и происходит его обработка в соответствии с шагами предлагаемой методики, обозначенными в блок-схеме, приведенной на рис. 1.

При этом точки контура не дают прямой информации о его форме, что вынуждает применять вероятностные подходы для получения оценки анализируемых измерений, пример выполнения которых будет приведен ниже. Само изображение и результаты его анализа сохраняются в базе данных.

На рис. 2 отражены технология использования и принцип работы программного приложения. В качестве объекта исследования выбран цифровой снимок образца семенного канальца.

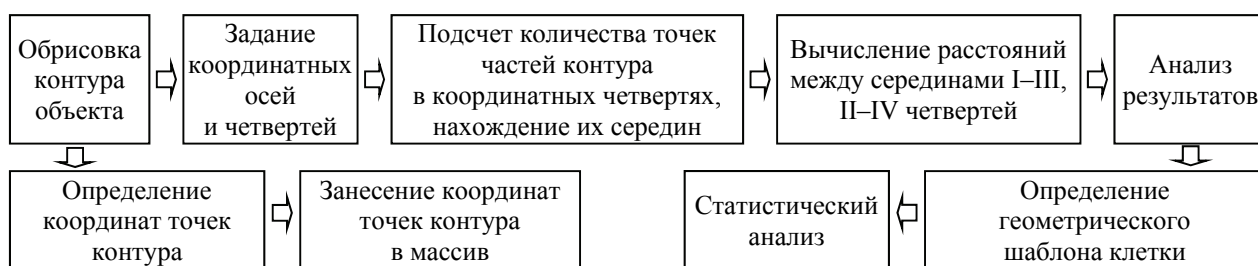


Рис. 1. Схема информационной обработки цифрового изображения объекта поставленной задачи



Рис. 2. Схема принципа работы программы анализа биомедицинских изображений

Все необходимое для нашей разработки имеется в библиотеке открытого компьютерного зрения – OpenCV. Библиотека OpenCV реализует удобные методы для детектирования и манипуляции с контурами изображения.

После соответствующей подготовки к следующему этапу в изображении остались только те пиксели, которые выше или ниже определенного значения. Данная задача решена с помощью функции `cvThreshold()` библиотеки OpenCV. Основная идея алгоритма, заложенного в функцию, – это попадание в конечный массив только тех пикселей, которые выше или ниже заданного порогового значения. Посредством функции `inRange` проделано преобразование цветной картинку в черно-белую маску. В этой маске все пиксели, попадающие в заданный диапазон, становятся белыми. Остальные становятся черными. Каждый пиксель изображения сравнивается с соответствующими значениями изображений `lower` и `upper`. Если значение цвета пикселя больше или равно значению `lower` и меньше, чем `upper`, тогда соответствующее значение устанавливается в `0xff`, иначе в `0`.

Библиотека OpenCV реализует удобный метод «жука» для детектирования и манипуляции с контурами (совокупностями пикселей, составляющих границу объекта) изображения. Для поиска контуров используется функция `cvFindContours()`.

Для выделенной биологической клетки определяется ее геометрическая форма и проводится дальнейший статистический анализ на точность принятого решения. Преобразованное и проанализированное изображение, полученная о нем информация сохраняются отдельным файлом.

Для детектирования формы выделенного на изображении объекта нужно выполнить измерения, геометрические построения и расчеты, приведенные ниже.

Размеры изображения в пикселях, длина  $s$  и высота  $h$  делятся на два, вследствие чего строится система координат. Определяются точки  $O_1, O_2, O_3, O_4$ , как середины частей контура в

соответствующих четвертях. Строятся отрезки  $O_1O_3, O_2O_4$  (рис. 3).

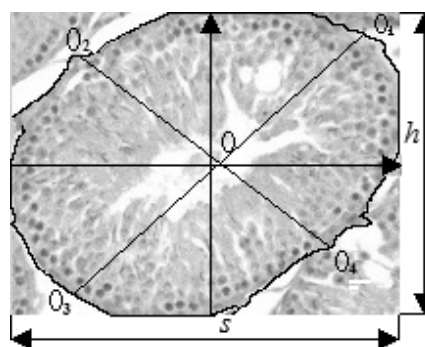


Рис. 3. Вспомогательные построения

Определяется геометрический шаблон клетки.

$$\left| 1 - \frac{|O_1O_3|}{|O_2O_4|} \right| > \varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0 - \text{эллипс};$$

$$\left| 1 - \frac{|O_1O_3|}{|O_2O_4|} \right| \leq \varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0 - \text{окружность},$$

где  $\varepsilon$  – заданная точность измерения. Принимается решение о геометрической форме исследуемой биологической клетки. Для рассматриваемого контура (рис. 3)

$$\left| 1 - \frac{|O_1O_3|}{|O_2O_4|} \right| = 0,3958 > \varepsilon = 10^{-5},$$

следовательно, форма исследуемого объекта представляет собой эллипс.

Любые измерения, расчеты, выводы обладают погрешностью, что требует применения некоторых методов ее определения на основании использования модельного описания параметров изучаемого объекта. В данном случае речь идет о случайной погрешности, обусловленной строением биологической клетки. При исследовании случайных погрешностей в силу предельной теоремы вероятностей для анализа обоснованно принять нормальный закон распределения вероятностей.

