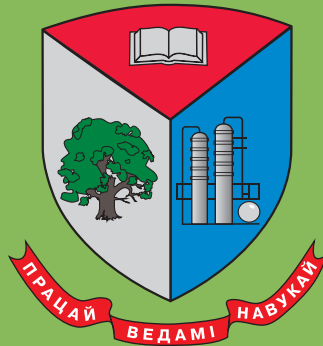


ISSN 2520-6141



# ТРУДЫ БГТУ

Научный журнал

---

Серия 3

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
НАУКИ И ИНФОРМАТИКА**

**№ 1 (206) 2018 год**

---

**Рубрики номера:**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Математика

Механика

Физика

ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Моделирование процессов  
и управление в технических системах

Обработка и передача информации

Системный анализ и обучающие системы

Алгоритмизация и программирование

Минск 2018

Учреждение образования  
«Белорусский государственный  
технологический университет»

# ТРУДЫ БГТУ

**Научный журнал**

*Издается с июля 1993 года*

**Серия 3**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
НАУКИ И ИНФОРМАТИКА**

**№ 1 (206) 2018 год**

*Выходит два раза в год*

Минск 2018

**Учредитель** – учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет»

**Главный редактор журнала** – Войтов Игорь Витальевич, доктор технических наук, доцент, Республика Беларусь

**Редакционная коллегия журнала:**

Дормешкин О. Б., доктор технических наук, профессор (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;  
Жарский И. М., кандидат химических наук, профессор (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;  
Кунтыш В. Б., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Прокопчук Н. Р., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор химических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Водопьянов П. А., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор философских наук, профессор, Республика Беларусь;  
Новикова И. В., доктор экономических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Торчик В. И., доктор биологических наук, Республика Беларусь;  
Долгова Т. А., кандидат физико-математических наук, доцент, Республика Беларусь;  
Захарук Т., доктор педагогических наук, профессор, Республика Польша;  
Пайвинен Ристо, доктор наук, профессор, Финляндская Республика;  
Барчик Стэфан, доктор наук, профессор, Словацкая Республика;  
Жантасов К. Т., доктор технических наук, профессор, Республика Казахстан;  
Харша Ратнавира, доктор наук, профессор, Королевство Норвегия;  
Рангелова Е. М., доктор педагогических наук, профессор, Республика Болгария;  
Шкляр Бенцион, профессор, Государство Израиль;  
Хассель Л. Г., доктор наук, профессор, Королевство Швеция;  
Файгле В., доктор наук, профессор, Федеративная Республика Германия;  
Флорик Е. А., кандидат биологических наук, доцент (секретарь), Республика Беларусь.

**Редакционная коллегия серии:**

Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор (главный редактор серии), Республика Беларусь;  
Урбанович П. П., доктор технических наук, профессор (заместитель главного редактора серии), Республика Беларусь;  
Вихренко В. С., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Колесников В. Л., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Калинин А. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Квасов Н. Т., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Леваков А. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Мазаник С. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Минченко Л. И., доктор физико-математических наук, Республика Беларусь;  
Сайко А. П., доктор физико-математических наук, Республика Беларусь;  
Головкин М. Ф., член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, Украина;  
Щекин А. К., член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, Российская Федерация;  
Аргиракис Панос, доктор наук, профессор, Греческая Республика;  
Бартошевич Збигнев, доктор габилитованный, Республика Польша;  
Горецкий Иржи, доктор габилитованный, Республика Польша;  
Орлюкас Антанас Феликсас, доктор наук, Литовская Республика;  
Шкляр Бенцион, профессор, Государство Израиль;  
Соловьева И. Ф., кандидат физико-математических наук, доцент (ответственный секретарь), Республика Беларусь;  
Кобайло А. С., кандидат технических наук, доцент (секретарь), Республика Беларусь.

**Адрес редакции:** ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.

Телефоны: главного редактора журнала – (+375 17) 226-14-32;

главного редактора серии – (+375 17) 399-49-60.

E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

Свидетельство о государственной регистрации средств массовой информации

№ 1329 от 23.04.2010, выданное Министерством информации Республики Беларусь.

Журнал включен в «Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований»

Educational institution  
“Belarusian State Technological University”

# PROCEEDINGS OF BSTU

**Scientific Journal**

*Published monthly since July 1993*

**Issue 3**

**PHYSICS  
AND MATHEMATICS.  
INFORMATICS**

**No. 1 (206) 2018**

*Published biannually*

Minsk 2018

**Publisher** – educational institution “Belarusian State Technological University”

**Editor-in-chief** – Voitau Ihar Vital’evich, DSc (Engineering), Associate Professor, Republic of Belarus

**Editorial (Journal):**

Dormeshkin O. B., DSc (Engineering), Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;  
Zharskiy I. M., PhD (Chemistry), Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;  
Kuntyshev V. B., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;  
Prokopchuk N. R., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Chemistry), Professor, Republic of Belarus;  
Vodop’yanov P. A., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Philosophy), Professor, Republic of Belarus;  
Novikova I. V., DSc (Economics), Professor, Republic of Belarus;  
Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Torchik V. I., DSc (Biology), Republic of Belarus;  
Dolgova T. A., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Republic of Belarus;  
Zakharuk T., DSc (Pedagogics), Professor, Republic of Poland;  
Paivinen Risto, DSc, Professor, Republic of Finland;  
Barcik Štefan, DSc, Professor, Slovak Republic;  
Zhantasov K. T., DSc (Engineering), Professor, Republic of Kazakhstan;  
Harsha Ratnaweera, DSc, Professor, Kingdom of Norway;  
Rangelova E. M., DSc (Pedagogics), Professor, Republic of Bulgaria;  
Shklyar Benzion, Professor, State of Israel;  
Hassel L. G., DSc, Professor, Kingdom of Sweden;  
Faigle W., DSc, Professor, Federal Republic of Germany;  
Flyurik E. A., PhD (Biology), Associate Professor (secretary), Republic of Belarus.

**Editorial (Issue):**

Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor (managing editor), Republic of Belarus;  
Urbanovich P. P., DSc (Engineering), Professor, (sub-editor), Republic of Belarus;  
Vikhrenko V. S., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Kolesnikov V. L., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;  
Kalinin A. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Kvasov N. T., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Levakov A. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Mazanik S. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Minchenko L. I., DSc (Physics and Mathematics), Republic of Belarus;  
Sayko A. P., DSc (Physics and Mathematics), Republic of Belarus;  
Golovko M. F., Corresponding Member, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Ukraine;  
Shchekin A. K., Corresponding Member, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Russian Federation;  
Argyarakis Panos, DSc, Professor, Republic of Greece;  
Bartosevich Zbigniew, DSc, Republic of Poland;  
Gorezki Irshi, DSc, Republic of Poland;  
Orlukas Antanas Feliksas, DSc, Republic of Lithuania;  
Shklyar Benzion, Professor, State of Israel;  
Solov’eva I. F., PhD (Physics and Mathematics) (executive editor), Republic of Belarus;  
Kobaylo A. S., PhD (Engineering) (secretary), Republic of Belarus.

**Contact:** 13a, Sverdlova str., 220006, Minsk.  
Telephones: editor-in-chief (+375 17) 226-14-32;  
managing editor (+375 17) 399-49-60.  
E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

УДК 517.977

**А. А. Якименко**

Белорусский государственный технологический университет

### МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В ОБЩЕЦИКЛИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ПРИ КРАТНЫХ КОРНЯХ

В статье рассматривается решение задачи модального управления в общециклическом случае при кратных корнях уравнения, служащего для нахождения регулятора, для двумерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию. Дается определение задачи модального управления для исследуемой системы. При решении задачи модального управления используются линейные регуляторы по типу обратной связи, содержащие как линейную, так и интегральную части. Регуляторы получены в явной форме как элементарные функции параметров исходной системы и ее вектора состояния.

**Ключевые слова:** системы нейтрального типа, модальное управление, регуляторы, обратная связь, запаздывание.

**A. A. Yakimenka**

Belarusian State Technological University

### MODAL CONTROL FOR ONE NEUTRAL TYPE SYSTEM IN GENERAL CYCLIC CASE WITH DOUBLE ROOTS

The paper deals with the modal control problem for the stationary two-dimensional dynamical system with retarded argument of neutral type with one input and one state delay in general cyclic case with double roots of equation for founding regulators. The definition of a modal control problem for the system is given. For the solution for such a problem we use linear regulators of feedback type, comprising both linear and integral part. The regulators are obtained in an explicit form as a basic function of the initial parameters of the system and its state vector.

**Key words:** neutral type systems, modal control, regulators, feedback control, lag.

**Введение.** Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа [1–7] решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. В статье [7] изучен случай, когда уравнение, служащее для нахождения регуляторов, имеет различные корни. В этой статье рассматривается случай кратного корня такого уравнения.

**Основная часть.** Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \\ & + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A_i, i = 0, 1, 2$  – постоянные  $2 \times 2$ -матрицы;  $h > 0$  – постоянное запаздывание;  $b$  – ненулевой 2-вектор. Не ограничивая общности, считаем  $b' = [0, 1]$  («'» означает транспонирование).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$\begin{aligned} u(t) = & q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^L \sum_{j=1}^M q'_{ij} x^{(i)}(t-jh) + \\ & + \int_{-h}^0 g'(s) x(t+s) ds, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $q_{00}$ ,  $q_{ij}$  – 2-векторы;  $g(s)$ ,  $s \in [-h, 0]$  – непрерывная 2-вектор-функция;

$$x^{(i)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^i}{dt^i} x(t), \quad x^{(0)}(t) \equiv x(t).$$

Характеристическое уравнение системы (1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \det \left[ A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_2 \right] &\equiv \\ &\equiv \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \tilde{\alpha}_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где числа  $\tilde{\alpha}_{ij}$  вычисляются как функции матриц  $A_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , в частности  $\tilde{\alpha}_{00} = \det A_0$ ,  $\tilde{\alpha}_{20} = 1$ ,  $\tilde{\alpha}_{22} = \det A_2$ .

**Определение.** Система (1) модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперед заданных чисел  $\alpha_{ij}$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $j = 0, 1, 2$ ,  $\alpha_{20} = 1$ , найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет вид (ср. с (3)):

$$\begin{aligned} \det \left[ A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_2 + bU(\lambda) \right] &\equiv \\ &\equiv \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \alpha_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \end{aligned}$$

где  $U(\lambda)$  – регулятор (2) в частотной области. Введем  $(2 \times 2)$ -матрицы:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h}, \\ W(\lambda) &= [A(\lambda)b, \quad b], \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Рассмотрим обещициклический случай:

$$\det W(\lambda) = c(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}), \quad (c \neq 0).$$

Матрица  $A(\lambda)$  в этом случае имеет следующий вид:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} & c(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}) \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где  $\beta_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $\gamma_0$  – некоторые действительные числа;  $a_j(\lambda)$ ,  $j = 1, 2$  – квазиполиномы:

$$a_i(\lambda) = a_{i0} + a_{i1} e^{-\lambda h} + a_{i2} \lambda e^{-\lambda h},$$

где  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ;  $i = 1, 2$ ,  $j = 0, 1, 2$ .

Регулятор вида (2) в частотной области будем искать в виде

$$U(\lambda) = \left( \frac{1}{c} \eta_1(\lambda) - a_1(\lambda), \quad \eta_2(\lambda) - a_2(\lambda) \right).$$

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \lambda^2 + (\gamma_1 - \beta_0)\lambda + \beta_1\gamma_0 - \beta_0\gamma_1 &\equiv \\ &\equiv (\lambda - \xi_1)(\lambda - \xi_2) = 0, \quad \lambda, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть выполнено условие:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Рассмотрим величину

$$\delta(\xi) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\xi h} - \xi.$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** Для того чтобы система (1) была модально управляема регулятором вида (2) в случае (5), необходимо и достаточно выполнения условия

$$\delta(\xi) \neq 0.$$

При этом компоненты регулятора вида (2) в частотной области имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \eta_1(\lambda) &= -\alpha_{22}\lambda e^{-\lambda h} + (\alpha_{22}\beta_0 - \alpha_{21}\beta_1 - \alpha_{12} - \\ &- 2\alpha_{22}\xi)e^{-\lambda h} - \frac{1}{\delta^2(\xi)} (\beta_0^2\beta_1 + \beta_1^3 e^{-2\xi h} + \alpha_{00}\beta_1 - \\ &- \alpha_{12}\beta_0\beta_1 e^{-2\xi h} - 2\alpha_{22}\beta_0\beta_1 \xi e^{-2\xi h} - \\ &- 2\alpha_{02}\beta_0\xi h e^{-\xi h} - 2\alpha_{12}\beta_0\xi^2 h e^{-\xi h} - 2\alpha_{22}\beta_0\xi^3 h e^{-\xi h} + \\ &+ \alpha_{01}\beta_1 \xi h e^{-\xi h} + 2\alpha_{21}\beta_0\beta_1 \xi e^{-\xi h} + 2\beta_0\beta_1^2 e^{-\xi h} - \\ &- 2\alpha_{22}\xi^3 e^{-\xi h} + \alpha_{21}\beta_1 \xi^3 h e^{-\xi h} + \alpha_{10}\beta_1^2 \xi h e^{-\xi h} - \\ &- \alpha_{01}\beta_0\beta_1 h e^{-\xi h} + \alpha_{11}\beta_1 \xi^2 h e^{-\xi h} - \alpha_{21}\beta_0\beta_1 \xi^2 h e^{-\xi h} - \\ &- \alpha_{11}\beta_0\beta_1 \xi h e^{-\xi h} + \alpha_{12}\beta_0^2 \xi h e^{-\xi h} + \alpha_{22}\beta_0^2 \xi^2 h e^{-\xi h} - \\ &- \alpha_{21}\beta_1 \xi^2 e^{-\xi h} + \beta_1^2 \xi^2 h e^{-\xi h} + \alpha_{00}\beta_1^2 h e^{-\xi h} + \\ &+ \alpha_{11}\beta_0\beta_1 e^{-\xi h} + \alpha_{02}\beta_0^2 h e^{-\xi h} + \alpha_{12}\xi^3 h e^{-\xi h} + \alpha_{10}\beta_1^2 e^{-\xi h} + \\ &+ \alpha_{22}\xi^4 h e^{-\xi h} + \alpha_{02}\xi^2 h e^{-\xi h} + 3\alpha_{22}\beta_1 \xi^2 e^{-2\xi h} + \\ &+ 2\alpha_{21}\beta_1^2 \xi e^{-2\xi h} + 2\alpha_{12}\beta_1 \xi e^{-2\xi h} + 2\alpha_{12}\beta_0 \xi e^{-\xi h} + \\ &+ 4\alpha_{22}\beta_0 \xi^2 e^{-\xi h} - 2\alpha_{22}\beta_0^2 \xi e^{-\xi h} + \alpha_{10}\beta_0\beta_1 - \\ &- \alpha_{12}\xi^2 e^{-\xi h} - \alpha_{12}\beta_0^2 e^{-\xi h} + \alpha_{11}\beta_1^2 e^{-2\xi h} + \alpha_{02}\beta_1 e^{-2\xi h}) - \\ &- (-\alpha_{02}\xi^2 - \alpha_{02}\beta_0^2 + \alpha_{00}\beta_1^2 + \alpha_{12}\beta_0^3 - \beta_1^2 \xi^2 - \\ &- 3\alpha_{22}\xi^4 - 4\alpha_{12}\beta_0\beta_1 \xi e^{-\xi h} + 2\alpha_{22}\beta_0^2 \beta_1 \xi e^{-\xi h} - \\ &- 2\alpha_{12}\xi^3 - 2\alpha_{21}\beta_0\beta_1^2 \xi e^{-\xi h} - 2\alpha_{22}\beta_0\beta_1 \xi^3 h e^{-\xi h} - \\ &- \alpha_{11}\beta_0\beta_1 \xi h e^{-\xi h} - \alpha_{01}\beta_0\beta_1^2 h e^{-\xi h} - 2\alpha_{12}\beta_0\beta_1 \xi^2 h e^{-\xi h} - \\ &- 2\alpha_{02}\beta_0\beta_1 \xi h e^{-\xi h} + 8\alpha_{22}\beta_0 \xi^3 - 7\alpha_{22}\beta_0^2 \xi^2 + \\ &+ \alpha_{10}\beta_0\beta_1^2 + 5\alpha_{12}\beta_0 \xi^2 - 2\alpha_{21}\beta_1 \xi^3 - 4\alpha_{12}\beta_0^2 \xi + \\ &+ 2\alpha_{02}\beta_0 \xi + 4\alpha_{21}\beta_0\beta_1 \xi^2 - 6\alpha_{22}\beta_0\beta_1 \xi^2 e^{-\xi h} + \\ &+ 2\alpha_{22}\beta_0^3 \xi + 2\beta_0\beta_1^2 \xi + 2\beta_1^3 \xi e^{-\xi h} + \alpha_{22}\beta_0^2 \beta_1 \xi^2 h e^{-\xi h} + \\ &+ \alpha_{12}\beta_0^2 \beta_1 \xi h e^{-\xi h} - \alpha_{21}\beta_0\beta_1^2 \xi^2 h e^{-\xi h} + \alpha_{01}\beta_1^2 \xi h e^{-\xi h} + \\ &+ \alpha_{11}\beta_1^2 \xi^2 h e^{-\xi h} + \alpha_{12}\beta_1 \xi^3 h e^{-\xi h} + \alpha_{10}\beta_1^3 \xi h e^{-\xi h} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \alpha_{21}\beta_1^2\xi^3 he^{-\xi h} + \alpha_{02}\beta_0^2\beta_1 he^{-\xi h} + \alpha_{22}\beta_1\xi^4 he^{-\xi h} - \\
 & - \alpha_{11}\beta_1\xi^2 + \alpha_{10}\beta_1^3 e^{-\xi h} + \alpha_{01}\beta_1^2 e^{-\xi h} - \alpha_{11}\beta_0^2\beta_1 - \\
 & - \alpha_{11}\beta_0\beta_1^2 e^{-\xi h} + \alpha_{12}\beta_0^2\beta_1 e^{-\xi h} + \alpha_{00}\beta_1^3 he^{-\xi h} + \beta_1^3\xi^2 he^{-\xi h} + \\
 & + \alpha_{02}\beta_1\xi^2 he^{-\xi h} + 2\alpha_{11}\beta_0\beta_1\xi + 4\alpha_{22}\beta_1\xi^3 e^{-\xi h} + \\
 & + 3\alpha_{12}\beta_1\xi^2 e^{-\xi h} + 2\alpha_{02}\beta_1\xi e^{-\xi h} + 3\alpha_{21}\beta_1^2\xi^2 e^{-\xi h} + \\
 & + 2\alpha_{11}\beta_1^2\xi e^{-\xi h} - 2\alpha_{02}\beta_0\beta_1 e^{-\xi h} - 2\alpha_{21}\beta_0^2\beta_1\xi) \times \\
 & \times \frac{1}{\delta^2(\xi)} \frac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{\lambda - \xi} + (-\alpha_{22}\xi^4 - \alpha_{01}\beta_1\xi - \alpha_{11}\beta_1\xi^2 - \\
 & - \alpha_{12}\xi^3 + \alpha_{01}\beta_0\beta_1 - \alpha_{10}\beta_1^2\xi - \alpha_{21}\beta_1\xi^3 - \alpha_{02}\beta_0^2 - \alpha_{02}\xi^2 + \\
 & + \alpha_{21}\beta_0\beta_1\xi^2 + 2\alpha_{22}\beta_0\xi^3 - \alpha_{22}\beta_0^2\xi^2 + 2\alpha_{12}\beta_0\xi^2 - \alpha_{12}\beta_0^2\xi + \\
 & + 2\alpha_{02}\beta_0\xi + \alpha_{11}\beta_0\beta_1\xi - \alpha_{00}\beta_1^2 - \beta_1^2\xi^2) \times \\
 & \times \frac{1}{\delta(\xi)} \left( \frac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi)^2} - \frac{he^{-\xi h}}{(\lambda - \xi)} \right). \\
 \eta_2(\lambda) = & -\beta_0 - \alpha_{10} - \alpha_{21}\lambda e^{-\lambda h} + \\
 & + \frac{1}{\delta^2(\xi)\beta_1} (\alpha_{00}\beta_1^2 - \beta_1^2\xi^2 + \alpha_{22}\xi^4 + \alpha_{22}\beta_0^4 + \\
 & + 2\alpha_{12}\beta_0\beta_1\xi e^{-\xi h} + \alpha_{02}\beta_1^2 e^{-2\xi h} - \alpha_{21}\beta_0^3\beta_1 - \\
 & - 8\alpha_{22}\beta_0^2\beta_1\xi e^{-\xi h} + 4\alpha_{21}\beta_0\beta_1^2\xi e^{-\xi h} - \\
 & - 2\alpha_{22}\beta_0\beta_1\xi^3 he^{-\xi h} - 2\alpha_{12}\beta_0\beta_1\xi^2 he^{-\xi h} - \\
 & - 2\alpha_{02}\beta_0\beta_1\xi he^{-\xi h} - 4\alpha_{22}\beta_0\xi^3 + 6\alpha_{22}\beta_0^2\xi^2 - \\
 & - \alpha_{21}\beta_0\beta_1\xi^2 + \alpha_{11}\beta_1^2\xi^2 he^{-\xi h} + \alpha_{22}\beta_1\xi^4 he^{-\xi h} + \\
 & + 2\alpha_{11}\beta_0\beta_1\xi + 10\alpha_{22}\beta_0\beta_1\xi^2 e^{-\xi h} - 4\alpha_{22}\beta_0^3\xi + \\
 & + 2\beta_0\beta_1^2\xi + 2\beta_1^3\xi e^{-\xi h} + \alpha_{22}\beta_0^2\beta_1\xi^2 he^{-\xi h} + \\
 & + \alpha_{12}\beta_0^2\beta_1\xi he^{-\xi h} - \alpha_{11}\beta_0\beta_1^2\xi he^{-\xi h} - \\
 & - \alpha_{21}\beta_0\beta_1^2\xi^2 he^{-\xi h} + \alpha_{01}\beta_1^2\xi he^{-\xi h} + \alpha_{12}\beta_1\xi^3 he^{-\xi h} - \\
 & - \alpha_{01}\beta_0\beta_1^2 he^{-\xi h} + \alpha_{10}\beta_1^3\xi he^{-\xi h} + \alpha_{21}\beta_1^2\xi^3 he^{-\xi h} + \\
 & + \alpha_{02}\beta_0^2\beta_1 he^{-\xi h} - \alpha_{11}\beta_1\xi^2 + \alpha_{10}\beta_1^3 e^{-\xi h} + \alpha_{10}\beta_0\beta_1^2 + \\
 & + \alpha_{01}\beta_1^2 e^{-\xi h} - \alpha_{11}\beta_0^2\beta_1 - \alpha_{11}\beta_0\beta_1^2 e^{-\xi h} - \alpha_{12}\beta_0^2\beta_1 e^{-\xi h} + \\
 & + \alpha_{00}\beta_1^3 he^{-\xi h} + \beta_1^3\xi^2 he^{-\xi h} + \alpha_{02}\beta_1\xi^2 he^{-\xi h} - \\
 & - 4\alpha_{22}\beta_1\xi^3 e^{-\xi h} - \alpha_{12}\beta_1\xi^2 e^{-\xi h} - \alpha_{21}\beta_1^2\xi^2 e^{-\xi h} + \\
 & + 2\alpha_{11}\beta_1^2\xi e^{-\xi h} + 2\alpha_{21}\beta_0^2\beta_1\xi - \alpha_{12}\beta_0\beta_1^2 e^{-2\xi h} - \\
 & - \alpha_{21}\beta_0\beta_1^3 e^{-2\xi h} + \alpha_{22}\beta_0^2\beta_1^2 e^{-2\xi h} + 2\alpha_{22}\beta_0^3\beta_1 e^{-\xi h} + \\
 & + 2\alpha_{12}\beta_1^2\xi e^{-2\xi h} + 2\alpha_{21}\beta_1^3\xi e^{-2\xi h} + 4\alpha_{22}\beta_1^2\xi^2 e^{-2\xi h} - \\
 & - 2\alpha_{21}\beta_0^2\beta_1^2 e^{-\xi h} - 4\alpha_{22}\beta_0\beta_1^2\xi e^{-2\xi h}) e^{-\lambda h} + \\
 & + (-\alpha_{12}\xi^4 - \alpha_{12}\beta_0^4 + \beta_1^3\xi^2 e^{-\xi h} - \alpha_{21}\beta_1\xi^4 + \alpha_{01}\beta_1\xi^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \alpha_{01}\beta_0^2\beta_1 + \alpha_{10}\beta_1^2\xi^2 - \alpha_{10}\beta_0^2\beta_1^2 + \alpha_{11}\beta_0^3\beta_1 - \\
 & - \alpha_{00}\beta_1^3 e^{-\xi h} + \alpha_{10}\beta_1^3\xi^2 he^{-\xi h} + \alpha_{12}\beta_1\xi^4 he^{-\xi h} + \\
 & + \alpha_{21}\beta_1^2\xi^4 he^{-\xi h} + \alpha_{21}\beta_0^2\beta_1^2\xi^2 he^{-\xi h} - \alpha_{22}\beta_0^3\beta_1\xi^2 he^{-\xi h} - \\
 & - \alpha_{12}\beta_0^3\beta_1\xi he^{-\xi h} + \alpha_{11}\beta_0^2\beta_1^2\xi he^{-\xi h} + \alpha_{11}\beta_0\beta_1\xi^2 + \\
 & + 2\alpha_{12}\beta_1\xi^3 e^{-\xi h} + \alpha_{02}\beta_1\xi^2 - \alpha_{00}\beta_0\beta_1^3 he^{-\xi h} + \\
 & + \alpha_{02}\beta_0^2\beta_1 e^{-\xi h} + \alpha_{11}\beta_0^2\beta_1^2 e^{-\xi h} + \alpha_{11}\beta_1^2\xi^2 e^{-\xi h} + \\
 & + \beta_1^3\xi^3 he^{-\xi h} - \alpha_{10}\beta_0\beta_1^3 e^{-\xi h} - \alpha_{12}\beta_0^3\beta_1 e^{-\xi h} + \\
 & + 4\alpha_{21}\beta_0\beta_1\xi^3 + 2\alpha_{21}\beta_1^2\xi^3 e^{-\xi h} - 2\alpha_{02}\beta_0\beta_1\xi e^{-\xi h} - \\
 & - 2\alpha_{01}\beta_0\beta_1\xi + 2\alpha_{21}\beta_0^3\beta_1\xi + 3\alpha_{22}\beta_1\xi^4 e^{-\xi h} - \\
 & - 5\alpha_{21}\beta_0^2\beta_1\xi^2 - 2\beta_0\beta_1^3\xi e^{-\xi h} - 2\alpha_{11}\beta_0^2\beta_1\xi + \\
 & + 7\alpha_{22}\beta_0^2\beta_1\xi^2 e^{-\xi h} - 4\alpha_{21}\beta_0\beta_1^2\xi^2 e^{-\xi h} - \\
 & - 5\alpha_{12}\beta_0\beta_1\xi^2 e^{-\xi h} - 2\alpha_{11}\beta_0\beta_1^2\xi e^{-\xi h} - \\
 & - 8\alpha_{22}\beta_0\beta_1\xi^3 e^{-\xi h} + 4\alpha_{12}\beta_0^2\beta_1\xi e^{-\xi h} - 2\alpha_{11}\beta_0\beta_1^2\xi^2 he^{-\xi h} - \\
 & - 2\alpha_{21}\beta_0\beta_1^2\xi^3 he^{-\xi h} + 3\alpha_{22}\beta_0^2\beta_1\xi^3 he^{-\xi h} + \\
 & + 3\alpha_{12}\beta_0^2\beta_1\xi^2 he^{-\xi h} + 3\alpha_{02}\beta_0^2\beta_1\xi he^{-\xi h} - \\
 & - 3\alpha_{22}\beta_0\beta_1\xi^4 he^{-\xi h} - 3\alpha_{12}\beta_0\beta_1\xi^3 he^{-\xi h} - \\
 & - 3\alpha_{02}\beta_0\beta_1\xi^2 he^{-\xi h} + 2\alpha_{21}\beta_0^2\beta_1\xi e^{-\xi h} - \\
 & - 2\alpha_{22}\beta_0^3\beta_1\xi e^{-\xi h} - 2\alpha_{01}\beta_0\beta_1^2\xi he^{-\xi h} - \\
 & - 2\alpha_{22}\xi^5 - \alpha_{10}\beta_0\beta_1^3\xi he^{-\xi h} - 2\beta_0^2\beta_1^2\xi + 2\beta_0\beta_1^2\xi^2 + \\
 & + 8\alpha_{22}\beta_0\xi^4 + \alpha_{00}\beta_1^3\xi he^{-\xi h} + \alpha_{01}\beta_1^2\xi^2 he^{-\xi h} - \\
 & - 12\alpha_{22}\beta_0^2\xi^3 + 4\alpha_{12}\beta_0\xi^3 - 6\alpha_{12}\beta_0^2\xi^2 + 4\alpha_{12}\beta_0^3\xi - \\
 & - 2\alpha_{00}\beta_0\beta_1^2 - 2\alpha_{22}\beta_0^4\xi + 8\alpha_{22}\beta_0^3\xi^2 + 2\alpha_{00}\beta_1^2\xi - \\
 & - \alpha_{02}\beta_0^3\beta_1 he^{-\xi h} - \beta_0\beta_1^3\xi^2 he^{-\xi h} + \alpha_{11}\beta_1^2\xi^3 he^{-\xi h} + \\
 & + \alpha_{22}\beta_1\xi^5 he^{-\xi h} + \alpha_{02}\beta_1\xi^3 he^{-\xi h} + \alpha_{01}\beta_0^2\beta_1^2 he^{-\xi h}) \times \\
 & \times \frac{1}{\delta^2(\xi)\beta_1} \frac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{\lambda - \xi} - (\beta_0 - \xi) \times \\
 & \times (\alpha_{22}\xi^4 + \alpha_{01}\beta_1\xi + \alpha_{11}\beta_1\xi^2 + \alpha_{12}\xi^3 - \alpha_{01}\beta_0\beta_1 + \\
 & + \alpha_{10}\beta_1^2\xi + \alpha_{21}\beta_1\xi^3 + \alpha_{02}\beta_0^2 + \alpha_{02}\xi^2 - \alpha_{21}\beta_0\beta_1\xi^2 - \\
 & - 2\alpha_{22}\beta_0\xi^3 + \alpha_{22}\beta_0^2\xi^2 - 2\alpha_{12}\beta_0\xi^2 + \alpha_{12}\beta_0^2\xi - \\
 & - 2\alpha_{02}\beta_0\xi - \alpha_{11}\beta_0\beta_1\xi^2 + \alpha_{00}\beta_1^2 + \beta_1^2\xi^2) \times \\
 & \times \frac{1}{\delta(\xi)\beta_1} \left( \frac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi)^2} - \frac{he^{-\xi h}}{(\lambda - \xi)} \right).
 \end{aligned}$$