## Статистическая обработка вычислений

$n$	$x$ (пиксель)	$y$ (пиксель)	$\ell$ [10]			$\Delta \ell_i^2$
1	4	92	1,1032			0,0084
2	5	94	1,1014			0,0001
...	...	...	...			...
36	47	151	1,0951			0,0000
37	33	144	1,0712			0,0000
$\Sigma$			37,4191			0,0326
$\bar{\ell}$ [10]	$S_{\bar{\ell}}$ [10]	$t(0,05; 36)$	$\Delta \ell = S_{\bar{\ell}} \cdot t$	$\ell = \bar{\ell} \pm \Delta \ell$	$\varepsilon = \Delta \ell \cdot 100\% / x$	$\Delta \ell / \delta = 8$
1,01113	0,0215	2,0315	0,0437	$\delta = 0,05$ (отбрасывается)	(0,9676; 1,055)	4,3216%

Для уменьшения влияния случайных ошибок в уравнение эллипса (окружности, окружность – частный случай эллипса) подставляются координаты  $n$  произвольных точек контура  $\ell_i, i = \overline{1, n}, n \in N$ . На основании проведенных вычислений значений линии контура рассчитывается их средняя величина  $\bar{\ell}$ . Находится погрешность отдельного расчета  $\Delta \ell_i = \mu - \ell_i, \mu = 1$  – истинное значение кривой эллипса. Вычисляются квадраты абсолютных отклонений отдельных расчетов  $\Delta \ell_i^2, i = \overline{1, n}, n \in N$ . Определяется среднеквадратичная ошибка среднего арифметического  $S_{\bar{\ell}}$ , характеризующая точность, с которой получено среднее значение измеренной величины.

Для заданной надежности  $P = 0,95$  и числа произведенных вычислений  $n$  определяется коэффициент Стьюдента  $t$  и находится доверительный интервал (погрешность измерения)  $\Delta \ell$ . Если величина погрешности результата измерения  $\Delta \ell$  окажется сравнимой с величиной погрешности  $\delta = 1 - P = 1 - 0,05$  строения клетки, то в качестве границы доверительного интервала возьмется  $\Delta \ell$ , вычисляемая по формуле. Если одна из ошибок окажется меньше другой в три или более раз, то меньшую ошибку следует отбросить. Окончательный результат записывается в виде интервала. Оценивается относительная погрешность результата измерений  $\varepsilon$ .

Выше в таблице приведена обработка вычислений, полученных в результате исследования контура клетки.

В одних и тех же условиях проделано  $n$  измерений, и наиболее вероятным значением измеряемой величины будет ее среднее значение  $\bar{\ell}$ , стремящееся к значению  $\mu = 1$ .

На рис. 4 показана аппроксимация контура клетки эллипсом.

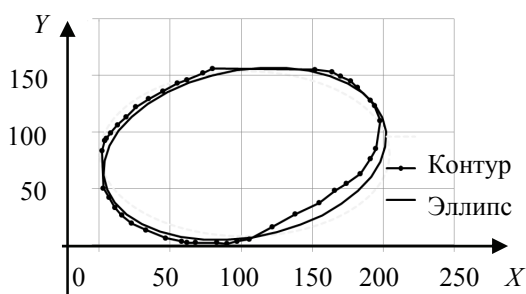


Рис. 4. Графическое сравнение линии анализируемого контура с аналитической кривой эллипса

**Заключение.** Полученные результаты могут быть, использованы в биомедицинской инженерии, мобильных приложениях для первичной диагностики патологий биотканей, а также как базовый программный комплекс для предварительной обработки цифровых медицинских изображений с выделением их геометрических параметров.

## Литература

1. OpenCV шаг за шагом. Нахождение контуров и операции с ними. URL: <http://robocraft.ru/blog/computervision/640.html> (дата обращения: 16.10.2017).
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике М.: Высш. школа, 2010. 400 с.
3. Csink L. Color normalization and object localization // Vierter Workshop Farbbildverarbeitung. Koblenz, 1998. P. 49–57.
4. Шапиро Л., Стокман Д. Компьютерное зрение. М.: БИНОМ, 2006. 752 с.
5. Fleyeh H. Road and traffic sign color detection and segmentation – A Fuzzy Approach // IAPR Conference on Machine Vision Applications. Tsukuba Science City, 2005. P. 124–127.

6. Wang F. Fuzzy-based algorithm for color recognition of license plates // *Pattern Recognition Letters*. 2008. Vol. 29, no. 7. P. 1007–1020.
7. Визильтер Ю. В. *Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения: курс лекций и практических занятий*. М.: Физматкнига, 2010. 672 с.
8. Детектирование объектов – поиск объекта по шаблону (Template matching) URL: <http://robocraft.ru/blog/computervision/3046.html> (дата обращения: 10.11.2017).
9. Воднев В. Т., Наумович А. Ф., Наумович Н. Ф. *Основные математические формулы*. Справочник. Минск: Выш. шк., 1988. 270 с.

### References

1. *OpenCV shag za shagom. Nakhozhdenie konturov i operatsii s nimi* [OpenCV step by step. Finding contours and operations with them]. Available at: <http://robocraft.ru/blog/computervision/640.html> (accessed 16.10.2017).
2. Gmurman V. E. *Rukovodstvo k resheniyu zadach po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike* [The management to the solution of tasks in probability theory and mathematical statistics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2010. 400 p.
3. Csink L. Color normalization and object localization. *Vierter Workshop Farbbildverarbeitung*. Koblenz, 1998, pp. 49–57.
4. Shapiro L., Stokman D. *Komp'yuternoe zrenie* [Computer vision]. Moscow, BINOM Publ., 2006. 752 p.
5. Fleyeh H. Road and traffic sign color detection and segmentation – A Fuzzy Approach. *IAPR Conference on Machine Vision Applications*. Tsukuba Science City, 2005, pp. 124–127.
6. Wang F. Fuzzy-based algorithm for color recognition of license plates. *Pattern Recognition Letters*, 2008, vol. 29, no. 7, pp. 1007–1020.
7. Vizil'ter Yu. V. *Obrabotka i analiz izobrazheniy v zadachakh mashinnogo zreniya: kurs lektsiy i prakticheskikh zanyatiy* [Processing and the analysis of images for solving machine vision problems: Course of lectures and practical training]. Moscow, Fizmatkniga Publ., 2010. 672 p.
8. *Detektirovanie ob'ektov – poisk ob'ekta po shablonu (Template matching)* [Object detection – object search by pattern]. Available at: <http://robocraft.ru/blog/computervision/3046.html> (accessed 10.11.2017).
9. Vodnev V. T., Naumovich A. F., Naumovich N. F. *Osnovnye matematicheskie formuly. Spravochnik* [Basic mathematical formulas. Reference book]. Minsk, Vysheyschaya shkola Publ., 1988. 270 p.