**Замечание.** В полученных регуляторах требуется перейти из частотной во временную область. При этом необходимо следовать следующим правилам:



1. Слагаемые вида  $\alpha \lambda^i e^{-j\lambda h} x_k(\lambda)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  в частотной области соответствуют слагаемым  $\alpha \frac{d^i x_k(t-jh)}{dt^i}$  во временной области.

2. Слагаемые вида  $\alpha \frac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{\lambda - \xi} x_k(\lambda)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda, \xi \in \mathbb{C}$  в частотной области в силу теоремы о свертке соответствуют слагаемым вида

$$\alpha \int_{-h}^0 H(t+s)H(h+s)e^{-(h+s)\xi} x_k(t+s) ds.$$

3. Слагаемые вида  $\alpha \left( \frac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi)^2} - \frac{he^{-\xi h}}{(\lambda - \xi)} \right) x_k(\lambda)$ ,

$k = 1, 2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda, \xi \in \mathbb{C}$  в частотной области в силу теоремы о свертке соответствуют слагаемым вида

$$\alpha \int_{-h}^0 H(t+s)H(h+s)(-h-s)e^{-(h+s)\xi} x_k(t+s) ds.$$

**Заключение.** В работе [7] исследуется задача модального управления в общециклическом случае, когда для корней уравнения (4) выполнено условие  $\xi_1 \neq \xi_2$ . Условие  $\xi_1 = \xi_2$ , исследованное в данной работе, полностью закрывает общециклический случай.

### Литература

1. Марченко В. М. О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыванием // Доклады Академии наук БССР. 1978. № 5. С. 401–404.
2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. Pitman Press, 1984. 362 p.
3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1967. V. AC-12, no. 6. P. 660–665.
4. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems // Circuits Systems Signal Process. 1986. Vol. 5, no. 1. P. 69–84.
5. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.
6. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.
7. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 25–27.

### References

1. Marchenko V. M. On problem of modal control in linear systems with delay. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the BSSR Academy of Science], 1978, no. 5, pp. 401–404 (In Russian).
2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. Pitman Press, 1984. 362 p.
3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1967, V. AC-12, no. 6, pp. 660–665.
4. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems. *Circuits Systems Signal Process*, 1986, vol. 5, no. 1, pp. 69–84.
5. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 3–7 (In Russian).
6. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 18–21 (In Russian).
7. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 25–27 (In Russian).

### Информация об авторе

**Якименко Андрей Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

### Information about the author

**Yakimenka Andrei Aliksandravich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила 28.11.2017

УДК 517.982.45

**Т. Г. Шагова**

Белорусский государственный технологический университет

**ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ  
РАЦИОНАЛЬНЫХ МНЕМОФУНКЦИЙ**

В статье рассмотрена задача аппроксимации обобщенных функций семейством эквивалентных гладких рациональных функций, зависящих от малого параметра, так называемыми рациональными мнемодфункциями, которые образуют подалгебру в алгебре новых обобщенных функций. Рассмотрены разложения мнемодфункций в асимптотические ряды в пространстве обобщенных функций. Для рациональных мнемодфункций коэффициенты таких разложений имеют специальный вид. Исследована зависимость главных членов асимптотических разложений мнемодфункций от свойств порождающих их рациональных функций. Было показано, что рациональные мнемодфункции ассоциированы с дельта-функцией, ее производными, степенными функциями и только ними. Ввиду этого получено разбиение множества рациональных функций на классы эквивалентности в зависимости от того, с какой обобщенной функцией они ассоциированы.

**Ключевые слова:** аппроксимация, мнемодфункция, рациональная мнемодфункция, асимптотическое разложение.

**T. R. Shahava**

Belarusian State Technological University

**ON THE ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF RATIONAL MNEMOFUNCTIONS**

The problem of generalized functions approximation by the family of equivalent smooth rational functions depended on small parameter is considered in the article. Such families are called rational mnemofunctions. Asymptotic expansions of rational mnemofunctions in the space of generalized functions are considered and it is noted that the coefficients of such expansions have a special type. The relations between the main terms of mnemofunctions asymptotic expansions and the properties of rational functions, which generate mnemofunctions, are investigated. It was shown that the rational mnemofunctions could be associated only with Dirac  $\delta$ -function, its derivatives, and power functions. That is why the set of rational functions is divided into classes of equivalence depending on what generalized function they associated with.

**Key words:** approximation, mnemofunction, rational mnemofunction, asymptotic expansion.

**Введение.** Основным препятствием к применению теории обобщенных функций к решению нелинейных уравнений и уравнений с обобщенными коэффициентами является невозможность определения корректной операции произведения обобщенных функций. Для преодоления этого препятствия начали развиваться различные подходы, один из которых основан на рассмотрении новых объектов, которые обладают основными свойствами обобщенных функций и в то же время допускают корректно определенную операцию умножения [1]. Такие объекты называют новыми обобщенными функциями, или мнемодфункциями. По своей конструкции мнемодфункции представляют собой семейство эквивалентных гладких функций  $f_\varepsilon(x)$ , зависящих от малого параметра  $\varepsilon$ . Если такое семейство имеет предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в пространстве обобщенных функций, то говорят, что мнемодфункция и классическая обобщенная функция ассоциированы. Более детально связь с классическими обобщенными функциями устанавливается с помощью ее представления в виде ряда

$$f_\varepsilon \sim \sum_{k=-m}^{+\infty} \varepsilon^k u_k, \quad u_k \in D'(\mathbf{R}),$$

который сходится асимптотически. Технически этот ряд получается при разложении интеграла, зависящего от малого параметра, в асимптотический ряд [2]. Первые примеры асимптотических разложений мнемодфункций были получены А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским еще до развития теории новых обобщенных функций [3].

С точки зрения асимптотических разложений произведением обычных обобщенных функций можно считать асимптотическое разложение произведения ассоциированных мнемодфункций [4]. Так как с заданной обобщенной функцией всегда ассоциировано обширное семейство мнемодфункций, то выбор мнемодфункции, ассоциированной с обобщенной функцией, есть внесение дополнительной информации, позволяющей корректно определять произведение.

Особый интерес вызывают мнемодфункции, порожденные рациональными функциями, т. е.

мнемофункции вида  $f_\varepsilon(x) = \frac{P(x/\varepsilon)}{Q(x/\varepsilon)}$ , где  $P(x)$  и

$Q(x)$  – полиномы и  $Q(x) \neq 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , которые будем в дальнейшем называть рациональными. Такие мнемофункции наиболее естественно возникают в ряде конкретных задач квантовой механики и квантовой теории поля.

В данной работе рассматриваются главные члены асимптотических разложений рациональных мнемофункций.

**Основная часть. Обобщенные функции, ассоциированные с рациональными мнемофункциями.** Рациональные мнемофункции представляют собой особый класс новых обобщенных функций, так как они образуют подалгебру в алгебре обобщенных функций, и их асимптотические разложения имеют специальный вид, а именно: коэффициентами разложений являются  $\delta$ -функция и ее производные, а также степенные функции. Возникает вопрос, от каких свойств порождающей рациональной функции зависит вид главного члена разложения в асимптотический ряд?

Любую рациональную функцию можно представить в виде  $f(x) = R(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$ , где

$R(x)$ ,  $P(x)$ ,  $Q(x)$  есть многочлены, причем  $\deg P(x) < \deg Q(x)$ . Для многочлена  $R(x)$  справедливо асимптотическое разложение

$$R_\varepsilon(x) = R\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \sim b_n \frac{x^n}{\varepsilon^n} + \dots + b_1 \frac{x}{\varepsilon} + b_0,$$

где  $n$  – степень  $R(x)$ .

Поэтому ограничимся рассмотрением правильных рациональных дробей  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ .

При  $x \rightarrow \infty$   $f(x)$  обладает асимптотическим разложением  $f(x) \sim \sum_{n=m}^{\infty} a_n x^{-n}$ ,  $m \geq 1$ . Обозначим

через  $M_k$  моменты функции  $f$ ,  $M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$ .

**Теорема 1.** Если функция  $f$  интегрируема, т. е.  $m > 1$ , и момент функции  $f$  отличен от нуля, т. е.  $M_0 \neq 0$ , то первым членом асимптотического разложения мнемофункции  $f_\varepsilon$  будет  $M_0 \varepsilon \delta$ .

**Следствие.** Для любой рациональной функции  $f$ , такой что  $M_0 = 1$ , мнемофункция вида

$\frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  ассоциирована с  $\delta$ -функцией.

Из теории обобщенных функций известно, что функции  $1/x$  соответствуют обобщенные функции вида  $P(1/x) + c\delta$ , где

$$\langle P(1/x), \varphi \rangle = \text{v. p.} \int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

константа  $c$  зависит от способа регуляризации [5].

В случае когда  $f(x)$  является рациональной мнемофункцией, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Если  $m = 1$ , то

$$f_\varepsilon(x) \sim \varepsilon a_1 P(1/x) + \varepsilon c \delta + \dots,$$

где коэффициент  $a_1$  равен отношению старших коэффициентов многочленов  $P(x)$  и  $Q(x)$ , а константа  $c$  определяется следующим образом:

$$c = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) + f(-x)}{2} dx.$$

**Следствие 1.** Если  $f(x)$  нечетная рациональная функция и  $a_1 \neq 0$ , то первый член разложения будет  $a_1 P(1/x) \varepsilon$ .

**Следствие 2.** Для любой нечетной рациональной функции  $f$ , такой что  $m = 1$ , мнемофункция  $\frac{1}{\varepsilon a_1} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  ассоциирована с  $P(1/x)$ .

Если  $f(x)$  является быстроубывающей, т. е. убывает при  $x \rightarrow \infty$  как  $\frac{1}{x^{n+1}}$ , то

$$f_\varepsilon(x) \sim M_0 \delta \varepsilon - M_1 \delta' \varepsilon^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1} M_{n-1} \delta^{(n-1)}}{(n-1)!} \varepsilon^n + (-1)^n \frac{\tilde{M}_n \delta^{(n)}}{n!} \varepsilon^{n+1} + a_{n+1} P\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \varepsilon^{n+1} + \dots,$$

где  $\tilde{M}_n$  – регуляризованный момент.

Соответственно, если  $M_0 = 0$ ,  $M_1 \neq 0$ , то, нормировав, получим мнемофункцию, ассоциированную с первой производной дельта-функции, т. е.  $-\frac{1}{M_1 \varepsilon^2} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ . Таким образом

можно получить мнемофункции, ассоциированные с  $\delta^{(n)}$ , а именно  $\frac{(-1)^n}{M_n \varepsilon^{n+1}} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ , где  $f(x)$

убывает быстрее  $\frac{1}{x^{n+1}}$  и  $M_n$  – первый отличный от нуля момент функции  $f$ .

Если  $f$  убывает как  $\frac{1}{x^n}$  и  $M_i = 0$ ,  $i = \overline{1, n-2}$ ,

то главным членом разложения мнемофункции  $f_\varepsilon$  будет обобщенная функция  $P(1/x^n)$ .

Следует также отметить, что если функция  $f(x)$  является четной, то асимптотическое разложение будет содержать только коэффи-

циенты вида  $\delta^{(2k)}$  и  $P\left(\frac{1}{x^{2k}}\right)$ . В случае когда

$f(x)$  нечетная, то  $\delta^{(2k+1)}$  и  $P\left(\frac{1}{x^{2k+1}}\right)$ . Так как лю-

бую функцию  $f$  можно представить в виде суммы четной  $g$  и нечетной  $h$ , то для определения главного члена асимптотического разложения мнемofункции, порожденной  $f$ , достаточно определить главные члены разложений мнемofункций, порожденных функциями  $g$  и  $h$ .

Исходя из вышесказанного, получаем, что множество рациональных функций разбивается на классы эквивалентности. В класс эквивалентности попадают такие функции, что поро-

жденные ими мнемofункции ассоциированы с  $\delta$ -функцией, ее производными или со степенными функциями.

**Заключение.** В ходе работы была исследована зависимость главного члена асимптотического разложения от свойств порождающей рациональной функции. Были сформулированы условия ассоциированности рациональных мнемofункций с основными обобщенными функциями. Получено, что множество рациональных функций разбивается на классы эквивалентности в зависимости от ассоциированности порожденных ими мнемofункций с  $\delta$ -функцией, ее производными или со степенными функциями.

### Литература

1. Colombeau J. F. A multiplication of distributions // *Journal of mathematical analysis and applications*. 1983. No. 94. P. 96–115.
2. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1974. Т. 1. 392 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Асимптотическое разложение интегралов с медленно убывающим ядром // Доклады Академии наук СССР. 1959. Т. 126, № 1. С. 26–29.
4. Антоневиц А. Б., Пыжкова О. Н., Третьякова Л. Г. Асимптотические разложения для произведений базовых обобщенных функций // Труды Института математики НАН Беларуси. 2000. Т. 5. С. 18–31.
5. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. Т. 1. 470 с.

### References

1. Colombeau J. F. A multiplication of distributions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 1983, no. 94, pp. 96–115.
2. Riekstyn'sh E. Ya. *Asimptoticheskiye razlozheniya integralov* [Asymptotic expansions of integral]. Riga, Zinatne Publ., 1974. Vol. 1. 392 p.
3. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. Asymptotic expansions of integrals with slowly decreasing kernel. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1959, vol. 126, no. 1, pp. 26–29 (In Russian).
4. Antonevich A. B., Pyzhkova O. N., Tret'yakova L. G. Asymptotic expansions for products of basic distributions. *Trudy Instituta matematiki NAN Belarusi* [Proceedings of mathematical institution of NASB], 2000, vol. 5, pp. 18–31 (In Russian).
5. Gel'fand I. M., Shilov G. E. *Obobshchennyye funktsii i deystviya nad nimi* [Generalized functions: properties and actions]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1959. Vol. 1. 470 p.

### Информация об авторе

**Шагова Татьяна Григорьевна** – аспирант. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр. Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: tanya.shagova@gmail.com

### Information about the author

**Shahava Tatsiana Rygoraŭna** – PhD student. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tanya.shagova@gmail.com

Поступила 28.12.2017

УДК 517.984

**О. А. Архипенко**

Белорусский государственный технологический университет

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Исследование для заданного оператора  $B$  обратных операторов к  $B - \lambda I$ , т. е. резольвенты  $B$ , является одним из классических разделов теории операторов. При спектральном значении  $\lambda$  такой оператор необратим, но часто он оказывается правосторонне обратимым. В таком случае к оператору обычно присоединяется краевое условие и рассматриваются краевые задачи, решение которых эквивалентно построению правосторонних резольвент для исходного оператора. В последние годы в работах ряда авторов исследовались правосторонние резольвенты и обсуждалось их сходство и отличия от классической резольвенты. В связи с этим представляет интерес построение правосторонних резольвент для конкретных операторов.

Целью статьи является построение правосторонней резольвенты для дискретного оператора взвешенного сдвига, состоящей из операторов, образы которых совпадают с заданным подпространством  $L_\eta$ . Построение такой резольвенты эквивалентно решению краевой задачи для разностного уравнения. Резольвента определена только в некоторой части комплексной плоскости и нашей задачей является описание ее области определения.

В работе по заданному подпространству  $L_\eta$  построена вспомогательная аналитическая функция  $Q_\eta$ , с ее помощью построена резольвента рассматриваемой краевой задачи и показано, что область определения резольвенты состоит из явно заданного кольца, за исключением тех точек, в которых аналитическая функция  $Q_\eta$  обращается в нуль. Результат дает решение задачи в общем виде для произвольного пространства.

**Ключевые слова:** дискретный оператор взвешенного сдвига, правосторонняя резольвента, проектор Рисса, спектр оператора, краевая задача.

**O. A. Arkhipenko**

Belarusian State Technological University

**BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DIFFERENCE EQUATIONS**

An investigation of inverse operators or resolvent for a given operator  $B$  is one of the classical sections of the theory of operators. Such operator is irreversible for a spectral value  $\lambda$  but it often turns out to be a right-side reversible. In this case, the boundary condition is usually attached to the operator and boundary value problems whose solution is equivalent to constructing right-side resolvents for the initial operator are considered. Right-side resolvents have been studied recently by a number of authors. As well as the similarities and differences between them and classical resolvent discussed in recent years. In this connection, it is of interest to construct right-sided resolvents for concrete operators.

The aim of the article is to construct a right-hand resolvent consisting of operators whose images coincide with a given subspace  $L_\eta$  for a discrete weighted shift operator. The construction of such a resolvent is equivalent to finding solution of the boundary value problem for the difference equation. The resolvent is defined only in some part of the complex plane and our task is to describe its domain.

An auxiliary analytic function  $Q_\eta$  is constructed on a given subspace  $L_\eta$ . A resolvent of the boundary value problem is constructed using it. We show that the domain of the resolvent consists of an explicitly defined ring with the exception of those points at which the analytic function  $Q_\eta$  vanishes. The result gives the solution of the problem in general form for an arbitrary space.

**Key words:** discrete weighted shift operator, right-side resolvent, Riesz projection, boundary value problem, spectrum.

**Введение.** Пусть  $B$  – ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве  $F$  и простой замкнутый контур  $G$  не пересекается со спектром оператора  $B$ . Тогда резольвента  $R(B; \lambda) = (B - \lambda I)^{-1}$  определена на контуре и формула

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_G R(B; \lambda) d\lambda$$

задает проектор Рисса [1].

Этот проектор перестановочен с  $B$  и осуществляет разложение пространства в прямую сумму замкнутых подпространств

$$F = F^+ \oplus F^-,$$

инвариантных относительно оператора  $B$ , где

$$F^+ = \text{Im } P,$$

$$F^- = \text{Im}(I - P) = \text{Ker } P.$$

При этом оператор разлагается в прямую сумму операторов

$$B = B^+ \oplus B^-,$$

действующих в соответствующих подпространствах. Причем спектр оператора  $B^+$  в подпространстве  $F^+$  совпадает с частью спектра  $\Sigma(B)$ , лежащей внутри контура  $G$ , а спектр оператора  $B^-$  в подпространстве  $F^-$  совпадает с частью спектра  $\Sigma(B)$ , лежащей вне контура  $G$ .

Оператор  $B$  называется гиперболическим, если  $\Sigma(B) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$ , где  $\mathbb{S}^1 = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$  – единичная окружность.

В случае гиперболического оператора спектр не пересекается с единичной окружностью  $\mathbb{S}^1$ , поэтому определен проектор Рисса

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} R(B; \lambda) d\lambda. \quad (1)$$

Рассмотрим обобщение понятия гиперболического оператора, естественно возникающее при исследовании свойства односторонней обратимости.

Пусть  $B$  есть линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве  $F$ . Оператор  $B$  будем называть правосторонне гиперболическим, если операторы  $B - \lambda I$  правосторонне обратимы для любого  $\lambda$  из некоторой окрестности единичной окружности и при этом существует семейство правых обратных  $R_r(B; \lambda)$  для  $B - \lambda I$ , аналитически зависящее от  $\lambda$ .

Такое семейство  $R_r(B; \lambda)$  будем называть правосторонней резольвентой для  $B$ .

**Теорема 1.** Пусть  $R_0$  есть один из правых обратных к оператору  $B - \lambda_0 I$ . Тогда при

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_0\|}$$

ряд

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R_0^{k+1}$$

сходится и задает в окрестности  $\lambda_0$  правостороннюю резольвенту, состоящую из операторов, образы которых совпадают с образом оператора  $R_0$ .

Эта правосторонняя резольвента аналитически продолжается на некоторую область в комплексной плоскости, которая зависит от выбора правого обратного  $R_0$ .

В случае когда правосторонняя резольвента определена в окрестности единичной окружности, такая резольвента может быть записана в стандартной форме, описанной в следующей теореме.

Мы предполагаем, что оператор  $B$  обратим.

**Теорема 2 [2].** Пусть обратимый оператор  $B$  является правосторонне гиперболическим и

пусть  $R_r(B; \lambda)$  – некоторая его правосторонняя резольвента. Разложение правосторонней резольвенты  $R_r(B; \lambda)$  в операторный ряд Лорана в окрестности единичной окружности имеет вид

$$R_r(B; \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P) - \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P, \quad (2)$$

где оператор  $P$  связан с резольвентой той же формулой, что и проектор Рисса:

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}^1} R_r(B; \lambda) d\lambda.$$

**Теорема 3 [2].** Пусть оператор  $B$  обратим. Если существует такой ограниченный оператор  $P$ , что операторный ряд (2) сходится по норме, то сумма этого ряда является правосторонней резольвентой.

Правосторонняя обратимость часто встречается для операторов взвешенного сдвига [3–6], такие операторы исследовались с разных точек зрения многими авторами [7–9].

Среди указанных операторов наиболее простыми по форме являются дискретные операторы взвешенного сдвига, но и для них краевые задачи в общей постановке ранее не были исследованы.

Мы рассматриваем дискретные операторы взвешенного сдвига, действующие в пространстве  $l_2(\mathbb{Z})$ . Это пространство состоит из двусторонних числовых последовательностей  $u = (u(k))_{k=-\infty}^{+\infty}$ ,  $u(k) \in \mathbb{C}$ , таких, что

$$\|u\| = \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u(k)|^2 \right]^{1/2} < \infty.$$

Оператор сдвига  $W$  действует в этом пространстве по формуле

$$Wu(k) = u(k+1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Оператор  $B$  в  $l_2(\mathbb{Z})$  называется дискретным оператором взвешенного сдвига, если он действует по формуле

$$Bu(k) = a(k)u(k+1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

где  $a = (a(k))$  есть заданная ограниченная числовая последовательность.

Если  $a(k) \neq 0$  для  $k \in \mathbb{Z}$  и последовательность  $\frac{1}{a(k)}$  ограничена, то оператор  $B$  обратим и

$$B^{-1}u(k) = \frac{1}{a(k-1)}u(k-1).$$

Известно, что если оператор обратим слева, то его сопряженный обратим справа [1]. В случае когда  $B$  – дискретный оператор взвешенно-

го сдвига, сопряженный к нему – также оператор взвешенного сдвига. Таким образом, условия обратимости слева для  $B$  получаются аналогичным образом, как и для обратимости справа.

Здесь мы рассматриваем случай, когда для последовательности коэффициентов существуют пределы

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} a(k) = a(\pm\infty). \quad (4)$$

Лемма 1 [2, 6] Пусть  $B$  есть оператор вида (3),  $a(k) \neq 0$  для всех  $k$  и  $a(\pm\infty) \neq 0$ . Спектром оператора является кольцо

$$\Sigma(B) = \{\lambda : r(a) \leq |\lambda| \leq R(a)\},$$

где

$$R(a) = \max\{|a(+\infty)|, |a(-\infty)|\},$$

$$r(a) = \min\{|a(+\infty)|, |a(-\infty)|\}.$$

Оператор  $B - \lambda I$  обратим слева, когда

$$|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)|.$$

Оператор  $B - \lambda I$  обратим справа, когда  $|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)|$ . При этом  $\dim \text{Ker}(B - \lambda I) = 1$ .

Оператор  $B - \lambda I$  необратим, когда  $|\lambda| = |a(\pm\infty)|$ .

Таким образом, при  $r < |\lambda| < R$  оператор  $B - \lambda I$  односторонне обратим. В частности, если  $|a(-\infty)| < |a(+\infty)|$ , то оператор  $B - \lambda I$  обратим справа и у него существует много правых обратных операторов и много правосторонних резольвент.

Примеры правосторонних резольвент для рассматриваемого оператора, определенных во всем открытом кольце  $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$ , приведены в [2, 6].

**Теорема 4.** Пусть  $P_0$  есть проектор на подпространство

$$F_0 = \{u \in l_2(\mathbb{Z}) : u(k) = 0, k \leq 0\},$$

действующий по формуле

$$(P_0 u)(k) = \begin{cases} u(k), & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Если  $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$ , то ряд

$$R_0(B; \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P_0) - \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_0$$

сходится и задает правостороннюю резольвенту для оператора  $B$ , определенную в кольце  $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$ .

Образы всех операторов  $R_0(B; \lambda)$  совпадают с подпространством

$$L_0 = \{u \in l_2(\mathbb{Z}) : u(0) = 0\}.$$

Другими словами, теорема утверждает, что для разностного уравнения краевая задача  $(B - \lambda I)u = f$ ,  $f \in L_0$ , заданная условием  $u(0) = 0$ , имеет решение для  $\forall f \in l_2(\mathbb{Z})$  и при том единственное, т. е. корректность краевой задачи при  $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$ .

**Основная часть – краевые задачи общего вида.** В работе для разностного уравнения

$$a(k)u(k+1) - \lambda u(k) = f(k) \quad (6)$$

изучается корректность краевой задачи, заданной условием

$$u \in L_\eta, \quad \eta = (\dots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \dots) \in l_2(\mathbb{Z}),$$

где

$$L_\eta = \{u \in l_2(\mathbb{Z}) : \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k u(k) = 0\}. \quad (7)$$

Нахождение решения этой задачи эквивалентно построению правосторонней резольвенты для оператора взвешенного сдвига  $B$ , состоящей из операторов, образы которых совпадают с подпространством  $L_\eta$ . Заметим, что любая корректная краевая задача для уравнения (6) может быть записана в указанном виде, т. е. это общий вид краевых задач для уравнения (6).

В отличие от случая, описанного в лемме 1, может оказаться, что такая правосторонняя резольвента определена не во всех точках кольца

$$|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|. \quad (8)$$

Одним из необходимых условий существования такой правосторонней резольвенты является правосторонняя обратимость оператора  $B - \lambda I$ . Согласно лемме 1, оператор  $B - \lambda I$  может быть правосторонне обратимым только в случае, когда коэффициенты оператора удовлетворяют условию

$$|a(-\infty)| < |a(+\infty)|$$

и правосторонняя обратимость имеет место только при условии (8).

Найдем сначала необходимые условия для того, чтобы у оператора  $B - \lambda I$  существовал правый обратный, образ которого совпадает с подпространством  $L_\eta$ .

По подпространству  $L_\eta$  и оператору  $B$  построим ряд Лорана по степеням  $\lambda$ :

$$Q_\eta(\lambda) = Q_\eta^+(\lambda) + Q_\eta^-(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\eta_k \lambda^k}{\prod_{j=0}^{k-1} a(j)} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \eta_k \frac{\prod_{j=k}^{-1} a(j)}{\lambda^{-k}}. \quad (9)$$

**Теорема 5.** Если выполняется (8), то условие

$$Q_\eta(\lambda) \neq 0$$

является необходимым для того, чтобы существовал правый обратный оператор к  $B - \lambda I$ , образ которого принадлежит подпространству  $L_\eta$ .

Пусть существует правый обратный  $R$  к оператору  $B - \lambda I$  и  $\text{Im } R$  совпадает с  $L_\eta$ . Тогда  $L_\eta \cap \text{Ker}(B - \lambda I) = \{0\}$ .

При выполнении (8) подпространство  $\text{Ker}(B - \lambda I)$  одномерно и для его построения достаточно найти одно ненулевое решение однородного уравнения  $(B - \lambda I)\omega = 0$ , т. е. уравнения  $a(\tau)\omega(\tau+1) - \lambda\omega(\tau) = 0, \tau \in \mathbb{Z}$ .

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию  $\omega(0) = 1$ , задается формулой

$$\omega_\lambda(\tau) = \begin{cases} \frac{\lambda^\tau}{\prod_{j=0}^{\tau-1} a(j)}, & \tau \geq 0, \\ \frac{\prod_{j=\tau}^{-1} a(j)}{\lambda^{-\tau}}, & \tau < 0. \end{cases} \quad (10)$$

При выполнении (8) построенная последовательность  $\omega_\lambda(\tau)$  принадлежит пространству  $l_2(\mathbb{Z})$ .

Заметим, что эта последовательность может быть представлена в виде

$$\omega_\lambda = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda^k B^{-k} e_0,$$

где  $e_0$  есть последовательность

$$e_0(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \neq 0, \\ 1, & \tau = 0. \end{cases}$$

Подставив (10) в (7), получаем, что условие  $\omega_\lambda \in L_\eta$  имеет вид  $Q_\eta(\lambda) = 0$ . Заметим, что выражение  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k \omega_\lambda(k)$  есть скалярное произведение двух элементов из пространства  $l_2(\mathbb{Z})$  и, следовательно, определено для всех  $\lambda$ , удовлетворявших условию (8). Поэтому условие  $Q_\eta(\lambda) \neq 0$  эквивалентно тому, что  $L_\eta \cap \text{Ker}(B - \lambda I) = \{0\}$  и оно следует из существования правого обратного  $R$  к оператору  $B - \lambda I$ , образ которого совпадает с  $L_\eta$ .

**Теорема 6.** Правый обратный оператор к  $B - \lambda I$ , образ которого принадлежит подпространству  $L_\eta$ , существует в тех точках  $\lambda$ , где

$$Q_\eta(\lambda) \neq 0$$

и выполняется (8). Семейство таких правых обратных  $R_\eta(B; \lambda)$  аналитически зависит от  $\lambda$ , т. е. является правосторонней резольventой, оп-

ределенной для указанных  $\lambda$ . Эта правосторонняя резольventa имеет вид

$$R_\eta(B; \lambda)f = \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P_0) f - \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_0 f \right] + \frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)} \omega_\lambda,$$

где  $P_0$  – проектор (5),  $\Phi_\lambda(f)$  есть функционал из  $l_2(\mathbb{Z})$ , заданный формулой

$$\Phi_\lambda(f) = - \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^i \frac{\lambda^{i-j} \eta_{i+1}}{\prod_{k=j}^i a(k)} f(j) - \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=i}^{-1} \lambda^{i-j-1} \eta_i \prod_{k=i}^{j-1} a(k) f(j).$$

Пусть  $f \in l_p(\mathbb{Z})$ . Будем строить решение уравнения  $(B - \lambda I)u = f$ , принадлежащее  $L_\eta$ . В ординатной записи это уравнение имеет вид

$$a(\tau)u(\tau+1) - \lambda u(\tau) = f(\tau).$$

Найдем выражения для  $u(\tau)$  через  $f$  и  $u(0)$ . При  $\tau > 0$

$$u(\tau) = \left[ \frac{f(\tau-1)}{a(\tau-1)} + \frac{\lambda f(\tau-2)}{a(\tau-1)a(\tau-2)} + \frac{\lambda^2 f(\tau-3)}{a(\tau-1)a(\tau-2)a(\tau-3)} + \dots + \frac{\lambda^{\tau-1} f(0)}{a(0) \dots a(\tau-1)} \right] + \frac{\lambda^\tau}{a(0) \dots a(\tau-1)} u(0).$$

При  $\tau < 0$  получаем

$$u(\tau) = - \left[ \frac{f(\tau)}{\lambda} + \frac{a(\tau)f(\tau+1)}{\lambda^2} + \frac{a(\tau)a(\tau+1)f(\tau+2)}{\lambda^3} + \dots + \lambda^\tau a(\tau)a(\tau+1) \dots a(-2)f(-1) \right] + \lambda^\tau a(\tau) \dots a(-1)u(0).$$

Подставим найденные выражения для  $u(\tau)$  в условие  $u \in L_\eta$

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \eta_\tau u(\tau) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \eta_\tau u(\tau) + \sum_{\tau=-\infty}^{-1} \eta_\tau u(\tau) = u(0) \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\eta_{i+1} \lambda^i}{\prod_{j=0}^i a(j)} + \sum_{i=-\infty}^{-1} \eta_i \lambda^i \prod_{j=i}^{-1} a(j) \right] - \left[ \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^i \frac{\lambda^{i-j} \eta_{i+1}}{\prod_{k=j}^i a(k)} f(j) + \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=i}^{-1} \lambda^{i-j-1} \eta_i \prod_{k=i}^{j-1} a(k) f(j) \right].$$



Тогда из равенства  $\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \eta_{\tau} u(\tau) = 0$  находим, что

$$u(0) = \frac{\Phi_{\lambda}(f)}{Q_{\eta}(\lambda)},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda}(f) = & - \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^i \frac{\lambda^{i-j} \eta_{i+1}}{i} f(j) - \\ & - \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=i}^{-1} \lambda^{i-j-1} \eta_i \prod_{k=i}^{j-1} a(k) f(j). \end{aligned}$$

Выражение для каждого  $u(\tau)$  состоит из двух слагаемых: первое слагаемое при  $\tau > 0$  совпадает с выражением для координат вектора

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P_0) f,$$

где  $P_0$  есть проектор, заданный в (5), а при  $\tau < 0$  совпадает с выражением для координат вектора

$$- \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_0 f.$$

В частности, первое слагаемое задает последовательность, принадлежащую  $l_2(\mathbb{Z})$ .

Второе слагаемое имеет вид  $\omega_{\lambda}(\tau) u(0)$ . Поэтому получаем следующее выражение для построенного правого обратного

$$\begin{aligned} R_{\eta}(B; \lambda) f = & \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P_0) f - \right. \\ & \left. - \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_0 f \right] + \frac{\Phi_{\lambda}(f)}{Q_{\eta}(\lambda)} \omega_{\lambda}. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что при фиксированном  $\lambda$  последнее слагаемое

$$\frac{\Phi_{\lambda}(f)}{Q_{\eta}(\lambda)} \omega_{\lambda}$$

в (11) есть оператор ранга 1, а само это слагаемое есть семейство операторов ранга 1, аналитически зависящее от  $\lambda$ . Таким образом, построенное семейство правых обратных аналитически зависит от  $\lambda$ , т. е. задает правостороннюю резольвенту для оператора  $B$ . Также заметим, что полученное выражение не есть представление резольвенты в виде ряда Лорана, так как последнее слагаемое не представлено в виде ряда по степеням  $\lambda$ .

**Спектр краевой задачи.** Согласно теореме 6, спектр краевой задачи состоит из нулей функции  $Q_{\eta}(\lambda)$ , лежащих в кольце (8), в связи с чем для описания спектра краевой задачи жела-

тельно получить информацию о виде и количестве таких нулей. Если ряд Лорана для функции  $Q_{\eta}(\lambda)$  сходится в более широком кольце, чем кольцо, заданное условием (8), то в последнем может лежать лишь конечное число нулей. Но если аналитическая функция  $Q_{\eta}(\lambda)$  имеет особенности на границе кольца  $|\lambda| = |a(+\infty)|$ ,  $|\lambda| = |a(-\infty)|$ , то в (8) может лежать счетное количество нулей.

Получим условие, при котором есть сходимость ряда Лорана в более широком кольце. В соответствии с признаком сходимости Коши ряд  $Q_{\eta}^+(\lambda)$  сходится, когда

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{\eta_k \lambda^k}{\prod_{j=0}^{k-1} a(j)} \right|^{\frac{1}{k}} < 1.$$

Покажем, что результат зависит от величины

$$q^+ = \lim_{k \rightarrow +\infty} |\eta_k|^{\frac{1}{k}}.$$

Так как известно, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \prod_{j=0}^{k-1} a(j) \right|^{\frac{1}{k}} = |a(+\infty)|,$$

получаем

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{\eta_k \lambda^k}{\prod_{j=0}^{k-1} a(j)} \right|^{\frac{1}{k}} = \frac{|\lambda|}{|a(+\infty)|} q^+.$$

Из предыдущих вычислений следует, что ряд  $Q_{\eta}^+(\lambda)$  сходится при

$$|\lambda| < \frac{|a(+\infty)|}{q^+}.$$

Аналогично, пусть  $q^- = \lim_{k \rightarrow +\infty} |\eta_{-k}|^{\frac{1}{k}}$ , тогда

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \prod_{j=1}^k a(-j) \right|^{\frac{1}{k}} = |a(-\infty)|,$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \eta_{-k} \lambda^k \prod_{j=1}^k a(-j) \right|^{\frac{1}{k}} = |\lambda| |a(-\infty)| q^-.$$

Отсюда следует, что ряд для  $Q_{\eta}^-(\lambda)$  сходится при

$$|\lambda| > |a(-\infty)| q^-.$$

Теорема 7. Если  $q^+ < 1$  и  $q^- < 1$ , тогда функция  $Q_\eta(\lambda)$  может принимать нулевое значение только в конечном числе точек из кольца (8).

При выполнении условия теоремы функция  $Q_\eta(\lambda)$  аналитическая во всех точках замкнутого кольца

$$\overline{K} = \{\lambda : |a(-\infty)| \leq |\lambda| \leq |a(+\infty)|\}.$$

Если функция имеет счетное множество нулей, содержащихся в открытом кольце,

$$K = \{\lambda : |a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|\},$$

то последовательность нулей имеет предельную точку в замкнутом кольце.

Поскольку функция  $Q_\eta(\lambda)$  аналитическая во всех точках замкнутого кольца, то она, согласно теореме единственности [10], тождественно равна нулю. Получаем противоречие.

**Пример 1.** Если у последовательности  $\eta_k$  только конечное число ненулевых элементов, то функция  $Q_\eta(\lambda)$  является рациональной и имеет конечное число корней. Этот случай был рассмотрен ранее и опубликован в статье [11].

**Пример 2.** Пусть  $\eta_k = \frac{1}{|k|+1}$ , тогда

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\eta_k|^{\frac{1}{k}} = 1.$$

Поэтому мы не можем утверждать, что функция  $Q_\eta(\lambda)$  имеет только конечное число корней.

**Пример 3.** Пусть  $\eta_k = \frac{1}{2^{|k|}}$ , тогда

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\eta_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2}.$$

В этом примере функция  $Q_\eta(\lambda)$  аналитическая в кольце  $\frac{1}{2}|a(-\infty)| < |\lambda| < 2|a(+\infty)|$ , тогда применима теорема 7 и краевая задача (6)–(7) имеет только конечное множество спектральных значений, лежащих в кольце (8).

Таким образом, вид спектра краевой задачи зависит от скорости убывания последовательности  $\eta_k$  на бесконечности.

**Заключение.** Основным результатом работы является получение необходимых и достаточных условий корректности краевой задачи общего вида для дискретного оператора взвешенного сдвига, заданной условием на бесконечное число координат вектора  $u$  и построение решений такой задачи.