### Информация об авторах

**Бич Наталья Николаевна** – кандидат физико-математических наук, инженер-программист кафедры информационных систем и технологий. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, Республика Беларусь). E-mail: Nadaliya@mail.ru

**Ассанович Борис Алиевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, Республика Беларусь). E-mail: bas@grsu.by

### Information about the authors

**Bich Natal'ya Nikolaevna** – PhD (Physics and Mathematics), software engineer, the Department of Information Systems and Technologies. Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: Nadaliya@mail.ru

**Assanovich Boris Alievich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: bas@grsu.by

Поступила 15.05.2018

# АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

---

УДК 681.142.2

Ю. О. Герман, О. В. Герман

Белорусский государственный технологический университет

## О НЕСООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ РАСПОЗНАВАНИЕМ ЯЗЫКА ЗА ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ВРЕМЯ И ТОТАЛЬНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОСТЬЮ РАСПОЗНАВАТЕЛЯ

Приводимые в статье рассуждения устанавливают разницу между тотальной полиномиальностью распознающей машины и полиномиальной сложностью реализуемого ею алгоритма. Проблема связана с отождествлением выводов и доказательств, что не всегда допустимо. Кроме того, нужно иметь в виду, что доказательство становится некорректным, если оно доказывает предикат, являющийся характеристической функцией изменяющегося в процессе доказательства множества. Таким образом, множество доказательств, вообще говоря, не следует отождествлять с множеством корректно построенных выводов. Применительно к теории вычислительной сложности заметим, что трудности доказательства  $P \neq NP$  могут быть напрямую связаны с рассматриваемыми в данной статье проблемами теории доказательств. Возникает идея сведения языка, распознаваемого некоторой детерминированной машиной  $M$  за полиномиальное время, при условии, что для  $M$  нет доказательства тотальной полиномиальности, к языку Выполнимость. Эта идея, по сути, является наиболее существенной точкой роста для последующих работ. Другой важной точкой роста является развитие концепции доказательства как формального математического объекта.

**Ключевые слова:** алгоритм, система доказательств, проблема выполнимости, полиномиальная вычислительная сложность, финитность распознавателя.

Yu. O. German, O. V. German

Belarusian State Technological University

## ABOUT DISCREPANCY BETWEEN POLYNOMIAL TIME LANGUAGE RECOGNITION ALGORITHM AND TOTAL POLYNOMIALITY OF THE RECOGNIZER

The reasoning given in the paper establishes distinction between total polynomiality of the recognizing machine and polynomial complexity of the algorithm realized by it. The problem stems from the incorrect identifying the proofs as inferences what may not take place. Besides, one should bear in mind the proof becoming incorrect if it proves the predicate representing a characteristic function of some set which changes due to the given proof. Thus, the set of proofs in general cannot be identified with a set of all correctly built inferences. Concerning the computation complexity theory, let us note that the obstacles in proving  $P \neq NP$  may be directly connected to the difficulties in the proof theory considered in the paper. The idea arises to reduce a language recognized for polynomial time by some deterministic machine  $M$ , provided that there is no proof of  $M$  total polynomiality, to Satisfiability language. This idea, by essence, is the most important "point of growth" for future research alongside with the construction of a new concept of the proof as a formal mathematical object.

**Key words:** algorithm, proof system, satisfiability problem, polynomial computational complexity, recognition procedure finiteness.

**Введение.** Принимается, что доказательства алгоритмически распознаваемы. Доказательства используют некоторые множества объектов, которые должны оставаться неизменными. Поэтому если доказательство само использует некоторое множество доказательств, которому оно а priori не принадлежит, то оно не должно

попадать в это множество а posteriori. Исходя из этой позиции, мы ставим цель продемонстрировать, что распознавание языка за полиномиальное время и тотальная полиномиальность распознавателя не всегда тождественны.

**Основная часть.** Рассмотрим язык LAR\* [1], содержащий слова  $u$ , такие что



$$y = y_1 @ y_2.$$

i.  $y_1$  представляет набор правил (спецификацию) произвольной машины Тьюринга  $MT_\epsilon$ ;

ii.  $y_2$  является доказательством формулы, утверждающей, что  $MT_\epsilon$  со спецификацией  $y_1$  финитна на каждом входе  $x$ ;

iii.  $MT_\epsilon$  отклоняет слово  $y = y_1 @ y_2$ .

Символ-демаркатор @ имеет чисто техническое значение и может быть опущен.