## Литература

1. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Иностранная литература, 1954. 499 с.
2. Antonevich A. B., Panteleva E. V. Right-Side Hyperbolic Operators // Scientific Publications of the State University of Novi Pazar. Ser. A, Applied Mathematics, Informatics and Mechanics. 2014. No. 1. P. 1–9.
3. Мардиев Р. Критерий полунетеровости одного класса сингулярных интегральных операторов с некарлемановским сдвигом // Доклады АН УзССР. 1985. Т. 2, No. 2. С. 5–7.
4. Belitskii G., Lyubich Yu. On the normal solvability of cohomological equations on compact topological spaces // Operator Theory: Advances and Applications. 1998. No. 103. P. 75–87.
5. Karlovich A. Yu., Karlovich Yu. I. One sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces // Integral Equations Operator Theory. 2002. No. 2 (42). P. 201–228.
6. Antonevich A., Makowska Yu. On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points // Complex analysis and Operator theory. 2008. Vol. 2, No. 2. P. 215–240.
7. Ridge W. C. Spectrum of a composition operator // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. No. 37. P. 121–127.
8. Kravchenko V. G., Litvinchuk G. S. Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift. Kluwer, Math. Appl., 1994. 289 p.
9. Antonevich A. B. Linear Functional Equation. Operator Approach. Birkhauser Verlag, Operator Theory Advances and Applications, 1996. 180 p.
10. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М: Наука, 1969. 576 с.
11. Шукур Али А., Архипенко О. А. Резольвента краевой задачи для разностного уравнения // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 3 (28). С. 70–75.

## References

1. Riss F., Sekefal'vi-Nad' B. *Lektsii po funktsional'nomu analizu* [Lectures on functional analysis]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1954. 499 p.
2. Antonevich A. B., Panteleva E. V. Right-Side Hyperbolic Operators. *Scientific Publications of the State University of Novi Pazar. Ser. A, Applied Mathematics, Informatics and Mechanics*, 2014, no. 1, pp. 1–9.

3. Mardiev R. Criterion for the semenergality of a class of singular integral operators with a non-Carleman shift. *Doklady Akademii nauk UzSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the UzSSR], 1985, vol. 2, no. 2, pp. 5–7 (In Russian).
4. Belitskiy G., Lyubich Yu. On the normal solvability of cohomological equations on compact topological spaces. *Operator Theory: Advances and Applications*, 1998, no. 103, pp. 75–87.
5. Karlovich A. Yu., Karlovich Yu. I. One sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 2002, no. 2 (42), pp. 201–228.
6. Antonevich A. B., Makowska Yu. On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points. *Complex analysis and Operator theory*, 2008, no. 2, pp. 215–240.
7. Ridge W. C. Spectrum of a composition operator. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1973, no. 37, pp. 121–127.
8. Kravchenko V. G., Litvinchuk G. S. Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift. Kluwer, Math. Appl. Publ., 1994. 289 p.
9. Antonevich A. B. *Lineynyye funktsional'nyye uravneniya. Operatornyy podkhod* [Linear Functional Equations. Operator Approach]. Minsk, Universitetskoye Publ., 1988. 233 p.
10. Shabat B. V. *Vvedeniye v kompleksnyy analiz* [Introduction to complex analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 576 p.
11. Shukur Ali A., Arkhipenko O. A. The resolvent of the boundary value problem for the difference equation. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki* [Problems of Physics, Mathematics and Technology], 2016, no. 3 (28), pp. 70–75 (In Russian).

#### **Информация об авторе**

**Архипенко Ольга Александровна** – преподаватель-стажер кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: arhipenko@belstu.by

#### **Information about the author**

**Arkhipenko Ol'ga Aleksandrovna** – trainee teacher, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: arhipenko@belstu.by

*Поступила 25.11.2017*

УДК 514.76

**Н. П. Можей**

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

**ТРЕХМЕРНЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА,  
ДОПУСКАЮЩИЕ НЕКАНОНИЧЕСКИЕ СВЯЗНОСТИ**

Цель работы – описание трехмерных симметрических однородных пространств, допускающих неканонические связности, и инвариантных аффинных связностей на таких пространствах. В работе определены основные понятия: изотропно-точная пара, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, симметрическое пространство. Приведено в явном виде локальное описание трехмерных симметрических однородных пространств, допускающих неканонические связности. Локальная классификация таких пространств эквивалентна описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли. Описаны также в явном виде все инвариантные аффинные связности на найденных однородных пространствах. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят главным образом локальный характер. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

**Ключевые слова:** каноническая связность, группа преобразований, симметрическое пространство, алгебра голономии.

**N. P. Mozhey**

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

**THREE-DIMENSIONAL SYMMETRIC SPACES,  
ADMITS UNCANONICAL CONNECTIONS**

The purpose of the work is the description of three-dimensional symmetric homogeneous spaces, admits uncanonical connections, invariant affine connections on those spaces. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, an affine connection, curvature and torsion tensors, a symmetric space are defined. The local description of three-dimensional symmetric homogeneous spaces, admitting uncanonical connections, is given. The local classification of such spaces is equivalent to the description of the effective pairs of Lie algebras. All invariant affine connections on those spaces are described. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. The peculiarity of techniques presented in the work is the application of purely algebraic approach, as well as the compound of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras and the theory of homogeneous spaces.

**Key words:** canonical connection, transformation group, symmetric space, holonomy algebra.

**Введение.** Нетривиальные геометрические структуры, а в работе речь идет о нетривиальных связностях, часто возникают при решении физических уравнений. В физических моделях, как правило, пространство, в котором мы живем, является многообразием. Для описания движения и взаимодействия различных физических объектов в пространстве необходимо задание дополнительных структур на многообразии. Такими структурами, в частности, являются связности, физическая интерпретация которых зависит от конкретной модели. Симметрическое пространство – это пространство аффинной связности без кручения, тензор кривизны которого сохраняется при параллельном перенесении (см., например, [1]). Каноническая связность – это единственная аффинная связность, которая инвариантна относительно симметрий, она всегда существует на симметриче-

ском пространстве; подробнее о канонической связности можно узнать из литературы (см., например, [2]). Канонические связности на трехмерных симметрических пространствах рассматривались в работе [3], в данной работе также изучаются трехмерные симметрические однородные пространства, но внимание сосредоточено на пространствах, допускающих неканонические связности. В статье определяется, при каких условиях нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения, а также при каких условиях ее геодезические не совпадают с геодезическими канонической связности.

**1. Основные определения.** Пусть  $M$  – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа  $\bar{G}$ ,  $(M, \bar{G})$  – однородное пространство,  $G = \bar{G}_x$  – стабилизатор произвольной точки  $x \in M$ . Проблема

классификации однородных пространств  $(M, \bar{G})$  равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли  $(\bar{G}, G)$ , где  $G \subset \bar{G}$ , так как  $M$  может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов  $\bar{G}/G$  (см., например, [4]). Пусть  $\bar{\mathfrak{g}}$  – алгебра Ли группы Ли  $\bar{G}$ , а  $\mathfrak{g}$  – подалгебра, соответствующая подгруппе  $G$ . Пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра  $\mathfrak{g}$  не содержит отличных от нуля идеалов  $\bar{\mathfrak{g}}$ . Пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление  $\mathfrak{g}$ . Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к  $\mathfrak{g}$  в  $\bar{\mathfrak{g}}$ , и фактор-пространство  $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ .

*Аффинной связностью* на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется такое отображение  $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ , что его ограничение на  $\mathfrak{g}$  – изотропное представление подалгебры, а все отображение является  $\mathfrak{g}$ -инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве  $(M, \bar{G})$  находятся во взаимно однозначном соответствии (см., например, [5]) с аффинными связностями на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ . Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для  $G$  должно быть точным, если  $\bar{G}$  эффективна на  $\bar{G}/G$  [2]. Симметрическое пространство есть тройка  $(\bar{G}, G, \sigma)$ , состоящая из связной группы Ли  $\bar{G}$ , замкнутой подгруппы  $G$  и инволютивного автоморфизма  $\sigma$  для  $\bar{G}$ . Поскольку  $\sigma$  инволютивно, то его собственными значениями являются 1 и  $-1$ , а  $\mathfrak{g}$  – собственное подпространство для 1. Пусть  $\mathfrak{m}$  – собственное подпространство для  $-1$ . Разложение  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$  называется *каноническим разложением* для  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$ . Если  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$  – каноническое разложение симметрической алгебры Ли  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$ , то  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ ,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ ,  $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$ . Тензор кручения  $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$  и тензор кривизны  $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$  имеют вид

$$T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m,$$

$$R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех  $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ . Тензоры кривизны и кручения играют важную роль в геометрии, их обращение в нуль является критерием локальной тривиальности связности.

Инвариантная связность, определяемая равенством  $\Lambda|_{\mathfrak{m}} = 0$ , называется *канонической связностью* для  $(\bar{G}, G, \sigma)$  или  $\bar{G}/G$  (относительно разложения  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ ), ее также называют *канонической связностью второго рода*. Поскольку для симметрического пространства  $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$ , то каноническая связность совпадает с *естественной связностью без кручения* (единственной инвариантной аффинной связ-

ностью без кручения, имеющей те же геодезические, что и каноническая связность:  $\Lambda_m(x)y = 1/2[x, y]_m$ ,  $x, y \in \mathfrak{m}$ ; ее также называют *канонической связностью первого рода*).

Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. Переформулируем теорему Вана об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли группы голономии инвариантной связности  $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  – это подалгебра алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  вида  $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$ , где  $V$  – подпространство, порожденное множеством

$$\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}.$$

Положим  $\mathfrak{a}$  равной подалгебре в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , порожденной  $\{\Lambda(x) \mid x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ . Если  $\mathfrak{h}^*$  – алгебра Ли группы голономии, то  $\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{a} \subset \mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$ , где  $\mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$  – нормализатор  $\mathfrak{h}^*$  в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ . Будем говорить, что связность *нормальна*, если  $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$ .

**2. Классификация симметрических пространств, допускающих неканонические связности.** Будем описывать пару  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  при помощи таблицы умножения  $\bar{\mathfrak{g}}$ . Через  $\{e_1, \dots, e_n\}$  обозначим базис  $\bar{\mathfrak{g}}$  ( $n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$ ). Будем полагать, что  $\mathfrak{g}$  порождается  $e_1, \dots, e_{n-3}$ , а  $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$  – базис  $\mathfrak{m}$ . Для нумерации подалгебр используем запись  $d, n$ , для нумерации пар –  $d, n, m$ , соответствующие приведенным в работе [6], здесь  $d$  – размерность подалгебры,  $n$  – номер подалгебры в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , а  $m$  – номер пары  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ . Будем описывать связность через образы базисных векторов  $\Lambda(u_1), \Lambda(u_2), \Lambda(u_3)$ , тензор кривизны  $R$  – через  $R(u_1, u_2), R(u_1, u_3), R(u_2, u_3)$ , а тензор кручения  $T$  – через  $T(u_1, u_2), T(u_1, u_3), T(u_2, u_3)$ .

**Теорема 1.** Все трёхмерные симметрические однородные пространства, допускающие нормальную неканоническую связность, такие, что  $\bar{\mathfrak{g}}$  и  $\mathfrak{g}$  разрешимы, а  $\dim \mathfrak{g} > 1$ , локально имеют следующий вид:

2.9.1	$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$2e_2$	$u_1$	0	$-u_3$
$e_2$	$-2e_2$	0	0	0	$u_1$
$u_1$	$-u_1$	0	0	0	0
$u_2$	0	0	0	0	0
$u_3$	$u_3$	$-u_1$	0	0	0
2.17.2, 2.17.3	$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	0	0	0	$u_1$
$e_2$	0	0	0	0	$u_2$
$u_1$	0	0	0	0	$\pm e_1$
$u_2$	0	0	0	0	$ae_2$
$u_3$	$-u_1$	$-u_2$	$\mp e_1$	$-ae_2$	0

2.21.1	$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$e_2$	$u_1$	0	$-u_3$
$e_2$	$-e_2$	0	0	$u_1$	$u_2$
$u_1$	$-u_1$	0	0	0	0
$u_2$	0	$-u_1$	0	0	0
$u_3$	$u_3$	$-u_2$	0	0	0

Пара	Совпадает с 2.17.2, за исключением
2.17.4	$[u_1, u_3] = \alpha e_1 - e_2,$ $[u_2, u_3] = e_1 + \alpha e_2, \alpha \geq 0$
2.17.6, 2.17.7	$[u_1, u_3] = \pm e_1, [u_2, u_3] = e_1 + e_2$

*Замечание.* Если на параметры накладываются некоторые дополнительные условия, то они записываются сразу после таблицы умножения. В противном случае предполагается, что параметры пробегает все  $\mathbb{R}$ .

**Теорема 2.** Все трехмерные симметрические однородные пространства, допускающие нормальную неканоническую связность, такие, что  $\bar{g}$  неразрешима,  $g$  разрешима, а  $\dim g > 1$ , локально имеют следующий вид:

3.19.14	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$-e_2$	$e_3$	0	$u_2$	$-u_3$
$e_2$	$e_2$	0	0	0	$u_1$	0
$e_3$	$-e_3$	0	0	0	0	$u_1$
$u_1$	0	0	0	0	$e_3$	$e_2$
$u_2$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_3$	0	$e_1$
$u_3$	$u_3$	0	$-u_1$	$-e_2$	$-e_1$	0

3.21.6	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$-e_3$	$e_2$	0	$-u_3$	$u_2$
$e_2$	$e_3$	0	0	0	$u_1$	0
$e_3$	$-e_2$	0	0	0	0	$u_1$
$u_1$	0	0	0	0	$e_2$	$e_3$
$u_2$	$u_3$	$-u_1$	0	$-e_2$	0	$e_1$
$u_3$	$-u_2$	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_1$	0

3.21.7	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$-e_3$	$e_2$	0	$-u_3$	$u_2$
$e_2$	$e_3$	0	0	0	$u_1$	0
$e_3$	$-e_2$	0	0	0	0	$u_1$
$u_1$	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$
$u_2$	$u_3$	$-u_1$	0	$e_2$	0	$-e_1$
$u_3$	$-u_2$	0	$-u_1$	$e_3$	$e_1$	0

Пара  $(\bar{g}, g)$  называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал  $\alpha$  в алгебре Ли  $\bar{g}$ , такой, что  $g \oplus \alpha = \bar{g}$ .

**Теорема 3.** Все трехмерные симметрические тривиальные однородные пространства, допускающие нормальную неканоническую связность, такие, что  $\bar{g}$  и  $g$  неразрешимы, локально имеют вид  $g \oplus \alpha = \bar{g}$ , где  $g$  сопряжена только одной из подалгебр

$$3.3 \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}; 3.4 \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \\ & z & -x \end{pmatrix}; 3.5 \begin{pmatrix} & y & x \\ -y & & z \\ -x & -z & \end{pmatrix}$$

Все трехмерные симметрические нетривиальные однородные пространства, допускающие нормальную неканоническую связность, такие, что  $\bar{g}$  и  $g$  неразрешимы, локально имеют следующий вид:

3.4.2, 3.4.3	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$e_2$	$-e_3$	$u_1$	0	$-u_3$
$e_2$	$-e_2$	0	$e_1$	0	$u_1$	$u_2$
$e_3$	$e_3$	$-e_1$	0	$u_2$	$u_3$	0
$u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$\pm e_2$	$\mp e_1$
$u_2$	0	$-u_1$	$-u_3$	$\mp e_2$	0	$\mp e_3$
$u_3$	$u_3$	$-u_2$	0	$\pm e_1$	$\pm e_3$	0

3.5.2, 3.5.3	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$e_3$	$-e_2$	$-u_3$	0	$u_1$
$e_2$	$-e_3$	0	$e_1$	$-u_2$	$u_1$	0
$e_3$	$e_2$	$-e_1$	0	0	$-u_3$	$u_2$
$u_1$	$u_3$	$u_2$	0	0	$\pm e_2$	$\pm e_1$
$u_2$	0	$-u_1$	$u_3$	$\mp e_2$	0	$\pm e_3$
$u_3$	$-u_1$	0	$-u_2$	$\mp e_1$	$\mp e_3$	0

**3. Описание связностей.** Для найденных пар выписываем все аффинные связности, находим нормальные и канонические связности, а также естественные связности без кручения; определяем, при каких условиях нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения, а также при каких условиях ее геодезические не совпадают с геодезическими канонической связности.

Начнем рассмотрение со случая, когда  $\bar{g}$  разрешима, например, с пары 2.9.1. Тогда прямыми вычислениями получаем, что аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$$

Связность является нормальной при  $p_{1,2} \neq 0, p_{2,3} \neq 0, q_{2,2} = -2q_{1,1}$ , связность является естественной связностью без кручения, если  $p_{12} = 0, p_{23} = 0, q_{11} = 0, q_{22} = 0$ , следовательно, нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения. Связность имеет те же геодезические, что и каноническая, если  $q_{11} = -p_{12}, q_{22} = 0$ , следовательно, геодезические

нормальной связности не совпадают с геодезическими канонической связности.

Рассмотрим пару 2.21.1. Аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

связность нормальна при  $p_{1,2} \neq 0$ , естественную связностью без кручения получим при  $p_{1,2} = 0$ , следовательно, нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения. При любых значениях параметра  $p_{12}$  нормальная связность имеет те же геодезические, что и каноническая.

Рассмотрим пару 2.17.2. Связность имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{1,1} + p_{1,3} - q_{2,3} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix},$$

связность нормальна при  $a \neq 0$ ,  $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$ , у перечисленных ниже пар связность такая же, как в случае 2.17.2:

Пара	Аффинная связность нормальна при
2.17.3	$a \neq 0, p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.4, 2.17.6, 2.17.7	$p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$

В случаях 2.17.2–2.17.4, 2.17.6, 2.17.7 естественную связностью без кручения получим при  $p_{13} = p_{23} = q_{13} = q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$ , следовательно, нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения при отличных от нуля  $r_{13}$  или  $r_{23}$ . Связность имеет те же геодезические, что и каноническая при  $r_{11} = -p_{13}, r_{13} = r_{23} = 0$ , следовательно, геодезические нормальной связности не совпадают с геодезическими канонической связности при отличных от нуля  $r_{13}$  или  $r_{23}$ .

Аналогично, прямыми вычислениями находим, что если  $\bar{g}$  неразрешима, а  $g$  разрешима, аффинные связности имеют следующий вид:

Пара	Аффинная связность
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.21.6 3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & q_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

У пар 3.19.14, 3.21.6 и 3.21.7 связность является нормальной.

Если  $\bar{g}$  и  $g$  неразрешимы, аффинные связности имеют следующий вид:

Пара	Аффинная связность
3.4.2, 3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
3.5.2, 3.5.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & -p_{2,3} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Для пары 3.4.2 связность нормальна при  $p_{1,2}^2 \neq 1$ ; для 3.4.3 и 3.5.2 связность является нормальной, у 3.5.3 – нормальна при  $p_{2,3}^2 \neq 1$ .

В случае 3.19.14 нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения при отличных от нуля  $r_{12}$  или  $q_{13}$ , геодезические нормальной связности не совпадают с геодезическими канонической связности при  $r_{12} \neq -q_{13}$ . В случаях 3.21.6 и 3.21.7 нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения при отличных от нуля  $q_{12}$  или  $q_{13}$ , ее геодезические не совпадают с геодезическими канонической связности при  $q_{12} \neq 0$ . В случаях 3.3.1, 3.4.1, 3.5.1 при любых значениях параметров нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения, в случае 3.3.1 ее геодезические не совпадают с геодезическими канонической связности (в слу-

чаях 3.4.1, 3.5.1 – совпадают). В случаях 3.4.2 и 3.4.3 при  $p_{12} \neq 0$ , в случаях 3.5.2 и 3.5.3 при  $p_{23} \neq 0$  нормальная связность не совпадает с естественной связностью без кручения, а ее геодезические совпадают с геодезическими канонической связности.

**Заключение.** Таким образом, приведена в явном виде классификация трехмерных симметрических однородных пространств, допускающих нормальные неканонические связности.

Описаны все инвариантные аффинные связности на каждом таком пространстве.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на симметрических пространствах.

### Литература

1. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Москов. ун-т, 1960. 307 с.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981. 2 т. 416 с.
3. Можей Н. П. Канонические связности на трехмерных симметрических пространствах разрешимых групп Ли // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 1. С. 8–13.
4. Онищик А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований. М.: Физ.-мат. лит., 1995. 384 с.
5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. Journ. Math. 1954. Vol. 76, no. 1. P. 33–65.
6. Можей Н. П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. 394 с.

### References

1. Kartan E. *Rimanova geometriya v ortogonal'nom repere* [Riemannian geometry in an orthogonal frame]. Moscow, Moskovskiy universitet Publ., 1960. 307 p.
2. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii: v 2 tomakh* [Foundations of differential geometry: in 2 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 2 vol. 416 p.
3. Mozhey N. P. Canonical connections on three-dimensional symmetric spaces solvable Lie groups. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and mathematics. Informatics, 2017, no. 1, pp. 8–13 (In Russian).
4. Onishchik A. L. *Topologiya tranzitivnykh grupp Li preobrazovaniy* [Topology of transitive transformation groups]. Moscow, Fiz.-mat. lit. Publ., 1995. 384 p.
5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *Amer. Journ. Math*, 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65.
6. Mozhey N. P. *Trekhmernyye izotropno-tochnyye odnorodnyye prostranstva i svyaznosti na nikh* [Three-dimensional isotropically faithful homogeneous spaces and affine connections on them]. Kazan, Kazanskiy universitet Publ., 2015. 394 p.

### Информация об авторе

**Можей Наталья Павловна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Программное обеспечение информационных технологий». Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

### Information about the author

**Mozhey Natal'ya Pavlovna** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, Software for Information Technologies Department. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила 20.11.2017



УДК 531.19

**Я. Г. Грода, Э. Э. Бильданов, Д. В. Гапанюк**

Белорусский государственный технологический университет

## **КРИТИЧЕСКИЙ ПАРАМЕТР РЕШЕТОЧНОГО ФЛЮИДА С SALR-ПОТЕНЦИАЛОМ НА ПЛОСКОЙ КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ**

Исследована решеточная модель системы наночастиц либо макромолекул, части которой притягиваются на малых расстояниях и отталкиваются на больших (SALR – Short-range Attraction Long-range Repulsion). В качестве модели рассмотрен решеточный флюид с притяжением ближайших и отталкиванием третьих соседей на плоской квадратной решетке. Моделирование системы по методу Монте-Карло показало наличие в системе при низких температурах двух типов упорядоченных фаз. Конкретный вид упорядоченной фазы зависит от химического потенциала  $\mu$  и параметра взаимодействия  $|J_1| / k_B T$ . Для описания обеих упорядоченных фаз исходная решетка была разделена на систему восьми идентичных подрешеток с решеточной постоянной равной  $2a\sqrt{2}$ , где  $a$  – решеточная постоянная исходной решетки. Это позволило определить параметр порядка  $\delta c$  как разность между максимальной и минимальной концентрацией частиц на подрешетках. С помощью введенного параметра порядка был определен критический параметр системы, который оказался равным  $|J_1| / k_B T_c = 0,655 \pm 0,005$ .

**Ключевые слова:** решеточный флюид, плоская квадратная решетка, SALR-потенциал, параметр порядка, критический параметр, моделирование по методу Монте-Карло.