**Замечание.** Доказательства  $y_2$  представляют корректные выводы в некоторой метатеории  $Ps$  с точно определенными понятиями машины Тьюринга, финитности, отклоняющего (принимающего) вычисления и др. Теорию  $Ps$  можно противопоставить объектной теории  $Th$ , в которой определен универсум рассуждений относительно  $MT_\epsilon$ . В  $Ps$  с четко определенной системой аксиом  $Ax$  и алгоритмически проверяемым синтаксисом доказательств имеем: доказательство произвольной формулы  $\epsilon$  есть последовательность [2]:

$$R_1(\phi_1^1, \phi_2^1, \dots, \phi_{k-1}^1 | \phi_k^1),$$

$$R_2(\phi_{k+1}^2, \phi_{k+2}^2, \dots, \phi_{l-1}^2 | \phi_l^2), \dots,$$

$$R_v(\phi_w^v, \phi_{w+1}^v, \dots, \phi_z^v | \epsilon),$$

где  $R_i$  правила вывода с посылками, указанными слева от вертикальной черты в скобках и заключением, указанным справа. Посылки являются либо аксиомами  $Ax$ , либо заключениями ранее использованных правил в последовательности вывода. По тексту доказательства всегда можно установить, какая формула доказана и корректен ли вывод.

Можно построить машину  $MT_{LAR^*}$  (обозначим ее спецификацию  $y_1^{LAR^*}$ ), распознающую  $LAR^*$ . Принимаем практически очевидные факты о наличии финитных процедур для проверки пунктов i, ii, iii определения языка  $LAR^*$ . Заметим, что верификация п. iii заключается в моделировании работы  $MT_\epsilon$  на данном входном слове. Процесс моделирования финитен в силу доказательства  $y_2$ . Итак,  $MT_{LAR^*}$  распознает для каждого входа  $x$ , имеет ли место  $x \in LAR^*$  или  $x \notin LAR^*$  за финитное время.

**Теорема 1.** Нельзя доказать финитность машины  $MT_{LAR^*}$ .

**Доказательство.** Пусть такое доказательство есть. Обозначим его  $D_{LAR}$ . Рассмотрим слово  $y_1^{LAR^*} @ D_{LAR}$ . Тогда  $MT_{LAR^*}$  не может за финитное время ни отклонить его, ни принять, что противоречит  $D_{LAR}$ .

**Теорема 2.**  $MT_{LAR^*}$  распознает язык  $LAR^*$  за финитное время.

**Доказательство.** Ясно, что  $LAR^*$  не пусто: он включает хотя бы одно слово для машины,

отклоняющей все слова за один такт. По сути, машина  $MT_{LAR^*}$  должна проверить текст доказательства  $y_2$ . Доказательство состоит из однотипных блоков, каждый блок содержит посылки применяемого правила вывода, само правило вывода и заключение правила вывода. Проверка посылок сводится к выяснению, что это либо аксиома, либо полученное ранее заключение. Таким образом, проверка доказательств сводится к повторению однотипного действия – выяснению того, что некоторое слово содержится в другом слове. Если доказательство состоит из  $m$  слов, то проверок будет не более  $m^2$ . Проверка вхождения слова в другое слово выполняется на основе полиномиального детерминированного алгоритма за время порядка  $N$ , где  $N$  – наибольшая длина слова. Отсюда общее время проверки доказательства может быть оценено как  $O(m^2 \cdot N)$  или  $O(L^3)$ ,  $L$  есть длина доказательства. Процесс моделирования завершается за гарантированно финитное время в силу предъявленного доказательства. Поэтому наличие доказательства  $y_2$  гарантирует распознавание результата работы машины  $y_1$  на входе  $y = y_1 @ y_2$ . Однако финитность процедуры распознавания не дает оснований считать распознающую машину доказательно финитной в силу теоремы 1.

Рассмотрим несколько измененный язык  $PLAR$ , состоящий из слов  $y = y_1 y_2$ , где:

1)  $y_1$  представляет спецификацию произвольной детерминированной машины Тьюринга  $MT_\eta$ ;

2)  $y_2$  есть доказательство того, что  $MT_\eta$ , определенное словом  $y_1$ , отклоняет любое слово  $y$ , начинающееся с  $y_1$  (т. е.  $y = y_1 Z$  с произвольным словом  $Z$ ), за время, ограниченное некоторым фиксированным полиномом от длины слова  $y = y_1 Z$ .

Ясно, что  $PLAR$  не пусто: он включает хотя бы одно слово для машины, отклоняющей все слова за один такт. Построим машину  $MT_{PLAR}$  с полиномиальным временем работы [3] для распознавания  $PLAR$ . По сути, эта машина должна проверить доказательство  $y_2$ . Доказательства распознаются за полиномиальное время. Моделировать теперь не надо. Следовательно, если доказательство проверено и оно верно, то машина  $MT_{PLAR}$  принимает слово  $y = y_1 @ y_2$ . Мы получаем таким образом следующий результат.

**Теорема 3.**  $MT_{PLAR}$  распознает язык  $PLAR$  за полиномиальное время.

**Теорема 4.** Нельзя доказать полиномиальную сложность машины  $MT_{PLAR}$ .

**Доказательство.** Оно состоит из двух частей. Пусть  $y_1^{LAR}$  есть спецификация  $MT_{PLAR}$ .

1. Доказываем, что  $MT_{PLAR}$  не принимает ни одного слова вида  $y_1^{LAR}Z$ . Если допустить противное (слово  $y_1^{LAR}Z$  принимается), то в силу  $Z$  машина  $MT_{PLAR}$  отклоняет  $y_1^{LAR}Z$ , что дает противоречие. Заметим, что «не принимает» не означает отклоняет (допускается работа без останова). Поэтому данная часть доказательства не входит в множество доказательств того, что машина Тьюринга отклоняет все слова, начинающиеся с ее спецификации, за полиномиальное время. Это обеспечивает корректность данного доказательства.

2. Пусть имеется доказательство  $D_{polLAR}$  тотальной полиномиальности  $MT_{PLAR}$ . Тогда п. 1 означает, что  $MT_{PLAR}$  отклоняет каждое слово вида  $y_1^{LAR}Z$  за полиномиальное время (работа без останова или с неполиномиальным временем теперь отпадают).