**Ya. G. Groda, E. E. Bildanau, D. V. Gapanjuk**

Belarusian State Technological University

## **CRITICAL PARAMETER OF THE LATTICE FLUID WITH SALR-POTENTIAL ON THE SIMPLE SQUARE LATTICE**

The lattice model of systems of nanoparticles or macromolecules, parts of which are attracted on small distances and repulse on the larger range is considered. The lattice fluid with small distance attractive interaction between nearest neighbors and long range repulsive interaction between next-next-nearest neighbors is considered as a model. A Monte Carlo simulation showed that two different types of ordered phases are formed in the system at sufficiently low temperatures. The specific type of phase depends on the given value of the chemical potential  $\mu$  and the selected value of the interaction parameter  $|J_1| / k_B T$ . To describe both ordered phases, the initial square lattice was divided into a system of 8 identical sublattices with a constant  $2a\sqrt{2}$ , where  $a$  – is the lattice constant of the initial lattice. This makes it possible to determine the system order parameter  $\delta c$  as the difference between the maximum and minimum concentrations on the sublattices. With help of the introduced order parameter, it was established that the critical parameter of the model is equal to  $|J_1| / k_B T_c = 0.655 \pm 0.005$ .

**Key words:** lattice fluid, plate square lattice, SALR-potential, order parameter, critical parameter, equilibrium properties, Monte Carlo simulation.

**Введение.** В настоящее время наблюдается большой интерес к изучению процессов самоорганизации и самосборки в наноразмерных системах. В качестве элементов таких систем выступают надмолекулярные образования с достаточно большой молекулярной массой, что приводит к малым скоростям их теплового движения и большим, по молекулярным масштабам, характерным временам протекания процессов в них. Вместе с тем взаимодействие между этими элементами носит весьма сложный характер, и, несмотря на их достаточно

большие размеры по сравнению с молекулярными, может оставаться несущественно большим тепловой энергии  $k_B T$ , что обуславливает богатые возможности для разнообразных фазовых переходов в таких системах при комнатных температурах. Примерами являются растворы белковых молекул [1], глины и грунтовые взвеси [2], экосистемы [3] и многие другие.

В целом динамика частиц рассматриваемых систем состоит в том, что на близком расстоянии друг от друга они притягиваются за счет, например, ван-дер-ваальсовского притяжения, а

на более далеком происходит электростатическое отталкивание (SALR-системы, short-range attractive and long-range repulsive далеких) [4, 5]. В случае биологических молекул отталкивание может быть также обусловлено упругими деформациями липидных мембран. В любом случае притяжение между структурными элементами системы обеспечивает разделение фаз, а отталкивание – формирование кластеров в ней.

Одним из наиболее простых методов исследования общих свойств SALR-систем является рассмотрение их решеточных моделей, которые, с одной стороны, достаточно просты, что позволяет провести их детальное исследование как аналитическими методами, так и в рамках компьютерного моделирования по методу Монте-Карло, а с другой стороны, в их рамках можно получить описание большого числа общих свойств таких систем.

Например, в цикле работ [6–8] был рассмотрен решеточный флюид с притяжением ближайших соседей и отталкиванием третьих на плоской треугольной решетке. Были исследованы возможные конфигурации ансамбля частиц флюида при  $T = 0$ , предложено приближение среднего поля, в рамках которого построена фазовая диаграмма системы. В дальнейшем методами компьютерного моделирования было установлено существование в системе двух ламелярных фаз.

В частности, было установлено, что при определении критической температуры системы с  $J_3 / |J_1| = 3$ , где  $J_1$  и  $J_3$  – энергия взаимодействия первых и третьих соседей соответственно, критический параметр системы равен  $k_B T / |J_1| = 0,95$ . Полученное значение незначительно (менее чем на 5%) отличается от критического параметра решеточного флюида с взаимодействием ближайших соседей на плоской треугольной решетке.

В работе [9] авторами было развито обобщенное квазихимическое приближение, позволяющее оценивать равновесные свойства решеточных систем с SALR-потенциалом взаимодействия на решетках произвольной геометрии. Данное приближение показало свою применимость для оценки равновесных свойств модели вне области существования в ней упорядоченной фазы.

В настоящей работе представлены результаты рассмотрения аналогичной модели решеточного флюида на плоской квадратной решетке и предложен геометрический параметр порядка, позволяющий однозначно определить существование в системе упорядоченных фаз.

**Модель и алгоритм моделирования.** Рассматриваемая в работе модель представляет собой решеточный флюид, состоящий из  $n$  частиц

на плоской квадратной решетке, содержащей  $N$  решеточных узлов. Частицы, занимающие ближайшие решеточные узлы и узлы, являющиеся соседями третьего порядка, взаимодействуют друг с другом. Энергии взаимодействий равны  $J_1$  и  $J_3$  соответственно. При этом полагается, что  $J_1 < 0$ , а  $J_3 > 0$ , что соответствует притяжению ближайших соседей и отталкиванию третьих.

Моделирование равновесных характеристик рассматриваемой решеточной системы в большом каноническом ансамбле по методу Монте-Карло может быть выполнено в рамках стандартного алгоритма Метрополиса [10].

В рамках данного алгоритма первоначально рассматривается произвольное распределение некоторого числа частиц по решетке, содержащей  $N = L^d$  узлов ( $L$  – линейный размер решетки,  $d$  – размерность пространства). Затем произвольным образом выбирается узел решетки. Если этот узел занят частицей, то эта частица изымается, если же он вакантен, то частица добавляется, и определяется изменение энергии  $\delta E_N$ . Если  $\delta E_N \leq 0$ , то новая конфигурация принимается, если  $\delta E_N > 0$ , то она принимается с вероятностью

$$W = \exp(-\beta \delta E_N). \quad (1)$$

Для этого случайным образом генерируется число  $W_0$  из интервала  $[0; 1]$ , и если  $W \geq W_0$ , то новая конфигурация принимается. В противном случае новая конфигурация отвергается, и система возвращается в прежнее состояние. Повторение описанной процедуры  $n$  раз, где  $n$  – число частиц на решетке, формирует один шаг алгоритма Монте-Карло (МКШ).

Поскольку первоначальное состояние моделируемой системы является произвольным и может существенно отличаться от равновесного, для перехода системы в состояние термодинамического равновесия требуется некоторое число МКШ. При определении средних значений термодинамических величин эти начальные шаги не учитываются.

При моделировании использовалась решетка, содержащая  $2^{14}$  решеточных узлов в сочетании с периодическими граничными условиями.

Полная длина процедуры моделирования состояла из 70 000 МКШ. При этом первые 20 000 МКШ отводились на процесс эквипризации и не учитывались при дальнейшем усреднении.

По аналогии с работами [6–8] принималось, что  $J_3 / |J_1| = 3$ . При этом в силу геометрии рассматриваемой решеточной системы  $z_1 = z_3 = 4$ .

**Результаты моделирования.** Предварительное моделирование на решетке, содержащей  $2^{10}$  решеточных узлов, показало, что при достаточно низких температурах, и, соответственно,

высоких значениях параметра взаимодействия  $|J_1|/k_B T$ , в зависимости от заданного значения химического потенциала  $\mu$  и выбранного значения параметра взаимодействия, в системе образуются упорядоченные фазы двух различных типов. Виды этих фаз представлены на рис. 1.

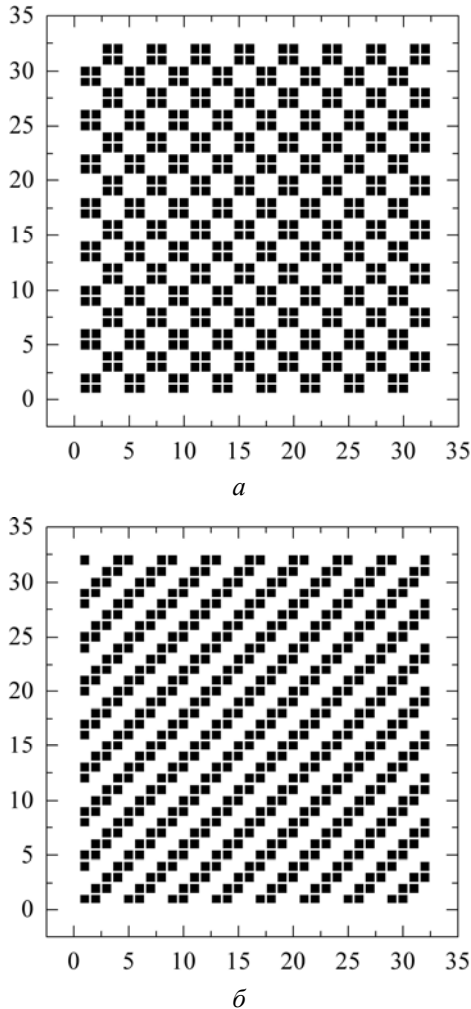


Рис. 1. Упорядоченные фазы решеточного флюида при  $\mu = 4|J_1|$  и  $|J_1|/k_B T = 2,0$  (а) и  $3,0$  (б)

Для описания обеих упорядоченных фаз может быть осуществлено разбиение исходной квадратной решетки на систему восьми идентичных квадратных подрешеток с постоянной  $2a\sqrt{2}$ , где  $a$  – решеточная постоянная исходной решетки. Каждая из введенных описанных образом подрешеток повернута на угол  $\pi/4$  относительно исходной.

В случае полной упорядоченности системы при концентрации решеточного флюида  $c$  равной  $0,5$  четыре подрешетки оказываются полностью заполненными, а четыре – полностью вакантными. Это позволяет определить параметр порядка системы  $\delta c$  как абсолютное значение разности максимальной и минимальной концентраций на подрешетках.

На рис. 2 представлена зависимость введенного параметра порядка от параметра взаимодействия при  $\mu = 4|J_1|$ , что соответствует концентрации  $c = 0,5$ . Анализ данной зависимости позволяет утверждать, что критический параметр системы  $|J_1|/k_B T_c$  равен  $0,655 \pm 0,005$ .

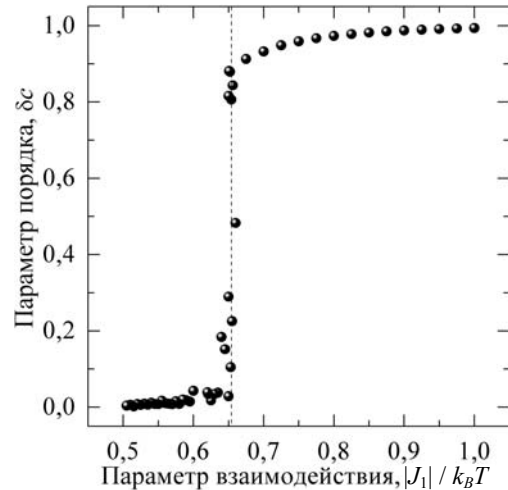


Рис. 2. Зависимость параметра порядка от параметра взаимодействия при  $\mu = 4|J_1|$

На рис. 3–5 представлены полученные в ходе моделирования по методу Монте-Карло зависимости равновесных параметров модели (параметра порядка  $\delta c$ , химического потенциала  $\mu$  и термодинамического фактора  $\chi_T$ ) от концентрации примесных частиц  $c$  при параметрах взаимодействия равных  $|J_1|/k_B T_c = 0,81875$  и  $0,54583$ , что соответствует температурам  $t = T/T_c = 0,8$  и  $1,2$  соответственно.

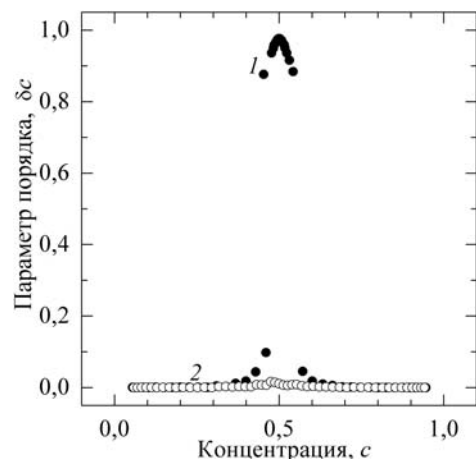


Рис. 3. Зависимость параметра порядка от концентрации примесных частиц:  $\beta|J_1| = 0,81875$  (1) и  $0,54583$  (2)

Можно отметить, что при  $t = 0,8$  и  $c = 0,50$  параметр порядка системы оказывается очень близким к единице, что свидетельствует о практически полной упорядоченности системы.

Также из данной зависимости можно оценить, что при выбранных термодинамических параметрах упорядоченная фаза существует в системе при концентрациях от 0,4 до 0,6.

При этом, как следует из представленной на рис. 4 зависимости химического потенциала системы от концентрации частиц, переход между неупорядоченной и упорядоченными фазами имеет вид фазового перехода 2-го рода.

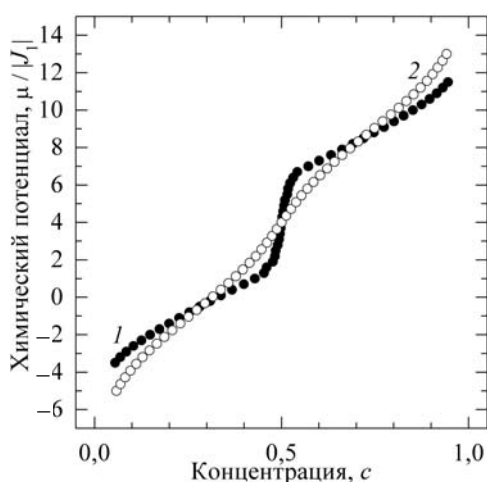


Рис. 4. Зависимость химического потенциала от концентрации примесных частиц:  $\beta|J_1| = 0,81875$  (1) и  $0,54583$  (2)

Резкий рост термодинамического фактора системы в области средних концентраций при температуре  $t = 0,8$  (см. рис. 5) может быть объяснен тем, что данная величина является обратной к сжимаемости системы, которая, очевидно, будет резко падать при переходе системы в упорядоченную фазу.

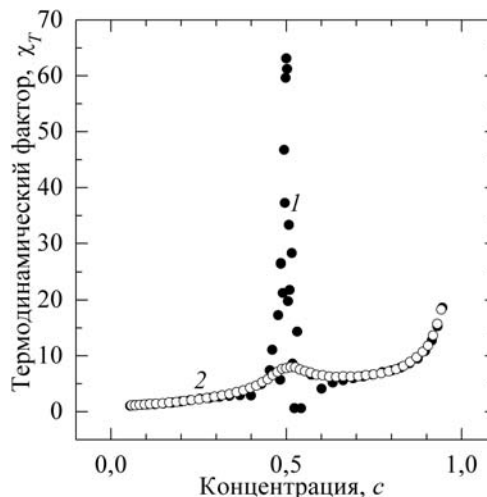


Рис. 5. Зависимость термодинамического фактора от концентрации примесных частиц:  $\beta|J_1| = 0,81875$  (1) и  $0,54583$  (2)

**Заключение.** Предложенный параметр порядка позволяет достаточно просто и наглядно определить существование в системе упорядоченной фазы. При его использовании критическая температура оказывается существенно (в 2,7 раза) большей по сравнению с решеточным флюидом с взаимодействием ближайших соседей на плоской квадратной решетке.

Применение данного параметра порядка дает принципиальную возможность для построения фазовой диаграммы исследуемой системы.

Публикация содержит результаты исследований, выполненных при грантовой поддержке Министерства образования Беларуси, а также научной программы Евросоюза HORIZON-2020 (проект AMD-734276-CONIN).

### Литература

1. Equilibrium cluster formation in concentrated protein solutions and colloids / Stradner A. [et al.] // Nature. 2004. Vol. 432. P. 492–495.
2. Quick clay and landslides of clayey soils / Khaldoun A. [et al.] // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 103. Art. no. 188301. 4 p.
3. Meyra A. G., Zarragoicoechea G. J., Kuz V. A. Self-organization of plants in a dryland ecosystem: Symmetry breaking and critical cluster size // Physical Review E. 2015. Vol. 91. Art. no. 052810.
4. Model colloidal fluid with competing interactions: Bulk and interfacial properties / A. J. Archer [et al.] // J. Chem. Phys. 2007. Vol. 126. Art. no. 014104. 14 p.
5. Enhanced density fluctuations in fluid systems with competing interactions / D. Pinia [et al.] // Chem. Phys. Lett. 200. Vol. 327. P. 209–215.
6. Pekalski J., Ciach A., Almarza N. G. Periodic ordering of clusters in a one-dimensional lattice model // J. Chem. Phys. 2013. Vol. 138. Art. no. 144903. 34 p.
7. Pekalski J., Ciach A., Almarza N. G. Periodic ordering of clusters and stripes in a two-dimensional lattice model. I. Ground state, mean-field phase diagram and structure of the disordered phases // J. Chem. Phys. 2014. Vol. 140. Art. no. 114701. 11 p.
8. Almarza N. G., Pekalski J., Ciach A. Periodic ordering of clusters and stripes in a two-dimensional lattice model. II. Results of Monte Carlo simulation // J. Chem. Phys. 2014. Vol. 140. Art. no. 164708. 12 p.
9. Грода Я. Г., Бильданов Э. Э., Вихренко В. С. Обобщенное квазихимическое приближение для решеточной системы с SALR-потенциалом // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 1. С. 14–20.

10. Uebing C., Gomer R. A Monte Carlo study of surface diffusion coefficients in the presence of adsorbate-adsorbate interactions // *The Journal of Chemical Physics*. 1991. Vol. 95, no. 10. P. 7626–7652.

### References

1. Stradner A., Sedgwick H., Cardinaux F., Poon W., Egelhaaf S., Schurtenberger P. Equilibrium cluster formation in concentrated protein solutions and colloids. *Nature*, 2004, vol. 432, pp. 492–495.
2. Khaldoun A., Moller P., Fall A., Wegdam G., de Leeuw B., Méheust Y., Fossum J. O., Bonn D. Quick clay and landslides of clayey soils. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, vol. 103, art. no. 188301. 4 p.
3. Meyra A. G., Zarragoicochea G. J., Kuz, V. A. Self-organization of plants in a dryland ecosystem: Symmetry breaking and critical cluster size. *Physical Review E*, 2015, vol. 91, art. no. 052810.
4. Archer A. J., Pini D., Evans R., Reatto L. Model colloidal fluid with competing interactions: Bulk and interfacial properties. *J. Chem. Phys.*, 2007, vol. 126, art. no. 014104. 14 p.
5. Pinia D., Jialin G., Parola A., Reatto L. Enhanced density fluctuations in fluid systems with competing interactions. *Chem. Phys. Lett.*, 2000, vol. 327, pp. 209–215.
6. Pekalski J., Ciach A., Almarza N. G. Periodic ordering of clusters in a one-dimensional lattice model. *J. Chem. Phys.*, 2013, vol. 138, art. no. 144903. 34 p.
7. Pekalski J., Ciach A., Almarza N. G. Periodic ordering of clusters and stripes in a two-dimensional lattice model. I. Ground state, mean-field phase diagram and structure of the disordered phases. *J. Chem. Phys.*, 2014, vol. 140, art. no. 114701. 11 p.
8. Almarza N. G., Pekalski J., Ciach A. Periodic ordering of clusters and stripes in a two-dimensional lattice model. II. Results of Monte Carlo simulation. *J. Chem. Phys.*, 2014, vol. 140, art. no. 164708. 12 p.
11. Groda Ya. G., Bildanau E. E., Vikhrenko V. S. Generalized quasi-chemical approximation for the lattice system with SALR-potential. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and mathematics. Informatics, 2017, no. 1, pp. 14–20 (In Russian).
10. Uebing C., Gomer R. A Monte Carlo study of surface diffusion coefficients in the presence of adsorbate-adsorbate interactions. *The Journal of Chemical Physics*, 1991, vol. 95, no. 10, pp. 7626–7652.

### Информация об авторах

**Грода Ярослав Геннадьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики и конструирования. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: groda@belstu.by

**Бильданов Эльдар Эмирович** – магистрант. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: el95dar@icloud.com

**Гапанюк Дмитрий Владимирович** – кандидат физико-математических наук, заместитель декана факультета химической технологии и техники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: gapdm@mail.ru

### Information about the authors

**Groda Yaroslav Gennad'yevich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Mechanics and Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: groda@belstu.by

**Bildanau Eldar Emirovich** – Master's degree student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: el95dar@icloud.com

**Gapanjuk Dmitry Vladimirovich** – PhD (Physics and Mathematics), Vice-dean of the Chemical Technology and Engineering Faculty. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gapdm@mail.ru

Поступила 28.11.2017

УДК 531.19

**Г. С. Бокун<sup>1</sup>, М. Ф. Головко<sup>2</sup>, В. С. Вихренко<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет<sup>2</sup>Институт физики конденсированных систем НАН Украины (г. Львов, Украина)**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА В ТВЕРДОМ ЭЛЕКТРОЛИТЕ  
МЕЖДУ ПЛОСКИМИ ЭЛЕКТРОДАМИ**

Для вычисления распределения электрического потенциала использовано его представление через бинарную функцию распределения, позволившее выделить коррелированную и некоррелированную его составляющие. Некоррелированная составляющая определена через напряженность электрического поля, которая, в свою очередь, была выражена через интеграл от распределения плотности заряда по пространственной переменной. Это позволило представить некоррелированную часть энергии взаимодействия зарядов через интеграл от квадрата градиента соответствующей части потенциала. Для нахождения коррелированной составляющей использована аппроксимация бинарной функции распределения, широко применяемая для расчетов в рамках среднесферического приближения, а также модифицированное выражение для радиуса Дебая. В Фурье-пространстве получено линейное соотношение между вариациями плотности распределения заряда и электрического потенциала с коэффициентом, зависящим от волнового вектора. В длинноволновом приближении это соотношение переходит в уравнение Пуассона. При включении внешнего поля сформулировано выражение для электрохимического потенциала, приводящее к уравнению для распределения плотности заряда по объему системы.

**Ключевые слова:** твердый электролит, неоднородная система, электрический потенциал, электрохимический потенциал, распределение заряда, корреляционные функции, кулоновское взаимодействие.

**G. S. Bokun<sup>1</sup>, M. F. Holovko<sup>2</sup>, V. S. Vikhrenko<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Belarusian State Technological University<sup>2</sup>Institute for Condensed Matter Physics of NAS of Ukraine (Lviv, Ukraine)**POTENTIAL DISTRIBUTION IN SOLID ELECTROLYTE  
BETWEEN FLAT ELECTRODES**

The electric potential is represented through a binary distribution function that made it possible to separate correlated and uncorrelated components of it. The uncorrelated component is determined through the electric field strength, which, in turn, was expressed in terms of the integral of the charge density distribution over the spatial variable. This made it possible to represent the uncorrelated part of the interaction energy of charges through the integral of the square of the gradient of the corresponding part of the potential. To find the correlated component, the approximation of the binary distribution function, which is widely used for calculations within the framework of the mean-spherical approximation, is used, as well as a modified expression for the Debye radius. In Fourier space, a linear relationship is obtained between the variations of the charge density distribution and the electric potential with a coefficient that depends on the wave vector. In the long-wavelength approximation this relation reproduces the Poisson equation. When the external field is turned on, an expression for the electrochemical potential is formulated, resulting in an equation for the charge density distribution over the volume of the system.

**Key words:** solid electrolyte, nonhomogeneous system, electric potential, electrochemical potential, charge distribution, correlation functions, Coulomb interaction.

**Введение.** Керамические электролиты и ионтеркаляционные соединения представляют собой класс технологически важных материалов, которые широко используются в устройствах хранения и преобразования энергии, электрохимических датчиках и других подобных системах [1–5]. Эти электролиты являются сложными объектами для понимания процессов хранения и переноса заряда на атомарном уровне ввиду наличия дальнедействующих кулоновских взаимодействий, высокодефектной кристаллической структуры и неоднородностей

из-за присутствия зерен, межзеренных прослоек и электродов.