Пункты 1, 2 дают доказательство  $\vartheta$  того, что каждое слово  $y_1^{LAR}Z$  отклоняется за полиномиальное время. Поэтому  $MT_{PLAR}$  должна принять слово  $y_1^{LAR}\vartheta$ , что опять невозможно. Следовательно, допущение о наличии  $D_{polLAR}$  ложно.

Итак, мы столкнулись со следующей проблемой: нельзя доказать полиномиальность (финитность) некоторой машины Тьюринга как таковой, но можно доказать полиномиальность (финитность) реализуемого ею алгоритма. Для уяснения сути мы сошлемся на следующий наглядный парадокс. *Пловцом считается тот, кто умеет перебраться через реку. Пловцы получают сертификат пловца. Считается, что пловец, не прибегающий к услугам других, может переправить на себе только одного другого человека. Некто  $X$  переплавляется через реку только на сертифицированных пловцах. Причем ни один сертифицированный пловец не может отказать  $X$ . Следует ли этому  $X$  вручить сертификат?*

Сертификат пловца означает способность перебраться с одного берега на другой (неважно, каким способом). Следовательно, формально  $X$  и каждый такой  $X$  должен быть сертифицирован. Однако если такой сертифицированный пловец, теперь уже с удостоверением пловца, встретится другому такому же пловцу  $X$ , то оба пойдут ко дну либо их переправа вовсе не состоится. Здесь причиной казуса является нефиксированность ситуации. Пусть ситуация с сертифицированными пловцами зафиксирована, и среди них нет ни одного  $X$ . Тогда  $X$  не может стать сертифицированным

пловцом, ибо множество сертифицированных пловцов зафиксировано, а если его изменить, то это уже будет другая ситуация. Первым сертифицированным пловцом как раз является не  $X$ . Таким образом, некое множество сертифицированных пловцов не содержит ни одного  $X$ . Еще раз: проблема в том, что  $X$  получает сертификат за счет некоего фиксированного множества сертифицированных пловцов, как только  $X$  получит сертификат, это множество сертифицированных пловцов будет уже иным (ситуация изменится).

**Формальные выкладки.** Теперь мы формально докажем, что машина  $MT_{LAR^*}$  распознает язык  $LAR^*$  за финитное время. Введем следующие предикаты:

$prffin(z, x)$  –  $z$  есть доказательство финитности машины со спецификацией  $x$ ;

$\hat{fin}(x)$  – утверждает, что машина Тьюринга со спецификацией  $x$  тотально финитна;

$accept(x, y)$  – машина Тьюринга со спецификацией  $x$  принимает слово  $y$ ;

$decline(x, y)$  – машина Тьюринга со спецификацией  $x$  отклоняет слово  $y$ ;

$\forall y accept(x, y) \vee decline(x, y)$  – утверждает, что машина  $x$  распознает слова  $y$  за финитное время;

$m$  – спецификация машины  $MT_{LAR^*}$ ;

$f_1(w)$  – представляет рекурсивную функцию, которая возвращает левую часть от символа  $@$  входного слова  $w$  и  $f_2(w)$ , соответственно, возвращает правую от символа  $@$  часть слова (если нечего возвращать, то возвращается пустая строка).

Рассматриваем аксиомы  $Ps$ , для  $MT_{LAR^*}$ :

1.  $\forall x \forall y accept(x, y) \rightarrow \neg decline(x, y)$ ;

2.  $\forall w \neg prffin(f_2(w), f_1(w)) \rightarrow decline(m, w)$ ;

3.  $\forall w prffin(f_2(w), f_1(w)) \& decline(f_1(w), w) \rightarrow accept(m, w)$ ;

4.  $\forall w prffin(f_2(w), f_1(w)) \& accept(f_1(w), w) \rightarrow decline(m, w)$ ;

5.  $\forall w accept(m, w) \rightarrow prffin(f_2(w), f_1(w)) \& decline(f_1(w), w)$ ;

6.  $\forall w prffin(f_2(w), f_1(w)) \rightarrow accept(f_1(w), w) \vee decline(f_1(w), w)$ .

Требуется доказать:

7.  $\forall y accept(m, y) \vee decline(m, y)$ .

**Доказательство.** Основанный на резолюциях вывод состоит из следующих шагов. Записываем отрицание доказываемой формулы:

8.  $\neg \text{accept}(m, c) / c$  – некоторая константа/;

9.  $\neg \text{decline}(m, c)$ .

Из 2, 9:

10.  $\text{prffin}(f_2(c), f_1(c))$ .

Из 3, 8:

11.  $\neg \text{decline}(f_1(c), c) \vee \neg \text{prffin}(f_2(c), f_1(c))$ .

Из 4, 9:

12.  $\neg \text{accept}(f_1(c), c) \vee \neg \text{prffin}(f_2(c), f_1(c))$ .

Из 10, 11, 12:

13.  $\neg \text{decline}(f_1(c), c)$ .

14.  $\neg \text{accept}(f_1(c), c)$ .

Из 6, 13, 14:

15.  $\neg \text{prffin}(f_2(c), f_1(c))$ .

10, 15 дают  $\square$  (противоречие).