Широкий спектр теоретических методов исследования ионных систем включает в себя различные модификации уравнения Пуассона – Больцмана [6, 7], теории функционала плотности [8, 9], метода коллективных переменных [10], теоретико-полевых подходов [11]. Наиболее популярными являются методы, основанные на приближении среднего поля, поскольку позволяют анализировать окончательные результаты в аналитическом виде [12]. Вместе с

тем, необходимо понимание границ применимости теорий среднего поля и иметь возможность исследовать эффекты межчастичных корреляций в случаях, когда они существенны. Настоящая работа посвящена учету корреляций в неоднородных твердоэлектролитных системах.

**Представление электрического потенциала суммой коррелированной и некоррелированной составляющих.** Потенциал, действующий на  $i$ -ю частицу и создаваемый носителями заряда того же знака в пространстве ионного кристаллического проводника, определяется выражением

$$r_B \sum_{j \neq i} \int_{v_j} \frac{1}{|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i|} F_1(\mathbf{q}_j) d\mathbf{q}_j + r_B \sum_{j \neq i} \int_{v_j} \frac{h_2(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)}{|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i|} F_1(\mathbf{q}_j) d\mathbf{q}_j, \quad (1)$$

где  $r_B = \beta e^2 / 4\pi\epsilon\epsilon_0$  – радиус Бьеррума;  $e$  – заряд частиц;  $\epsilon$  и  $\epsilon_0$  – диэлектрическая и электрическая постоянные соответственно;  $F_1(\mathbf{q}_j)$  – унарная,  $h_2(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)$  – корреляционная функции;

$$h_2(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = [F_2(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) / F_1(\mathbf{q}_j)F_1(\mathbf{q}_i)] - 1, \quad (2)$$

$F_2(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)$  – бинарная функция распределения.

Распределение частиц с противоположным знаком заряда характеризуется только унарной функцией, которая задается свойствами и структурой кристалла, и можно предположить, что их вклад в суммарный потенциал полностью компенсирует первое слагаемое в квадратных скобках уравнения (1), так что для расчета суммарного потенциала применимо выражение

$$\psi(\mathbf{q}_i) = r_B \sum_{j \neq i} \int_{v_j} \frac{F_1(\mathbf{q}_j)}{|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i|} h_2(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) d\mathbf{q}_j. \quad (3)$$

В связи с тем, что  $F_1(\mathbf{q}_j)$  в однородной кристаллической среде – периодическая функция,  $\psi(\mathbf{q}_i)$  также будет представлять собой периодическую функцию.

Рассмотрим трансформацию уравнений (1)–(3) при наложении внешнего поля вдоль выделенного ося  $z$  направления. Основное влияние на электрический потенциал будет оказывать перераспределение плотности мобильных частиц, так что в первом приближении можно принять

$$\delta F_1(\mathbf{q}_i) \neq 0, \quad \delta h_2(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) \approx 0, \quad (4)$$

пренебрегая при этом изменением симметрии одночастичной функции распределения и вариациями двухчастичной корреляционной функ-

ции. Условия (4) могут быть в дальнейшем уточнены учетом изменения симметрии функций распределения.

Принимая за основу соотношения (4), запишем в соответствии с выражениями (1) и (3) изменение электрического потенциала, обусловленное перераспределением подвижных носителей заряда

$$\delta\psi(\mathbf{q}_i) = \delta\psi_1(\mathbf{q}_i) + \delta\psi_2(\mathbf{q}_i), \quad (5)$$

где

$$\delta\psi_1(\mathbf{q}_i) = r_B \sum_{j \neq i} \int_{v_j} \frac{\delta F_1(\mathbf{q}_j)}{|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i|} d\mathbf{q}_j, \quad (6)$$

$$\delta\psi_2(\mathbf{q}_i) = r_B \sum_{j \neq i} \int_{v_j} \frac{\delta F_1(\mathbf{q}_j)}{|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i|} h_2(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) d\mathbf{q}_j. \quad (7)$$

В соотношениях (6) и (7) суммирование осуществляется в первом случае по всем ячейкам за исключением  $i$ -й, а во втором – только по ближайшему окружению ( $z$  ближайших ячеек) выделенной  $i$ -й ячейки.

Некоррелированная составляющая электрического потенциала. Рассмотрим отдельно расчет слагаемых в (6) и (7). В соответствии с выражением (6) можно записать:

$$\delta\psi_1(\mathbf{q}_i) = \sum_{j \neq i}^M \psi_{1j}(\mathbf{q}_i), \quad (8)$$

где парциальный потенциал

$$\psi_{1j}(\mathbf{q}_i) = r_B \int_{v_j} \frac{\delta F_1(\mathbf{q}_j)}{|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i|} d\mathbf{q}_j. \quad (9)$$

Для вычисления парциального потенциала используем теорему Гаусса. Полагая в соответствии со сказанным выше, что распределение  $\delta F_1(\mathbf{q}_j)$  центрально-симметрично относительно  $j$ -узла, используя известное выражение для потенциала однородно заряженной сферы, после разбиения объема ячейки на бесконечно тонкие сферические концентрические слои и суммирования по ним найдем

$$\psi_{1j}(\mathbf{q}_i) = r_B \frac{\delta\rho_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{0j}|}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{q}_{0j}$  обозначает положение центра ячейки с номером  $j$ , а  $\delta\rho_j$  – величина заряда в  $j$ -й ячейке

$$\delta\rho_j = \int_{v_j} \delta F_1(\mathbf{q}_j) d\mathbf{q}_j. \quad (11)$$

Тогда в соответствии с соотношением (6) запишем

$$\delta\psi_1(\mathbf{q}_i) = r_B \sum_{j \neq i}^M \frac{\delta\rho_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{0j}|}. \quad (12)$$

Полученная формула (12) показывает, что  $\delta\psi_1(\mathbf{q}_i)$  не зависит от характера распределения частиц внутри ячеек, передаваемого функцией  $F_1(\mathbf{q}_j)$ , а определяется лишь нормировкой последней  $\delta\rho_j$ , равной отклонению среднего числа заполнения  $j$  узла от его значения при отсутствии внешнего поля. Следовательно, для расчета  $\delta\psi_1(\mathbf{q}_i)$  можно перейти к решеточной модели, полагая, что в  $j$ -м узле решетки находится точечный заряд величиной  $\delta\rho_j$ . Система этих точечных зарядов, фиксированных в точках  $\mathbf{q}_{0j}$ , создает кристаллический потенциал (12).

Сходимость суммы в физических задачах обеспечивается условиями электронейтральности и ослабления корреляции:

$$\sum_{j=1}^M \delta\rho_j = 0, \quad \lim_{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{0j}| \rightarrow \infty} \delta\rho_j = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим применение полученных результатов к твердому электролиту, который находится между параллельными плоскими электродами, перпендикулярными оси аксиальной симметрии  $z$  кристалла.

В силу отмеченной симметрии все  $\delta\rho_j$ , расположенные в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ , равны между собой. В результате система моделируется множеством конденсаторных плоскостей. Не нарушая общности, для каждой плоскости можно ввести поверхностную плотность заряда

$$\sigma_j = \frac{\delta\rho_j}{b^2}, \quad (14)$$

где  $b$  – параметр решетки, тогда при расчете согласно уравнению (12) дискретное суммирование заменим интегрированием по плотности, обозначив переменной  $z$  расстояние от точки  $\mathbf{q}_i$  до  $j$ -й плоскости.

Выполняя интегрирование в каждой плоскости с последующим суммированием по плоскостям, перепишем уравнение (6) в виде

$$\delta\psi_1(\mathbf{q}_i) = \sum_z \psi_{1z}(\mathbf{q}_i). \quad (15)$$

В соотношении (15) шаг изменения переменной  $z$  совпадает с периодом решетки. Соответственно

$$\begin{aligned} \psi_{10}(z) &= \sigma(0)r_B \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \frac{u du}{\sqrt{z^2 + u^2}} = \\ &= 2\pi\sigma(0)r_B (\sqrt{R^2 + z^2} - z - R), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $R$  – радиус, характеризующий переменный размер конденсаторной пластины и вычитание  $R$  в скобках в выражении (16) использовано для перенормировки потенциала, обеспечивающего его нулевое значение при  $R \rightarrow \infty$ . Для напряженности поля  $E(z)$  будет иметь место результат

$$E_{10}(z) = -\frac{\partial\psi(z)}{\partial z} = \frac{\sigma(0)r_B}{2} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right), \quad (17)$$

что в пределе больших  $R$  позволяет записать

$$\psi_{10}(z) = 2\pi\sigma(0)r_B z. \quad (18)$$

Таким образом, изменение поля в заданной точке  $z$  следует находить по формуле

$$E_1(z_k) = \frac{2\pi r_B}{h^2} \left( \sum_{i=0}^{k-1} \delta\rho_i - \sum_{i=k+1}^N \delta\rho_i \right). \quad (19)$$

В формуле (19) имеется в виду, что все межэлектродное пространство представлено плоскостями, перпендикулярными оси  $z$ ; положение  $k$ -й плоскости характеризуется координатой  $z_k$ .

Переходя к представлению непрерывной среды, находим, что напряженность в текущей точке  $z$ , расположенной между электродными пластинами, и учитывая, что из условия симметрии  $E(0) = 0$ , определяется выражением

$$E(x) = -\frac{4\pi r_B}{h^3} \int_z^{L/2} \delta\rho(u) du. \quad (20)$$

Формула (20) записана для случая антисимметричного распределения заряда относительно пластин, расстояние между которыми равно  $L$ . Начало отсчета совмещено с центром симметрии системы. Тогда для электрического потенциала получим

$$\delta\psi_1(s) = \frac{4\pi r_B}{h^3} \int_0^s dz \int_z^{L/2} \delta\rho(u) du. \quad (21)$$

После изменения порядка интегрирования приходим к более удобному результату

$$\delta\psi_1(s) = \frac{4\pi r_B}{h^3} \left( \int_0^s z \delta\rho(z) dz + \int_s^L \delta\rho(z) dz \right), \quad (22)$$

который может быть использован, в том числе и в дискретном варианте.

Отметим, что  $\delta\psi_1(s)$  определяет некоррелированную часть энергии кулоновского взаимодействия в соответствии с выражением

$$U = \frac{1}{2\beta} \sum_{i=1}^M \int_{V_i} \delta\psi_1(\mathbf{q}_i) \delta F(\mathbf{q}_i) d\mathbf{q}_i. \quad (23)$$



Множитель  $1/2$  в формуле (23) обусловлен тем, что имеется в виду энергия межчастичного взаимодействия, а не энергия, создаваемая внешними источниками.

Принимая во внимание уравнение Пуассона

$$\Delta\psi(\mathbf{q}) = -4\pi r_B \delta F_1(\mathbf{q}), \quad (24)$$

после подстановки в выражение (23) и интегрирования по частям представим рассматриваемую энергию через ее плотность

$$U = \frac{1}{2\beta r_B} \sum_{i=1}^M \int_{V_i} (\nabla \delta\psi_1(\mathbf{q}_i))^2 d\mathbf{q}_i. \quad (25)$$

Для нахождения коррелированной составляющей потенциала рассмотрим расчет слагаемого  $\delta\psi_2(\mathbf{q}_i)$ , входящего в суммарный потенциал (5). При вычислении  $\delta\psi_2(\mathbf{q}_i)$  согласно соотношению (7) следует учесть, что в него входит обрезанный множитель – корреляционная функция  $h_2(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)$ , экспоненциально стремящаяся к нулю с увеличением расстояния  $|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|$ , что исключает проблему расходимости, обусловленную дальнедействием кулоновского потенциала. Полагая, что  $h_2(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)$  является сферически симметричной функцией межчастичного расстояния  $|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|$ , запишем Фурье-преобразование соотношения (7):

$$\delta\psi_2(k) = r_B (2\pi)^{3/2} \tilde{h}_2(k) \delta F_1(k), \quad (26)$$

где  $\tilde{h}_2(k)$  – Фурье-образ функции

$$\tilde{h}_2(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = \tilde{h}_2(r) = h_2(r) / r, \quad r = |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|. \quad (27)$$

Для системы с кулоновским отталкиванием эта функция в простейшей аппроксимации может быть задана соотношением [13, 14]:

$$h_2(r) = \begin{cases} -1, & r < d, \\ -\beta U(r), & r > d, \end{cases} \quad (28)$$

$$U(r) = \frac{r_B}{r} \exp(-vr), \quad v = r_D^{-1},$$

где  $d$  – эффективный диаметр частицы,  $r_D$  – модифицированный радиус Дебая, определяемый в случае неоднородной среды выражением [15, 16]:

$$r_D = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0 \hbar^3}{\beta e^2 [c_i(1-c_i)c_j(1-c_j)]^{1/2}}}. \quad (29)$$

С учетом аппроксимации (28) для Фурье-образа переопределенной корреляционной функции запишем

$$\tilde{h}_2(k) = \tilde{h}_2^{(1)}(k) + \tilde{h}_2^{(2)}(k), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{h}_2^{(1)}(k) &= \frac{-1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^d \frac{2\pi r^2 dr}{r} \int_{-1}^1 e^{ikr \cos\theta} d(\cos\theta) = \\ &= -\frac{1}{k^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 - \cos kd), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_2^{(2)}(k) &= \frac{-r_B}{(2\pi)^{3/2}} \int_d^\infty 2\pi r e^{-vr} dr \int_{-1}^1 e^{ikr \cos\theta} d(\cos\theta) = \\ &= -\frac{4\pi r_B}{(2\pi)^{3/2}} \int_d^\infty \frac{\sin(kr)}{kr} \exp(-vr) dr. \end{aligned} \quad (32)$$

В результате Фурье-образ корреляционной функции

$$\tilde{h}_2(k) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} S(k) \quad (33)$$

выражается через специфический структурный фактор системы

$$S(k) = \frac{(1 - \cos(kd))}{2k^2} + r_B \int_d^\infty \frac{\sin(kr)}{kr} e^{-vr} dr. \quad (34)$$

Таким образом, согласно определению (26) Фурье-образ корреляционной составляющей потенциала пропорционален Фурье-образу флуктуаций плотности

$$\delta\psi_2(k) = -r_B S(k) \delta F_1(k). \quad (35)$$

**Соотношение между вариациями плотности и электрического потенциала.** Для некоррелированной составляющей согласно соотношению (24) будем иметь

$$k^2 \delta\psi_1(k) = 4\pi r_B \delta F_1(k). \quad (36)$$

Следовательно, в Фурье-пространстве суммарный потенциал и плотность заряда связаны соотношением

$$\delta F_1(k) = \frac{k^2 \delta\psi(k)}{4\pi r_B (1 - S(k)k^2)}, \quad (37)$$

числитель которого соответствует уравнению Пуассона.

При малых волновых векторах выражение (37) аппроксимируется соотношением

$$\delta F_1(k) = \frac{k^2 \delta\psi(k)}{4\pi r_B} (1 + S_0 k^2), \quad (38)$$

где согласно (34)

$$S_0 = \frac{d^2}{4} + 4\pi r_B r_D e^{-vd}. \quad (39)$$

Для установления распределения электрического потенциала, индуцированного внешним воздействием  $\delta\psi^{\text{ext}}(z)$ , уравнение (38) необходимо замкнуть условием постоянства электрохимического потенциала. При достаточно малых внешних полях для последнего можно записать линейное представление

$$\beta\mu = \beta\mu_{\text{ch}} + \beta\gamma\delta\rho(z) + \delta\psi(z) + \delta\psi^{\text{ext}}(z), \quad (40)$$

где  $\beta\mu_{\text{ch}}$  – безразмерное значение химического потенциала в однородной среде в отсутствие внешнего поля;  $\gamma$  – термодинамический фактор.

Из условия постоянства химического потенциала в состоянии равновесия вытекает уравнение

$$\beta\gamma\delta\rho(z) + \delta\psi(z) + \delta\psi^{\text{ext}}(z) = 0, \quad (41)$$

которое с учетом (24) замыкает уравнение (37).

**Заключение.** Нахождение распределения концентрации заряженных частиц в системе, неоднородность которой обусловлена наличием границ, на которых могут быть приложены внешние воздействия, должно базироваться на условии постоянства электрохимического потенциала во всем объеме системы. Для вычисления распределения электрического потенциала использовано его представление через бинарную функцию распределения, позволившее выделить коррелированную и некоррелированную его составляющие.

Некоррелированная составляющая определена через напряженность электрического поля,

которая, в свою очередь, была выражена через интеграл от распределения плотности заряда по пространственной переменной. Это позволило представить некоррелированную часть энергии взаимодействия зарядов через интеграл от квадрата градиента соответствующей части потенциала.

Для нахождения коррелированной составляющей использована аппроксимация бинарной функции распределения, широко применяемая для расчетов в рамках среднесферического приближения, а также модифицированное выражение для радиуса Дебая. В результате в Фурье-пространстве получено линейное соотношение между вариациями плотности распределения заряда и электрического потенциала с коэффициентом, зависящим от волнового вектора. В длинноволновом приближении это соотношение переходит в уравнение Пуассона. При включении внешнего поля сформулировано выражение для электрохимического потенциала, приводящее к уравнению для распределения плотности заряда по объему системы.

Публикация содержит результаты исследований, выполненных при грантовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Беларуси (конкурсный проект № Ф16К-614) и Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (конкурсный проект № Ф73/113-2017), а также научной программы Евросоюза HORIZON-2020 (проект AMD-734276-CONIN) и Министерства образования Беларуси.

### Литература

1. Lu M., Beguin F., Frackowiak E. Supercapacitors: Materials, Systems and Applications. New Jersey: John Wiley & Sons, 2013. 539 p.
2. Progress in material selection for solid oxide fuel cell technology: A review / N. Mahato [et al.] // Progr. Mater. Sci. 2015. Vol. 72. P. 141–337.
3. Canchaya J. G. S., Furtado N. C., Taft C. A. Graphene and its applications in lithium ion batteries // Current Phys. Chem. 2015. Vol. 5. P. 223–254.
4. A review of lithium and non-lithium based solid state batteries / J. G. Kim [et al.] // Journ. Power Sources. 2015. Vol. 282. P. 299–322.
5. A review of high-temperature electrochemical sensors based on stabilized zirconia / T. Liu [et al.] // Solid State Ionics. 2015. Vol. 283. P. 91–102.
6. Towards an understanding of induced-charge electrokinetics at large applied voltages in concentrated solutions / M. Z. Bazant [et al.] // Adv. Colloid Interface Sci. 2009. Vol. 152. P. 48–131.
7. Sugioka H. Ion-Conserving Modified Poisson–Boltzmann Theory Considering a Steric Effect in an Electrolyte // Journ. Phys. Soc. Japan. 2016. Vol. 85. Art. no. 124006.
8. Evans R. Density functionals in the theory of nonuniform fluids. In: Fundamentals of inhomogeneous fluids. New York: Marcel Dekker, 1992. P. 85–175.
9. Forsman J., Woodward C. E., Szparaga R. Classical Density Functional Theory of Ionic Solutions. In: Computational Electrostatics for Biological Applications. Switzerland: Springer International Publishing, 2015. P. 17–38.
10. Юхновский И. Р., Головки М. Ф. Статистическая теория классических равновесных систем. Киев: Наукова думка, 1980. 372 с.
11. Caprio D. di, Stafiej J., Badiali J. P. Field theory for ionic systems. From fluctuations and structure at a hard wall to thermodynamics // Electrochim. Acta. 2003. Vol. 48. P. 2967–2974.

12. Fifty years of liquid state physics / A. Ciach [et al.] // *Journ. Phys.: Condens. Matter*. 2016. Vol. 28, Art. no. 410301.
13. Blum L. Mean spherical model for asymmetric electrolytes. I. Method of solution // *Mol. Phys.* 1975. Vol. 30. P. 1529–1535.
14. Blum L., Hoyer J. S. Mean Spherical Model for Asymmetric Electrolytes. 2. Thermodynamic Properties and the Pair Correlation Function // *Journ. Chem. Phys.* 1977. Vol. 81. P. 1311–1316.
15. Бокун Г. С., Головка М. Ф., Вихренко В. С. Экранирование кулоновского взаимодействия в кристаллических материалах // *Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика*. 2017. № 2. С. 50–55.
16. Chemical Potential Distribution of Nonhomogeneous Solid Electrolyte / G. Bokun [et al.] // *Proc. 2017 IEEE 7<sup>th</sup> Internat. Conf. Nanomat.: Applications & Properties (NAP-2017)*. Part 3. Paper 03NE16. C. 1–16.

### References

1. Lu M., Beguin F., Frackowiak E. *Supercapacitors: Materials, Systems and Applications*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2013. 539 p.
2. Mahato N., Banerjee A., Gupta A., Omar Sh., Balani K. Progress in material selection for solid oxide fuel cell technology: A review. *Progr. Mater. Sci.*, 2015, vol. 72, pp. 141–337.
3. Canchaya J. G. S., Furtado N. C., Taft C. A. Graphene and its applications in lithium ion batteries. *Current Phys. Chem.*, 2015, vol. 5, pp. 223–254.
4. Kim J. G., Mukherjee S., Son B., Park S., Bates A., Choi M. J., Shuppert N. D., Kwon O., Chung H. Y. A review of lithium and non-lithium based solid state batteries. *Journ. Power Sources*, 2015, vol. 282, pp. 299–322.
5. Liu T., Zhang X., Yuan L., Yu J. A review of high-temperature electrochemical sensors based on stabilized zirconia. *Solid State Ionics*, 2015, vol. 283, pp. 91–102.
6. Bazant M. Z., Kilic M. S., Storey B. D., Ajari A. Towards an understanding of induced-charge electrokinetics at large applied voltages in concentrated solutions. *Adv. Colloid Interface Sci.*, 2009, vol. 152, pp. 48–131.
7. Sugioka H. Ion-Conserving Modified Poisson–Boltzmann Theory Considering a Steric Effect in an Electrolyte. *Journ. Phys. Soc. Japan*, 2016, vol. 85, art. no. 124006.
8. Evans R. Density functionals in the theory of nonuniform fluids. In: *Fundamentals of inhomogeneous fluids*. New York: Marcel Dekker, 1992, pp. 85–175.
9. Forsman J., Woodward C. E., Szparaga R. Classical Density Functional Theory of Ionic Solutions. In: *Computational Electrostatics for Biological Applications*. Switzerland: Springer International Publishing, 2015. Pp. 17–38.
10. Yukhnovskii I. R., Holovko M. F. *Statisticheskaya teoriya klassicheskikh ravnovesnykh system* [Statistical Theory of Classical Equilibrium Systems]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1980. 372 p.
11. Caprio D. di, Stafiej J., Badiali J. P. Field theory for ionic systems. From fluctuations and structure at a hard wall to thermodynamics. *Electrochim. Acta*, 2003, vol. 48, pp. 2967–2974.
12. Ciach A., Hall C. K., Kahl G., Lomba E. Fifty years of liquid state physics. *Journ. Phys.: Condens. Matter*, 2016, vol. 28, art. no. 410301.
13. Blum L. Mean spherical model for asymmetric electrolytes. I. Method of solution. *Mol. Phys.* 1975, vol. 30, pp. 1529–1535.
14. Blum L., Hoyer J. S. Mean Spherical Model for Asymmetric Electrolytes. 2. Thermodynamic Properties and the Pair Correlation Function. *Journ. Chem. Phys.*, 1977, vol. 81, pp. 1311–1316.
15. Bokun G. S., Holovko M. F., Vihrenko V. S. Screening of the coulomb interaction in crystalline materials. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 50–55 (In Russian).
16. Bokun G. S., Groda Ya. G., Lasovsky R. N., Vihrenko V. S. Chemical Potential Distribution of Nonhomogeneous Solid Electrolyte. *Proc. 2017 IEEE 7<sup>th</sup> Internat. Conf. Nanomat.: Applications & Properties (NAP-2017)*, part 3, paper 03NE16, pp. 1–5.