Совместность аксиом устанавливается без труда. Приведенное доказательство устанавливает финитность процедуры распознавания, реализуемой машиной  $\text{MT}_{\text{LAR}^*}$ . Докажем теперь, что для  $\text{MT}_{\text{LAR}^*}$  нет доказательства финитности:

1.  $\forall x \forall y \text{ accept}(x, y) \rightarrow \neg \text{decline}(x, y)$ ;

2.  $\forall w \neg \text{prffin}(f_2(w), f_1(w)) \rightarrow \text{decline}(m, w)$ ;

3.  $\forall w \text{ prffin}(f_2(w), f_1(w)) \& \text{ decline}(f_1(w), w) \rightarrow \text{accept}(m, w)$ ;

4.  $\forall w \text{ prffin}(f_2(w), f_1(w)) \& \text{ accept}(f_1(w), w) \rightarrow \text{decline}(m, w)$ ;

5.  $\forall w \text{ accept}(m, w) \rightarrow \text{prffin}(f_2(w), f_1(w)) \& \text{ decline}(f_1(w), w)$ ;

6.  $\forall w \text{ prffin}(f_2(w), f_1(w)) \rightarrow \text{ accept}(f_1(w), w) \vee \text{ decline}(f_1(w), w)$ .

Требуется доказать

7.  $\forall y \neg \text{prffin}(m, y)$ .

Пусть вопреки утверждению теоремы есть такое доказательство. Обозначим его  $d$ . Тогда истинен предикат

8.  $\text{prffin}(m, d)$ .

Обозначим слово  $a = m@d$ . Тогда в силу наших обозначений  $f_1(a) = m, f_2(a) = d$ . Резольвентой дизъюнктов 6 и 8 является дизъюнкт

9.  $\text{accept}(m, a) \vee \text{decline}(m, a)$ .

Резольвентой 4, 8 является дизъюнкт

10.  $\text{accept}(m, a) \vee \text{decline}(m, a)$ .

Резольвентой 9, 10 является дизъюнкт

11.  $\text{decline}(m, a)$ .

Из 1, 11 получим

12.  $\text{accept}(m, a)$ .

Из 3, 8 получим

13.  $\text{accept}(m, a) \vee \text{decline}(m, a)$ .

Противоречие дают 11, 12, 13.

Таким образом следует признать, что в общем случае не имеет места импликация

$\forall y \text{ accept}(m, y) \vee \text{decline}(m, y) \rightarrow \text{fin}(m)$ ,

где  $\text{fin}(m)$  утверждает финитность машины  $m$ , так как имеет значение смысл слова  $y$ .

Теоремы 3 и 4 доказываются аналогично. Ниже под  $\text{decline}(x, y)$  понимаем предикат, утверждающий, что машина  $x$  отклоняет слово  $y$  за время, ограниченное некоторым фиксированным полиномом;  $\text{prffinp}(y_2, y_1)$  утверждает, что  $y_2$  есть доказательство того, что машина  $y_1$  отклоняет любое слово  $y_1 Z$  за время, ограниченное некоторым фиксированным полиномом;  $\text{struct}(x, y_1, y_2)$  означает, что слово  $x$  есть результат конкатенации слов  $y_1$  и  $y_2$ .

Имеем систему аксиом:

1.  $\forall x \forall y \text{ accept}(x, y) \rightarrow \neg \text{decline}(x, y)$ ;

2.  $\forall x \forall y_1 \forall y_2 (\text{struct}(x, y_1, y_2) \& \text{prffinp}(y_2, y_1) \rightarrow \text{accept}(m, x))$ ;

3.  $\forall x \forall y_1 \forall y_2 ((\neg \text{struct}(x, y_1, y_2) \vee \neg \text{prffinp}(y_2, y_1)) \rightarrow \text{decline}(m, x))$ ;

4.  $\forall w \text{ accept}(m, w) \rightarrow \text{prffinp}(f_2(w), f_1(w))$ ;

5.  $\forall x \forall y_1 \forall y_2 (\text{struct}(x, y_1, y_2) \& \text{prffinp}(y_2, y_1) \rightarrow \text{decline}(y_1, x))$ .

Теорема о том, что машина  $\text{MT}_{\text{PLAR}}$  со спецификацией  $y_1^{\text{LAR}}$  не принимает ни одного слова вида  $y_1^{\text{LAR}} Z$ :

6.  $\forall x \forall z \text{ struct}(x, m, z) \rightarrow \text{accept}(m, x)$ .

Отрицание теоремы дает два дизъюнкта:

7.  $\text{accept}(m, c)$ ;

8.  $\text{struct}(c, m, f_2(c))$ .

Обозначим слово  $c = m@d$ . Тогда в силу наших обозначений  $f_1(c) = m, f_2(c) = d$ .

Из 1 и 7:

9.  $\text{decline}(m, c)$ .

Из 5, 8, 9:

10.  $\text{prffinp}(f_2(c), m)$ .

Из 4 и 10:

11.  $\text{accept}(m, c)$ .

7 и 11 дают противоречие.

С учетом доказанной теоремы убедиться в том, что нет доказательства тотальной полиномиальной сложности машины  $\text{MT}_{\text{PLAR}}$ , не составляет труда. Допустим противное и расширим систему аксиом:

1.  $\forall x \forall y \text{ accept}(x, y) \rightarrow \neg \text{decline}(x, y)$ ;
2.  $\forall w \neg \text{prffinp}(f_2(w), f_1(w)) \rightarrow$   
 $\rightarrow \text{decline}(m, w)$ ;
3.  $\forall w \text{prffinp}(f_2(w), f_1(w)) \rightarrow$   
 $\rightarrow \text{accept}(m, w)$ ;
4.  $\forall w \text{accept}(m, w) \rightarrow \text{prffinp}(f_2(w), f_1(w))$ ;
5.  $\forall w \text{accept}(m, w) \rightarrow \text{decline}(f_1(w), w)$ ;
6.  $pf(m)$  // доказательство полиномиальности  $MT_{PLAR}$ ;
7.  $\forall w pf(m) \rightarrow \text{accept}(m, w) \vee \text{decline}(m, w)$ ;
8.  $\forall w pf(m) \& \overline{\text{accept}(m, w)} \rightarrow$   
 $\rightarrow \text{prffinp}(d, m)$ .

Убеждаемся, что эта система противоречива. Обозначим слово  $a = m@d$ . В силу наших обозначений  $f_1(a) = m, f_2(a) = d$ .

Из 6, 7 получим

9.  $\text{accept}(m, a) \vee \text{decline}(m, a)$ .

Из 5, 9 получим

10.  $\text{decline}(m, a)$ .

Резольвентой 1, 10 является дизъюнкт

11.  $\overline{\text{accept}(m, a)}$ .

Из 6, 8, 11:

12.  $\text{prffinp}(d, m)$ .

Из 3, 11:

13.  $\overline{\text{prffinp}(d, m)}$ .

12 и 13 дают противоречие.

Вместе с тем без  $pf(m)$  последняя система аксиом непротиворечива (можно убедиться, построив выполняющую интерпретацию).

**Заключение.** Основной вывод статьи такой: машина Тьюринга может реализовать некий алгоритм за полиномиальное время и в то же время не быть тотально полиномиальной. Этот вывод позволяет по-новому взглянуть на проблему  $P \neq NP$  и, возможно, открывает дорогу новым подходам к ее решению.

### Литература

1. Герман О. В. Обучение основной теореме теории вычислительной сложности // Новые информационные технологии в образовании: материалы II Междунар. конф., Минск, 12–14 нояб. 1996 г.: в 2 т. / Объед. ин-т проблем информатики Нац. акад. наук Респ. Беларусь. Минск, 1996. Т. 1. С. 99–109.
2. Расева Е., Сикорски Р. Математика метаматематики. М.: Наука, 1972. 590 с.
3. Гэри М., Джонсон Д. С. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 410 с.

### References

1. German O. V. Learning the main theorem in computational complexity theory. *Materialy II Mezhdynarodnoy konferentsii "Novye informatsionnye tekhnologii v obrazovanii: v 2 tomakh* [Materials of the 2<sup>nd</sup> International Conference "New information technologies in education": in 2 vol.]. Minsk, 1996, vol. 1, pp. 99–109 (In Russian).
2. Raseva E., Sikorski R. *Matematika metamatematiki* [Mathematics of Metamathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 590 p.
3. Geri M., Johnson D. S. *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi* [Computers and intrac-table Problems]. Moscow, Mir Publ., 1982. 410 p.

### Информация об авторах

**Герман Юлия Олеговна** – старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: juliagerman@tut.by

**Герман Олег Витольдович** – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ovgerman@tut.by

### Information about the authors

**German Yulia Olegovna** – senior lecturer, the Department of the Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: juliagerman@tut.by

**German Oleg Vitol'dovich** – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ovgerman@tut.by

Поступила 15.05.2018

# СОДЕРЖАНИЕ

.....	
<b>ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ.....</b>	<b>5</b>
<b>МАТЕМАТИКА.....</b>	<b>5</b>
<b>Борковская И. М., Пыжкова О. Н.</b> Задачи управления и стабилизации для гибридных динамических систем.....	5
<b>Пономарева С. В., Пыжкова О. Н., Яроцкая Л. Д.</b> К вопросу о разрешимости уравнений со степенно-логарифмическим ядром на многомерной пирамидальной области.....	10
<b>Савва В. А.</b> Лазеры, селективное возбуждение молекул и управление химическими реакциями – фемтохимия.....	15
<b>Волк А. М., Вилькоцкий А. И., Скорб И. И.</b> Стационарное движение двух несмешивающихся вязких жидкостей в прямоугольном канале.....	25
<b>Соловьева И. Ф.</b> Об устойчивости одного из методов решения граничных задач с пограничным слоем.....	29
<b>Якименко А. А.</b> Стабилизация одной системы нейтрального типа в общециклическом случае.....	34
<b>Можей Н. П.</b> Нормальные связности на несимметрических однородных пространствах.....	38
<b>МЕХАНИКА.....</b>	<b>43</b>
<b>Бондаренко О. В., Степанов Д. Н.</b> Влияние термомеханического воздействия на длину оптического волокна в трубке оптического модуля.....	43
<b>ФИЗИКА.....</b>	<b>47</b>
<b>Наркевич И. И., Фарафонтова Е. В., Зубрицкий Д. Е.</b> Численно-аналитический расчет микроскопического распределения центров коллоидных частиц в макроскопически однородном водном растворе.....	47
<b>Мадьяров В. Р.</b> Применение эффектов вращения плоскости поляризации и магнитоплазменного отражения для определения параметров электронного переноса в полупроводниках.....	52
<b>Бобрович О. Г.</b> Композиционный состав циркониевого покрытия, осажденного на кремний в условиях ионного ассистирования.....	57
<b>Бобрович О. Г., Барайшук С. М., Туровец А. И., Яскељчик В. В.</b> Морфология и свойства поверхности сплава АМг2М, модифицированного осаждением молибдена в условиях ионного ассистирования.....	62
<b>Тулъев В. В.</b> Изучение поверхности структур металлов – титан, полученных ионно-ассистированием нанесением металлосодержащих покрытий.....	67
<b>Никитенок В. И., Ветохин С. С., Бахарь А. М., Терешко Е. В.</b> Методика расчета рабочих характеристик адаптивного обнаружителя слабых оптических сигналов.....	71
<b>Дмитриченко А. С., Здитовецкая С. В., Яновский С. Ю., Керимов К. Д.</b> Исследование термонапряженного состояния светопрозрачной конструкции при огневом воздействии.....	76
<b>ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ.....</b>	<b>82</b>
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ.....</b>	<b>82</b>
<b>Гринюк Д. А., Сухорукова И. Г., Олиферович Н. М., Оробей И. О.</b> Анализ эффективности ПИД-регуляторов с двумя степенями свободы с помощью интегральных критериев.....	82
<b>Олиферович Н. М., Гринюк Д. А., Оробей И. О., Сухорукова И. Г.</b> Deadbeat регулятор с прогнозируемым уровнем сигнала управления.....	89
<b>Бурмакова А. В., Ибрагим Ж. М., Смелов В. В.</b> Применение экспертных оценок в комплексной математической модели прогнозирования последствий аварийного пролива нефтепродуктов.....	96