### Информация об авторах

**Бокун Георгий Станиславович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики и конструирования. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: gBokun@mail.ru

**Головка Мирослав Федорович** – доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАН Украины, профессор, главный научный сотрудник отдела теории мягкой материи. Институт

физики конденсированных систем НАН Украины (79011, г. Львов, ул. Свенцицкого, 1, Украина). E-mail: holovko@icmp.lviv.ua

**Вихренко Вячеслав Степанович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической механики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: vvikhre@mail.ru

#### **Information about the authors**

**Bokun Georgii Stanislavovich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Mechanics and Design. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gBokun@mail.ru

**Holovko Myroslav Fedorovich** – DSc (Physics and Mathematics), Corresponding Member of the NAS of Ukraine, Professor, Chief Researcher, the Department of Soft Matter Theory. Institute for Condensed Matter Physics of the NAS of Ukraine (1, Svientsitskiy str., 79011, Lviv, Ukraine). E-mail: holovko@icmp.lviv.ua

**Vikhrenko Vyacheslav Stepanovich** – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Professor, the Department of Theoretical Mechanics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vvikhre@mail.ru

*Поступила 28.11.2017*

УДК 535.37+541.65+543.4

**Н. Н. Крук<sup>1</sup>, Д. В. Кленецкий<sup>1</sup>, В. Маес<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет

<sup>2</sup>Хассельтский университет (г. Дипенбек, Бельгия)

## КВАНТОВО-ХИМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОЛЕКУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ АЛКИЛИРОВАННЫХ КОРРОЛОВ

Квантово-химическими методами рассчитана молекулярная конформация тетрапиррольного макроцикла для семейства алкилированных производных свободного основания коррола. Количество присоединенных алкильных заместителей и их расположение на периферии макроцикла определяют характер и степень неплоскостных искажений макроцикла. Степень неплоскостных искажений макроцикла охарактеризована с использованием параметра  $\Delta 23$ , который представляет собой среднеквадратичное отклонение одного атома от средней плоскости макроцикла  $7C$ . Обнаружено, что по величине параметра  $\Delta 23$  все исследованные соединения могут быть разделены на четыре группы: а)  $\Delta 23 = 0,267-0,294 \text{ \AA}$ , у которых стерические взаимодействия локализованы на отдельных пиррольных кольцах; б)  $\Delta 23 = 0,304-0,326 \text{ \AA}$ , у которых формируются стерически напряженные домены из пары пиррольных колец; в)  $\Delta 23 = 0,377-0,380 \text{ \AA}$ , у которых стерически напряженный домен включает все три *мезо*-положения макроцикла; г)  $\Delta 23 = 0,413 \text{ \AA}$  – ундеказамещенный коррол, у которого 11 алкильных групп формируют один стерически напряженный кольцевой домен. Анализ величин отдельных структурных элементов, характеризующих молекулярную конформацию макроцикла, показал, что ряд из них изменяется параллельно изменениям параметра  $\Delta 23$ . Вместе с тем обнаружено, что амплитуда других структурных возмущений не зависит от общей степени неплоскостного искажения макроцикла, а определяется локальным взаимодействием нескольких соседних заместителей. К таковым относятся величины двух из четырех двугранных углов между плоскостями пиррольных колец и длина  $C_\alpha-C_\alpha$  связи в дипиррольном фрагменте.

**Ключевые слова:** коррол, неплоскостные искажения, периферическое замещение, алкилирование.

**M. M. Kruk<sup>1</sup>, D. V. Klenitsky<sup>1</sup>, W. Maes<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Belarusian State Technological University

<sup>2</sup>Hasselt University (Diepenbeek, Belgium)

## QUANTUM-CHEMICAL STUDY OF THE MOLECULAR STRUCTURE OF ALKYLATED CORROLES

Molecular conformation of the tetrapyrrolic macrocycle for the family of alkylated derivatives of the free base corroles has been calculated by quantum-chemical methods. A number of the attached alkyl substituents and their positioning at the periphery of macrocycle determine the character and degree of the nonplanar macrocycle distortions. The degree of the nonplanar macrocycle distortions was treated as the  $\Delta 23$  parameter, which is the average least-square deviation from the mean macrocycle plane  $C7$  per one macrocycle atom. It was found that all the studied compounds can be divided into four groups based on the value of the  $\Delta 23$  parameter: a)  $\Delta 23 = 0.267-0.294 \text{ \AA}$  for those compounds where steric hindrances localize on the separate pyrrole rings; b)  $\Delta 23 = 0.304-0.326 \text{ \AA}$  for those, where the sterically hindered domains are formed, which consisting of two pyrrole rings; c)  $\Delta 23 = 0.377-0.380 \text{ \AA}$  for those, where the one sterically hindered domain includes all three *meso*-positions of macrocycle; d)  $\Delta 23 = 0.413 \text{ \AA}$  for undecasubstituted corrole, where all the eleven alkyl groups form one sterically hindered annular domain. The analysis of the separate structural elements characterizing the macrocycle molecular conformation demonstrates that changes of some of them parallel the  $\Delta 23$  parameter trend. At the same time it was found that amplitude of the other structural perturbations does not depend on the overall degree of macrocycle distortion, but depends on the local interaction of some neighboring substituents. The two of four dihedral angles values between the pyrrole plane rings and the  $C_\alpha-C_\alpha$  bond length in the dipyrrole unit belong to them.

**Key words:** corrole, nonplanar distortions, peripheral substitution, alkylation.

**Введение.** Молекулы корролов, как известно, относятся к группе так называемых сокращенных тетрапиррольных макроциклических соединений, поскольку один из атомов углерода в *мезо*-положении отсутствует и два соседних пиррольных фрагмента соединены  $C_a-C_a$  связью. Из-за сокращения макроцикла происходит изменение в цепи альтернирования связей  $\pi$ -сопряженного макроциклического контура. Согласно правилу Хюккеля, циклическая  $\pi$ -электронная система является ароматичной при условии, что она содержит  $4n + 2$  электронов (где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ). При переходе к сокращенному макроциклу корролов это правило удовлетворяется в результате того, что он содержит три пиррольных и одно пирролениновое кольцо, по сравнению с порфириновым макроциклом, содержащим по два пиррольных и пирролениновых кольца. В результате молекула свободного основания коррола содержит в ядре три протона, а не два, как молекулы свободных оснований порфиринов. Три протона не могут разместиться в плоскости ядра тетрапиррольного макроцикла, что влечет за собой нарушение планарного строения макроцикла корролов. Вместе с тем в сокращенном макроцикле корролов уменьшается расстояние между двумя соседними пиррольным и пирролениновым кольцами, что создает условия для формирования внутримолекулярной водородной связи, которая, в свою очередь, способствует планаризации тетрапиррольного макроцикла. Таким образом, в результате воздействия двух факторов формируется непланарная конформация макроцикла. В то же время молекулярная конформация макроцикла коррола будет зависеть от типа периферических заместителей и архитектуры замещения, которые, как показано для порфиринов [1], способны существенно изменить молекулярную конформацию молекулы.

Степень неплоскостных искажений макроцикла корролов может быть охарактеризована с использованием параметра  $\Delta 23$ , который представляет собой среднеквадратичное отклонение одного атома от средней плоскости макроцикла. Ранее нами было предложено [2], что средняя плоскость макроцикла должна быть выбрана с учетом того, что не все атомы макроцикла являются эквивалентными, и она должна быть одной и той же для двух NH таутомеров, т. е. должна оставаться инвариантной при NH таутомеризации, чтобы анализ геометрических параметров молекулы выполнялся в одном и том же базисе. Таким требованиям удовлетворяет плоскость, определяемая как плоскость с минимальными среднеквадратичными отклонениями макроциклических атомов  $C_1, C_4, C_5, C_6, C_9, C_{16}$ , и  $C_{19}$ , согласно номенклатуре IUPAC

(далее по тексту – 7C плоскость). Данный подход был использован нами при изучении особенностей молекулярной структуры двух NH таутомеров свободного основания коррола и анализе структуры конформеров макроцикла, полученных в результате квантово-химических расчетов и рентгеноструктурного анализа [3–5]. Установлено, что свободному основанию 5,10,15-*мезо*-арилзамещенного коррола и его 18- $NO_2$ -производному присуща волнообразная конформация, в то время как макроцикл 2,3,5,7,8,10,12,13,15,17,18-ундеказамещенного производного обладает седлообразно искаженным макроциклом. Был сделан вывод о том, что при росте стерических взаимодействий на периферии макроцикла происходит конформационный переход от волнообразного к седлообразному конформеру.

Представляет значительный интерес определить, какие структурные параметры играют ключевую роль в формировании неплоскостных конформеров макроцикла коррола и как связана степень и тип неплоскостных искажений макроцикла с числом периферических заместителей и архитектурой замещения. Решение данных задач являлось целью настоящей работы. Нами проанализирована молекулярная конформация 18 соединений, структура которых была рассчитана квантово-химическими методами. Анализ выполнен для длинноволновых NH таутомеров вышеуказанных соединений. Степень неплоскостных искажений макроцикла варьировалась путем изменения количества присоединенных к макроциклу метильных групп и места их присоединения. Метильные группы были выбраны в качестве индуцирующих неплоскостные искажения фрагментов, поскольку известно [6], что заместители с  $sp^3$ -гибридизованными атомами углерода (алкильные заместители) вносят большее возмущение, чем заместители с  $sp^2$ -гибридизованными атомами углерода (арильные заместители). Ожидалось, что таким образом можно смоделировать молекулярные структуры, существенно различающиеся степенью неплоскостных искажений макроцикла.

**Основная часть.** Молекулярная структура исследованных алкилированных производных свободного основания коррола приведена на рисунке. Величина степени неплоскостных искажений макроцикла  $\Delta 23$  действительно варьируется в широких пределах.

В результате анализа рассчитанных значений степени неплоскостных искажений для оптимизированных молекулярных структур свободных оснований корролов установлено, что зависимость величины  $\Delta 23$  от архитектуры периферического замещения подчиняется определенной закономерности (таблица). Все соединения

можно разделить на четыре группы по величине параметра  $\Delta_{23}$ .

Первую группу составляют соединения, у которых величина  $\Delta_{23}$  варьируется в пределах от 0,267 до 0,294 Å. К этой группе относятся молекулы незамещенного коррола **1**, а также соединения **2**, **4–7**, **16** и **18**. У алкилированных производных количество присоединенных метильных групп изменяется от трех у коррола **5** до восьми у коррола **4**, что само по себе не может объяснить слабое изменение величины  $\Delta_{23}$ . Причина, скорее всего, заключается во взаимном расположении присоединенных метильных групп. У всех соединений данной группы ме-

тильные заместители расположены таким образом, что стерические взаимодействия либо локализованы на отдельных пиррольных кольцах, либо вообще пренебрежимо малы (т. е. метильные группы присоединены так, что их сферы Ван-дер-Ваальса не контактируют друг с другом). Таким образом, на периферии макроцикла не формируются силы, деформирующие макроцикл, чтобы минимизировать возмущающее действие заместителей. Отметим, что заместители могут присоединяться как по  $C_b$ , так и по  $C_m$  атомам макроцикла, но таким образом, что в  $C_b$ -положениях пиррольных колец, соседних с замещенным  $C_m$ -атомом, заместителей нет.

### Структурные параметры исследованных соединений

*№	** $\Delta_{23}$ , Å	*** Величина двугранного угла $C_b C_a C_a C_b$ , град				Расстояние N-N для пары пирролов, Å						Величина угла $C_a C_m C_a$ для $C_m$ , град			Длина связи $C_1 C_{19}$ , Å
		$\chi_1$	$\chi_2$	$\chi_3$	$\chi_4$	AB	BC	CD	DA	BD	AC	$C_5$	$C_{10}$	$C_{15}$	
-	0,281	93,4	32,6	21,2	26,7	2,83	3,02	2,60	2,73	3,80	4,07	121,8	127,3	121,7	1,423
<b>2</b>	0,285	93,1	32,0	21,0	26,4	2,83	3,03	2,60	2,74	3,79	4,08	121,9	127,5	121,8	1,424
<b>3</b>	0,413	117,8	36,0	2,14	43,8	2,87	3,11	2,60	2,76	3,81	4,14	119,9	125,6	121,4	1,431
<b>4</b>	0,272	89,7	27,6	1,88	41,0	2,86	3,02	2,61	2,72	3,78	4,10	122,1	127,6	122,0	1,433
<b>5</b>	0,279	96,3	36,2	18,0	27,7	2,83	3,02	2,59	2,74	3,81	4,07	121,0	126,2	120,9	1,423
<b>6</b>	0,294	94,8	34,6	27,0	22,6	2,83	3,04	2,60	2,77	3,82	4,08	121,8	127,7	121,6	1,419
<b>7</b>	0,267	89,4	29,7	2,51	38,7	2,87	3,01	2,61	2,71	3,78	4,07	122,2	127,1	121,9	1,433
<b>8</b>	0,310	97,6	30,7	3,31	42,5	2,86	3,04	2,57	2,77	3,80	4,10	122,1	127,5	121,1	1,434
<b>9</b>	0,320	97,9	33,7	2,69	42,5	2,83	3,10	2,58	2,76	3,81	4,11	120,8	128,2	121,4	1,433
<b>10</b>	0,323	98,2	31,8	1,56	43,5	2,82	3,11	2,58	2,77	3,79	4,13	120,7	128,6	121,4	1,433
<b>11</b>	0,326	97,2	35,4	5,28	43,0	2,84	3,09	2,58	2,76	3,80	4,11	120,9	126,7	121,4	1,432
<b>12</b>	0,320	103,1	33,1	3,12	40,2	2,90	3,01	2,65	2,70	3,79	4,12	122,0	125,9	122,4	1,429
<b>13</b>	0,377	122,7	41,5	18,6	29,4	2,88	3,12	2,61	2,75	3,83	4,14	119,8	125,8	121,2	1,420
<b>14</b>	0,378	126,9	42,8	17,4	30,0	2,86	3,14	2,59	2,79	3,87	4,13	119,5	125,5	121,4	1,421
<b>15</b>	0,380	120,4	39,8	1,51	41,5	2,89	3,11	2,63	2,72	3,81	4,14	120,0	125,4	121,5	1,428
<b>16</b>	0,268	89,2	31,3	0,45	39,7	2,88	2,99	2,62	2,71	3,78	4,08	122,3	125,8	122,0	1,432
<b>17</b>	0,304	97,9	34,8	0,25	41,7	2,87	3,02	2,59	2,76	3,80	4,10	120,9	126,0	121,1	1,433
<b>18</b>	0,293	94,4	35,7	4,58	37,5	2,86	3,02	2,60	2,72	3,80	4,08	121,0	126,1	121,2	1,430

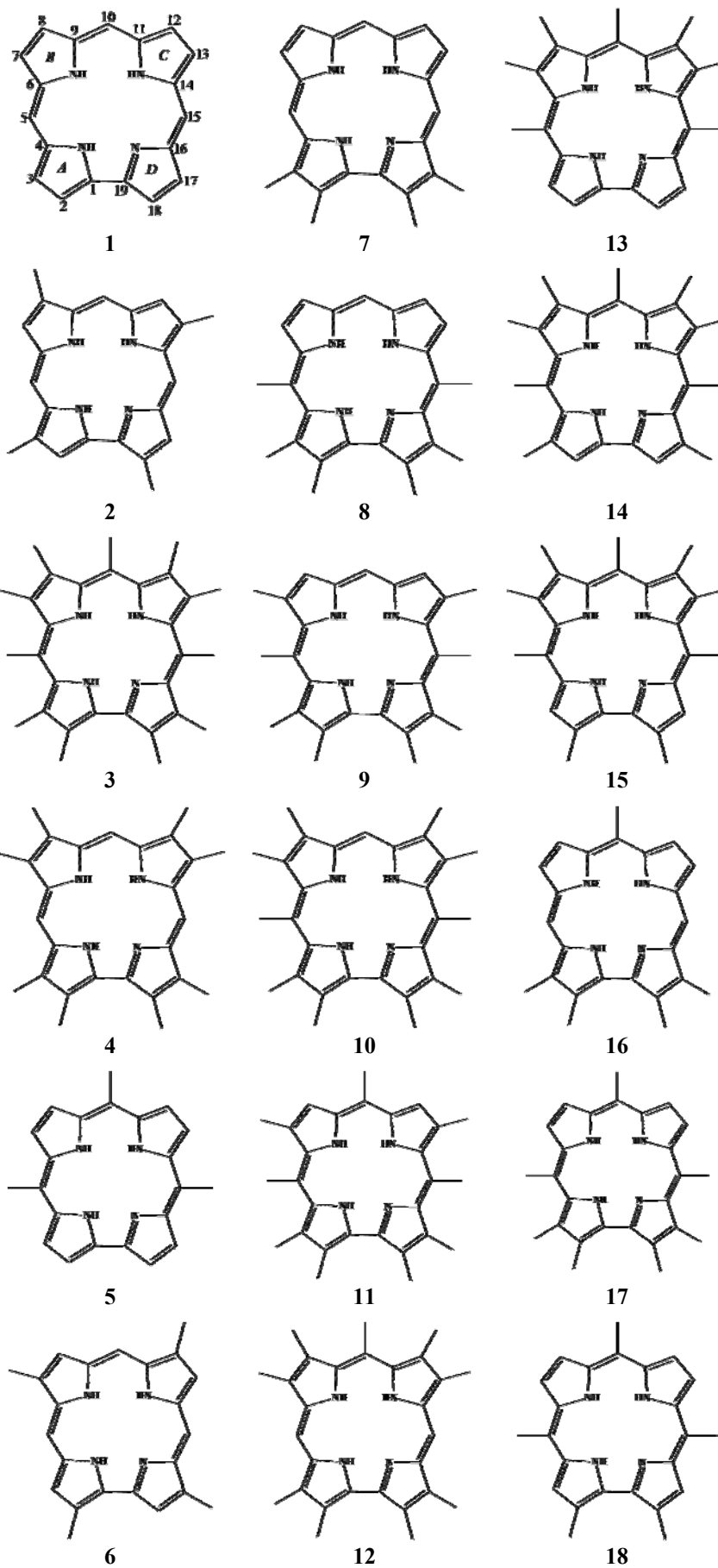
\* Наименования исследованных соединений: **1** – незамещенный коррол; **2** – 3,8,13,18-тетраметил-коррол; **3** – 2,3,5,7,8,10,12,13,15,17,18-ундекаметил-коррол; **4** – 2,3,7,8,12,13,17,18-октаметил-коррол; **5** – 5,10,15-триметил-коррол; **6** – 2,7,12,17-тетраметил-коррол; **7** – 2,3,17,18-тетраметил-коррол; **8** – 2,3,5,15,17,18-гексаметил-коррол; **9** – 2,3,5,7,13,15,17,18-октаметил-коррол; **10** – 2,3,5,7,8,12,13,15,17,18-декаметил-коррол; **11** – 2,3,5,7,10,13,15,17,18-нонаметил-коррол; **12** – 2,3,7,8,10,12,13,17,18-нонаметил-коррол; **13** – 5,7,8,10,12,13,15-септаметил-коррол; **14** – 3,5,7,8,10,12,13,15,17-нонаметил-коррол; **15** – 2,5,7,8,10,12,13,15,18-нонаметил-коррол; **16** – 2,3,10,17,18-пентаметил-коррол; **17** – 2,3,5,10,15,17,18-септаметил-коррол; **18** – 2,5,10,15,18-пентаметил-коррол.

\*\* Величина среднеквадратичного отклонения атомов от средней плоскости тетрапиррольного макроцикла  $\Delta_{23}$  рассчитывалась по формуле

$$\Delta_{23} = \sqrt{\frac{1}{23} \sum_{i=1}^{23} \Delta z_i^2},$$

где  $\Delta z_i$  – отклонение  $i$ -го атома макроцикла от средней плоскости макроцикла 7С.

\*\*\* Величина двугранного угла определялась как:  $\chi_1$  –  $C_3 C_4 C_6 C_7$ ;  $\chi_2$  –  $C_8 C_9 C_{11} C_{12}$ ;  $\chi_3$  –  $C_{13} C_{14} C_{16} C_{17}$ ;  $\chi_4$  –  $C_{18} C_{19} C_1 C_2$ .



Структура и нумерация исследованных соединений



Ко второй группе относятся соединения, у которых  $\Delta 23 = 0,304\text{--}0,326 \text{ \AA}$ . Для соединений этой группы характерно наличие метильных групп в соседних  $C_b$  и  $C_m$  положениях. Метильная группа в  $C_m$  положении макроцикла является мостиком, обеспечивающим коммуникацию стерических взаимодействий между соседними пиррольными кольцами, в результате чего формируются стерически напряженные домены, состоящие из пары пиррольных колец. Таких доменов может быть либо один (соединение **12**), либо два (соединения **8–11**, **17**). Очевидно, что у корролов **8** и **17** стерические взаимодействия будут слабее, поскольку коммуникация между пиррольными кольцами идет по цепи  $C_b\text{--}C_m\text{--}H$ , в отличие от остальных соединений данной группы, у которых реализуется цепочка  $C_b\text{--}C_m\text{--}C_b$ . Рассчитанная величина параметра  $\Delta 23$  согласуется с таким предположением: у корролов **8** и **17** величина  $\Delta 23$  равна соответственно  $0,310$  и  $0,304 \text{ \AA}$ , а для соединений **9–11** она выше и находится в диапазоне от  $0,320$  до  $0,326 \text{ \AA}$ . Следует отметить, что, по видимому, стерические возмущения, возникающие в одном домене  $C_8\text{--}C_{10}\text{--}C_{12}$  (соединение **12**), оказывают на макроцикл свободного основания коррола такое же влияние, как возмущения, формируемые одновременно в двух доменах  $C_3\text{--}C_5\text{--}C_7$  и  $C_{13}\text{--}C_{15}\text{--}C_{17}$  (соединения **9–11**). На это указывают практически одинаковые величины параметра  $\Delta 23$  для этих соединений.

Третья группа соединений характеризуется параметром  $\Delta 23$ , лежащим в пределах от  $0,377$  до  $0,380 \text{ \AA}$ . Для соединений этой группы (**13–15**) стерически напряженный домен включает все три  $C_m$ -положения макроцикла. Однако, так как число метильных групп составляет семь либо девять, стерические взаимодействия не охватывают часть тетрапиррольного макроцикла. Замещение всех одиннадцати периферических протонов метильными группами в ундеказамещенном корроле **3** формирует один стерически напряженный кольцевой домен на периферии макроцикла. Соединение **3** логично выделить в отдельную четвертую группу, так как величина неплоскостных искажений макроцикла для него  $\Delta 23 = 0,413 \text{ \AA}$ , что существенно больше, чем у третьей группы соединений **13–15**. Очевидно, при замещении происходят как неплоскостные деформации макроцикла, так и изменения длин связей и валентных углов – так называемые плоскостные деформации, локализованные в плоскости макроцикла (от англ. «in plane deformations»). Для соединений третьей группы часть энергии стерических взаимодействий заместителей диссипирует путем плоскостных деформаций, а при формировании стерически напряженного кольцевого

домена в ундеказамещенном корроле **3**, по видимому, происходят дополнительные неплоскостные деформации, о чем свидетельствует величина параметра  $\Delta 23$ .