---

<b>Колесников В. Л., Бракович А. И.</b> Вероятностные модели с подвижными асимптотами для оптимизации систем с последовательно-параллельным соединением элементов .....	101
<b>СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ОБУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ</b> .....	<b>107</b>
<b>Жук Я. А., Гурин Н. И.</b> Реализация диалога с компьютерной обучающей системой на языке JavaScript с помощью веб-сервисов.....	107
<b>Бич Н. Н., Ассанович Б. А.</b> Реализация распознавания и оценки параметров биомедицинских изображений клеточного уровня .....	113
<b>АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ</b> .....	<b>119</b>
<b>Герман Ю. О., Герман О. В.</b> О несоответствии между распознаванием языка за полиномиальное время и тотальной полиномиальностью распознавателя .....	119

# CONTENTS

.....

<b>PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES.....</b>	<b>5</b>
<b>MATHEMATICS.....</b>	<b>5</b>
<b>Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N.</b> The problems of control and stabilization for hybrid dynamic systems.....	5
<b>Ponomareva S. V., Pyzhkova O. N., Yarotskaya L. D.</b> To the question on the solvability of equations with power-logarithmic kernels on a multidimensional pyramidal domain.....	10
<b>Savva V. A.</b> Lasers, selective excitation of atoms and molecules and control of chemical reactions – femtochemistry.....	15
<b>Volk A. M., Wil’kotsky A. I., Skorb I. I.</b> Stationary movement of two immiscible viscous liquids in the rectangular channel.....	25
<b>Solovyeva I. F.</b> On the stability of one method of solving boundary tasks with the portrait.....	29
<b>Yakimenka A. A.</b> Stabilization for one neutral type system in general cyclic case.....	34
<b>Mozhey N. P.</b> Normal connections on non-symmetric homogeneous spaces.....	38
<b>MECHANICS.....</b>	<b>43</b>
<b>Bondarenko O. V., Stepanov D. N.</b> Influence of thermomechanical impact on optical fiber length in optical module tube.....	43
<b>PHYSICS.....</b>	<b>47</b>
<b>Narkevich I. I., Farafontova E. V., Zubrytski D. E.</b> Numerical-analytical calculation of microscopic distribution of colloid particle centers in a macroscopically homogeneous aqueous solution.....	47
<b>Mad’yarov V. R.</b> Electron transport parameters measurements in semiconductors using polarization plane rotation effect and magnetoplasma reflection.....	52
<b>Bobrovich O. G.</b> Composition of zirconium coating precipitated on silicon in the conditions of ionic assisting.....	57
<b>Bobrovich O. G., Barayshuk S. M., Turovets A. I., Yaskel’chik V. V.</b> Morphology and surface properties of alloy 5251, modified by deposition of molybdenum in conditions of ion assistance.....	62
<b>Tul’ev V. V.</b> Study of the surface of metal – titanium structures obtained by the ion-beam assisted deposition of metal-containing coating.....	67
<b>Nikitsionak V. I., Vetokhin S. S., Bakhar A. M., Tereshko E. V.</b> The method of calculation of the working characteristics of a weak optical signals adaptive detector.....	71
<b>Dmitrichenko A. S., Zditovetskaya S. V., Yanovskiy S. Yu., Kerimov K. D.</b> Study of the thermal stress state of glazing assembly induced by fire.....	76
<b>COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING SCIENCES.....</b>	<b>82</b>
<b>MODELLING OF PROCESSES AND MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS.....</b>	<b>82</b>
<b>Hryniuk D. A., Suhorukova I. G., Oliferovich N. M., Orobei I. O.</b> Analysis of the efficiency of PID controller with two-degree-of-freedom structure with integrated criteria.....	82
<b>Oliferovich N. M., Hryniuk D. A., Orobei I. O., Suhorukova I. G.</b> Deadbeat controller with predictable level of control signal.....	89
<b>Burmakova A. V., Ibrahim J. M., Smelov V. V.</b> Application of expert assessments in integrated mathematical model for predicting the consequences of the emergency explosion of oil products.....	96
<b>Kolesnikov V. L., Brakovich A. I.</b> Probabilistic models with mobile asymptotes for optimization of systems with series-parallel systems connection of the elements.....	101

**SYSTEMS ANALYSIS AND TRAINING SYSTEMS ..... 107**

**Zhuk Ya. A., Gurin N. I.** Implementation of dialogue with the computer training system in JavaScript using web-services..... 107

**Bich N. N., Assanovich B. A.** Implementation of recognition and estimation of parameters biomedical images the cellular level..... 113

**ALGORITHMIC AND PROGRAMMING ..... 119**

**German Yu. O., German O. V.** About discrepancy between polynomial time language recognition algorithm and total polynomiality of the recognizer..... 119



Редактор *Т. Е. Самсанович*  
Компьютерная верстка *О. Ю. Шантарович, О. А. Солодкевич, Е. В. Ильченко*  
Корректор *Т. Е. Самсанович*

Подписано в печать 14.09.2018. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.  
Усл. печ. л. 14,8. Уч.-изд. л. 15,8.  
Тираж 100 экз. Заказ 401.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
УО «Белорусский государственный технологический университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/227 от 20.03.2014.  
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.