Величина параметра  $\Delta 23$  по определению представляет собой обобщенный параметр и не несет информации о характере структурных перестроек тетрапиррольного макроцикла. Вместе с тем сведения о том, какие структурные элементы макроцикла претерпевают наибольшие изменения, а какие остаются практически без изменений (если таковые есть), существенны для направленного синтеза молекулярных структур с заданной молекулярной конформацией. Проанализируем, как ведут себя ключевые параметры, которые описывают структуру тетрапиррольного макроцикла.

Характер неплоскостных искажений макроцикла в первую очередь характеризуется углами отклонения пиррольных колец от средней плоскости макроцикла, либо величиной двугранных углов  $\chi$  между плоскостями пиррольных колец. Рассчитанные величины двугранных углов  $\chi_1$  и  $\chi_2$  в общем отражают тенденцию поведения параметра  $\Delta 23$  (таблица). Однако величины двугранных углов  $\chi_3$  и  $\chi_4$  отражают локальную перестройку макроцикла коррола при определенной архитектуре замещения, а не общую тенденцию, описанную выше. Для соединений **1**, **2**, **5**, **6**, **13**, **14** величины углов  $\chi_3$  и  $\chi_4$  значительно отличаются от величин, определенных для всех остальных соединений. Очевидно, что в данном случае стерические взаимодействия периферических заместителей оказывают специфическое влияние на положение пиррольных колец  $C$ ,  $D$  и  $A$ . Данная группа соединений отличается от остальных структур тем, что они не замещены в положениях  $C_2$  и  $C_{18}$ , т. е. взаимодействие между пиррольными кольцами  $D$  и  $A$  опосредовано только  $C_a\text{--}C_a$  связью и взаимодействием атомов азота пиррольного и пирроленинового колец  $D$  и  $A$ . Следует отметить, что расстояние N-N для всех исследованных соединений изменяется слабо. Поэтому логично предположить, что основным возмущающим фактором для этого структурного фрагмента является отталкивание метильных групп в положениях  $C_2$  и  $C_{18}$ . Для соединений **1**, **2**, **5**, **6**, **13**, **14** такое возмущение отсутствует и двугранный угол  $\chi_4$  составляет  $26\text{--}30^\circ$ , а угол  $\chi_3 = 18\text{--}22^\circ$ . При замещении положений  $C_2$  и  $C_{18}$  величина угла  $\chi_4$  резко увеличивается до  $37\text{--}43^\circ$ , чтобы минимизировать возникающие силы отталкивания. В то же время величина угла  $\chi_3$  уменьшается до нескольких градусов, что обеспечивает дипиррольному фрагменту  $CA$  практически копланарное расположение. Кроме этого для соединений **1**,

2, 5, 6, 13, 14 длина связи  $C_1C_{19}$  составляет 1,419–1,424 Å, что заметно меньше, чем для остальных соединений. Необходимо отметить, что у соединений 12, 15, 18 длина связи  $C_1C_{19}$  имеет промежуточное значение 1,428–1,430 Å, у них стерически напряженные домены, состоящие из пар пиррольных колец  $B$  и  $C$ ,  $D$  и  $A$  в некоторой степени изолированы друг от друга. Возникающие при замещении положений  $C_2$  и  $C_{18}$  силы отталкивания частично минимизируются не путем увеличения длины связи  $C_1C_{19}$ , а поворотом пиррольных колец  $D$  и  $A$ , на что указывает уменьшение межатомного расстояния N-N.

Среди других структурных параметров следует отметить, что межатомное расстояние N-N для пиррольных колец  $A$  и  $C$  постепенно увеличивается с ростом значения параметра  $\Delta 23$ , что указывает на возрастание асимметрии тетрапиррольного макроцикла. Величины углов  $C_aC_mC_a$  на метиновых мостиках изменяются слабо, однако в целом ведут себя согласно изменениям параметра  $\Delta 23$ .

**Заключение.** В работе методами квантовой химии рассчитана молекулярная конформация тетрапиррольного макроцикла семейства метил-

замещенных производных свободного основания коррола, различающихся архитектурой замещения. Установлено, что все исследованные соединения могут быть разделены на четыре группы, различающиеся по величине неплоскостных искажений макроцикла, охарактеризованной с использованием параметра  $\Delta 23$ : а)  $\Delta 23 = 0,267\text{--}0,294$  Å, у которых стерические взаимодействия локализованы на отдельных пиррольных кольцах; б)  $\Delta 23 = 0,304\text{--}0,326$  Å, у которых формируются стерически напряженные домены из пары пиррольных колец; в)  $\Delta 23 = 0,377\text{--}0,380$  Å, у которых стерически напряженный домен включает все три мезо-положения макроцикла; г)  $\Delta 23 = 0,413$  Å – ундеказамещенный коррол, у которого 11 алкильных групп формируют один стерически напряженный кольцевой домен. Обнаружено, что ряд структурных элементов, характеризующих молекулярную конформацию макроцикла, изменяется параллельно изменениям параметра  $\Delta 23$ , но в то же время конформационные изменения отдельных фрагментов определяются локальным взаимодействием нескольких соседних заместителей и не зависят от общей степени неплоскостного искажения макроцикла.

### Литература

1. Nonplanar porphyrins and their significance in proteins / J. A. Shelnutt [et al.] // *Chemical Society Reviews*. 1998. Vol. 27, no. 1. P. 31–41.
2. Molecular structures and absorption spectra assignment of corrole NH tautomers / W. Beenken [et al.] // *Journal of Physical Chemistry, A*. 2014. Vol. 118, no. 3. P. 862–871.
3. Кленицкий Д. В., Крук Н. Н. Анализ неплоскостных искажений макроцикла свободного основания коррола // *Труды БГТУ*. 2014. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 44–46.
4. Кленицкий Д. В., Крук Н. Н. Взаимосвязь типа периферического замещения макроцикла корролов и характера его неплоскостных искажений // *Труды БГТУ*. 2015. № 4: Химия, технол. орган. веществ и биотехнол. С. 24–28.
5. Кленицкий Д. В., Крук Н. Н., Маес В. Сравнительный анализ структуры тетрапиррольного макроцикла свободных оснований три-, тетра- и ундеказамещенных корролов // *Труды БГТУ*. Сер. 2, Химические технологии, биотехнология, геоэкология. 2017. № 1. С. 23–28.
6. Senge M. O. Exercises in molecular gymnastics – bending, stretching and twisting porphyrins // *Chem. Commun.* 2006. P. 243–256.

### References

1. Shelnutt J. A., Song X., Ma J., Jia S., Jentzen W., Medforth C. J. Nonplanar porphyrins and their significance in proteins. *Chemical Society Reviews*, 1998, vol. 27, no. 1, pp. 31–41.
2. Beenken W., Presselt M., Ngo T. H., Dehaen W., Maes W., Kruk M. M. Molecular structures and absorption spectra assignment of corrole NH tautomers. *Journal of Physical Chemistry, A*, 2014, vol. 118, no. 3, pp. 862–871.
3. Klenitsky D. V., Kruk M. M. Analysis of the nonplanar distortions of the free base corrole macrocycle. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2014, no. 6: Physics and mathematics sciences and informatics, pp. 44–46 (In Russian).
4. Klenitsky D. V., Kruk M. M. Relationship between the corrole macrocycle peripheral substitution type and character of its nonplanar distortion. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 4: Chemistry, technology of organic substances and biotechnology, pp. 24–28 (In Russian).
5. Klenitsky D. V., Kruk M. M., Maes W. Comparative analysis of tetrapyrrolic macrocycle structure of tri-, tetra- and undecasubstituted free base corroles. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 2, Chemical engineering, biotechnology, geoecology, 2017, no. 1, pp. 23–28 (In Russian).

6. Senge M. O. Exercises in molecular gymnastics – bending, stretching and twisting porphyrins. *Chem. Commun.*, 2006, pp. 243–256.

#### Информация об авторах

**Крук Николай Николаевич** – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: m.kruk@belstu.by

**Кленицкий Дмитрий Викентьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: klen@belstu.by

**Маес Воутер** – кандидат химических наук, профессор. Хассельтский университет (г. Дипенбек, B-3590, Бельгия). E-mail: wouter.maes@uhasselt.be

#### Information about the authors

**Kruk Mikalai Mikalaevich** – DSc (Physics and Mathematics), Head of the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: m.kruk@belstu.by

**Klenitsky Dmitry Vikentievich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: klen@belstu.by

**Maes Wouter** – PhD (Chemistry), Professor. Hasselt University (B-3590, Diepenbeek, Belgium). E-mail: wouter.maes@uhasselt.be

*Поступила 28.11.2017*

УДК 535.37+541.65+543.4

**Д. В. Кленецкий, Н. Н. Крук**

Белорусский государственный технологический университет

**ИЗУЧЕНИЕ ВРЕМЕННОГО ПРОФИЛЯ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ КРАСИТЕЛЯ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ СВЕТОВЫМИ ИМПУЛЬСАМИ**

Методами математического моделирования изучена временная зависимость интенсивности флуоресценции красителя при возбуждении прямоугольными световыми импульсами, длительность которых превышает время жизни триплетного состояния. Показано, что интенсивность флуоресценции вначале резко возрастает, а затем относительно быстро падает к стационарному значению, которое зависит от констант скоростей процессов, вовлеченных в дезактивацию возбужденного состояния. Зависимость интенсивности флуоресценции от времени является биэкспоненциальной. Первое из слагаемых обеспечивает рост интенсивности до максимального значения и проявляет себя при малых временах, а падение интенсивности флуоресценции к стационарному значению определяется вторым экспоненциальным слагаемым. При увеличении константы скорости интеркомбинационной конверсии время нарастания интенсивности флуоресценции, ее максимальное значение и время релаксации уменьшаются. Рост константы скорости фотовозбуждения приводит к уменьшению времен нарастания и релаксации, а максимальное значение интенсивности при этом возрастает. Установлена зависимость времени релаксации флуоресценции к стационарному значению от квантового выхода интеркомбинационной конверсии в триплетное состояние и времени жизни триплетного состояния.

**Ключевые слова:** флуоресценция, триплетное состояние, интеркомбинационная конверсия, константа скорости, квантовый выход, время релаксации.

**D. V. Klenitsky, M. M. Kruk**

Belarusian State Technological University

**STUDY OF TEMPORAL PROFILE OF DYE FLUORESCENCE UPON EXCITATION WITH RECTANGULAR LIGHT PULSES**

The temporal dependence of the dye fluorescence intensity upon excitation with rectangular light pulses having duration which exceeds the triplet state lifetime has been studied by methods of mathematical modeling. The fluorescence intensity was found to increase sharply at the beginning, and then falls down quite fast to the stationary value, which depends on the rate constants of the processes involved in the excited state deactivation. The time dependence of fluorescence intensity is biexponential. The first of terms explains the intensity growing up to the maximum value and manifests itself at short time scales, and a decrease in the fluorescence intensity to the stationary value is described with the second exponential term. The fluorescence intensity rise time, its maximum value and the relaxation time decrease when the intersystem crossing rate constant increases. An increase in the photoexcitation rate constant leads to decrease in both rise and relaxation times, and the maximum intensity increases. The dependence of the fluorescence relaxation time to the stationary value on the quantum yield of the intersystem crossing into the triplet state and triplet state lifetime has been found.

**Key words:** fluorescence, triplet state, intersystem crossing, rate constant, quantum yield, relaxation time.

**Введение.** В настоящее время разработка новых доступных методов определения фотофизических характеристик сложных органических молекул и методов их диагностики остается весьма актуальной научной и технической задачей. В работах [1, 2] было показано, что при возбуждении растворов красителей световыми импульсами с длительностью, превышающей время жизни триплетного состояния, интенсивность флуоресценции испытывает релаксацию и при достаточно больших временах стремится к некоторой постоянной величине. Данный процесс является переходным и обусловлен установлением равновесия между на-

селенностями электронных состояний, вовлеченных в процессы дезактивации энергии электронного возбуждения, и получил название фединг (англ. fading – затухание, замирание) флуоресценции. На рис. 1 схематически показана зависимость интенсивности флуоресценции от времени при таком фотовозбуждении. За время  $t_m$  интенсивность флуоресценции увеличивается до максимального значения  $I_m$ , а затем за время релаксации  $t_r$  уменьшается к стационарному значению  $I_0$ . Каждая из этих величин зависит от фотофизических параметров молекул, а поэтому их измерение может стать основой для определения этих параметров.

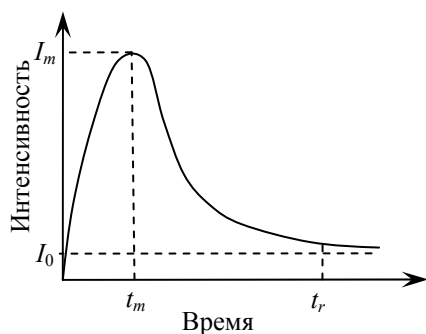


Рис. 1. Зависимость интенсивности флуоресценции от времени

На рис. 2 показана типичная диаграмма Яблонского нижних энергетических уровней органических молекул и возможных переходов между ними. У молекулы имеется система синглетных уровней энергии  $S_0$ ,  $S_1$  и т. д. Переходы из основного состояния  $S_0$  в возбужденные состояния разрешены и определяют систему электронных полос поглощения. Излучение флуоресценции осуществляется при переходе с нижнего возбужденного (флуоресцентного) уровня  $S_1$  в основное состояние  $S_0$ . Кроме синглетных уровней энергии у большинства органических молекул имеются метастабильные триплетные уровни энергии. Нижний триплетный уровень  $T_1$  расположен, как правило, несколько ниже первого возбужденного состояния  $S_1$ . Заселение триплетного состояния обычно достигается в результате интеркомбинационной конверсии — безызлучательного квантового перехода из синглетного состояния  $S_1$  в триплетное состояние  $T_1$ . При определенных условиях наблюдаются переходы с нижнего триплетного состояния  $T_1$  в основное состояние  $S_0$  с испусканием фотонов фосфоресценции. Заметим, что процессы флуоресценции и фосфоресценции конкурируют с безызлучательными переходами в основное состояние. На рис. 2 безызлучательные переходы показаны штриховыми стрелками. Каждый из возможных процессов перехода между уровнями энергии характеризуется константой скорости, численно равной доле числа молекул, перешедших на данный уровень в единицу времени.

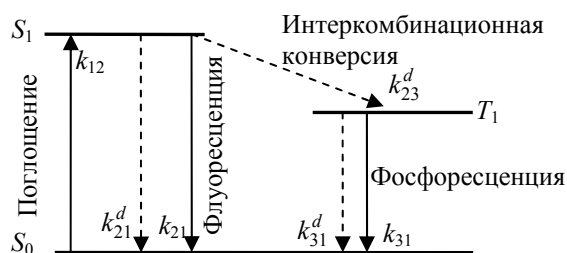


Рис. 2. Диаграмма Яблонского для органических молекул

Константа скорости фотовозбуждения молекул  $k_{12}$  зависит от плотности потока фотонов возбуждающего излучения и сечения поглощения молекулы [3]. В случае продолжительного возбуждающего импульса света с резким фронтом нарастания и спада плотность потока фотонов является постоянной величиной. Поэтому константа скорости фотовозбуждения  $k_{12}$  также не зависит от времени, и можно считать, что возбуждение происходит прямоугольными импульсами. Константа скорости интеркомбинационной конверсии  $k_{23}^d$  у большинства люминесцирующих органических молекул сравнима по величине с константами флуоресценции  $k_{21}$  и безызлучательного перехода  $k_{21}^d$  либо превышает их, так что обычно заметная доля поглотивших свет молекул может оказаться в триплетном состоянии. Константа скорости  $k_{31}$  фосфоресценции оказывается много меньше константы скорости  $k_{21}$  для флуоресценции. Фосфоресценция конкурирует с безызлучательной дезактивацией триплетного состояния в основное, которая характеризуется константой скорости  $k_{31}^d$ .

Целью данной работы является изучение характеристик временного профиля флуоресценции, возбужденной прямоугольными световыми импульсами с длительностью во много раз превышающей время жизни триплетного состояния.

**Основная часть.** Интенсивность флуоресценции прямо пропорциональна концентрации молекул  $N_2$  в момент времени  $t$  на первом возбужденном уровне энергии  $S_1$ :

$$I_{\text{фл}} = \beta k_{21} N_2, \quad (1)$$

где  $\beta$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от способа измерения интенсивности и длины волны, возбуждающего излучения;  $k_{21} N_2$  — число радиационных переходов из состояния  $S_1$  в основное состояние  $S_0$ .

Пренебрегая процессами переноса энергии между молекулами, из решения системы кинетических балансных уравнений для населенностей уровней энергии [4, 5] следует, что зависимость населенности  $N_2$  первого возбужденного состояния  $S_1$  от времени имеет следующий вид:

$$\frac{N_2(t)}{N_0} = y(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + y_0, \quad (2)$$

где  $y(t)$  — доля числа молекул от их общего количества  $N_0$  в состоянии  $S_1$ ;  $C_1$ ,  $C_2$  — постоянные интегрирования;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $y_0$  — зависят от констант скоростей, рассматриваемых процессов, и определяются по формулам:

$$\alpha_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad (3)$$

$$y_0 = \frac{c}{b}, \tag{4}$$

$$a = k_{12} + k_2 + k_3 + k_{23}^d, \tag{5}$$

$$b = k_{12}(k_3 + k_{23}^d) + k_3(k_2 + k_{23}^d), \tag{6}$$

$$c = k_{12}k_3, \tag{7}$$

где  $k_2 = k_{21} + k_{21}^d$ ,  $k_3 = k_{31} + k_{31}^d$ .

Принимая во внимание (2) в формуле (1), найдем зависимость интенсивности флуоресценции, нормированную на  $I_n = \beta k_{12} N_0$ , от времени:

$$I = \frac{I_{\text{фл}}}{I_n} = I_0 + I_1 + I_2, \tag{8}$$

где  $I_0$ ,  $I_1$  и  $I_2$  имеют вид

$$I_0 = y_0, I_1 = C_1 e^{\alpha_1 t}, I_2 = C_2 e^{\alpha_2 t}. \tag{9}$$

Из (8), (9) следует, что зависимость интенсивности от времени является биекспоненциальной. Согласно (3),  $\alpha_1 < 0$  и  $\alpha_2 < 0$ , поэтому слагаемые  $I_1$  и  $I_2$  в (8) экспоненциально затухают и интенсивность стремится к стационарному значению  $I_0$ . Предэкспоненциальные множители  $C_1$  и  $C_2$  определим из начальных условий для доли числа частиц  $y$  (2) в первом возбужденном состоянии [4]:

$$y(0) = 0, y'(0) = k_{12}. \tag{10}$$

Используя (2), из (10) найдем систему уравнений для определения  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + y_0 = 0, \\ \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 = k_{12}. \end{cases} \tag{11}$$

Отсюда следует, что

$$C_1 = \frac{k_{12} + y_0 \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad C_2 = \frac{k_{12} + y_0 \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}. \tag{12}$$

На рис. 3 показана зависимость интенсивности флуоресценции (8) от времени с учетом (3) и (12) для различных значений константы скорости интеркомбинационной конверсии  $k_{23}^d$ . Линии проведены при следующих значениях параметров:  $k_{12} = 10^4 \text{ с}^{-1}$ ,  $k_2 = 10^8 \text{ с}^{-1}$ ,  $k_3 = 10^3 \text{ с}^{-1}$ . Сразу же после включения фотовозбуждения наблюдается резкое нарастание, а затем относительно быстрый спад интенсивности к стационарному значению. С увеличением константы скорости  $k_{23}^d$  максимум интенсивности и стационарные значения интенсивности уменьшаются.

Время нарастания интенсивности  $t_m$  найдем из равенства нулю производной от интенсивности (8) по времени:

$$t_m = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \ln \left[ -\frac{C_1 \alpha_1}{C_2 \alpha_2} \right]. \tag{13}$$

Тогда максимальное значение интенсивности

$$I_m = I_0 + C_1 e^{\alpha_1 t_m} + C_2 e^{\alpha_2 t_m}. \tag{14}$$

На рис. 4, 5 показаны зависимости времени нарастания  $t_m$  (13) и максимального значения интенсивности  $I_m$  (14) от константы скорости интеркомбинационной конверсии  $k_{23}^d$  при различных значениях константы скорости фотовозбуждения  $k_{12}$ . Нарастание интенсивности происходит за время порядка  $10^{-8}$  с. При увеличении  $k_{23}^d$   $t_m$  и  $I_m$  уменьшаются. Рост константы скорости  $k_{12}$  приводит к уменьшению времени нарастания и увеличению максимальных значений интенсивности.

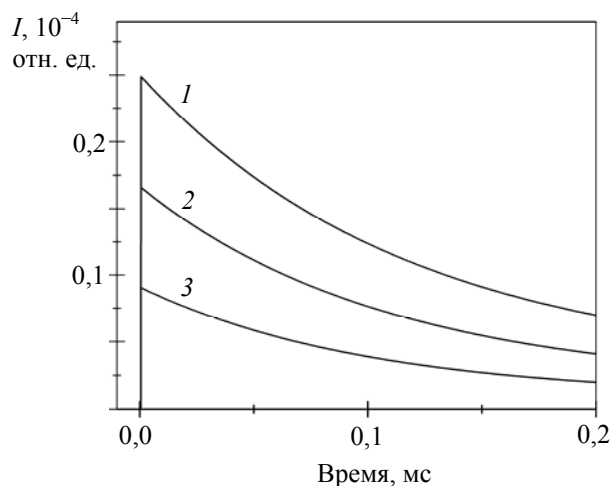


Рис. 3. Зависимость интенсивности флуоресценции от времени при различных значениях константы скорости интеркомбинационной конверсии: 1 –  $k_{23}^d = 0,3 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ ; 2 –  $k_{23}^d = 0,5 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ ; 3 –  $k_{23}^d = 10^9 \text{ с}^{-1}$

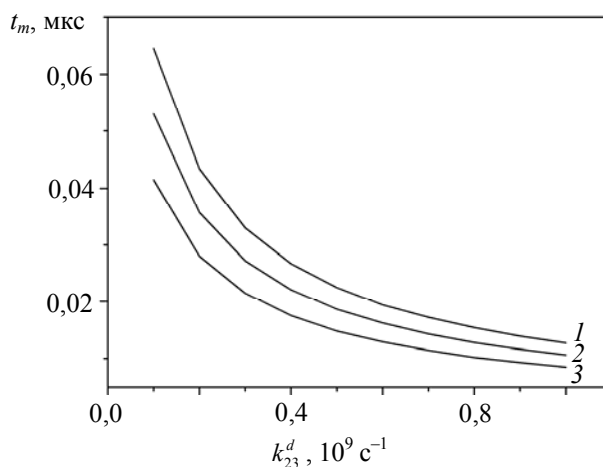


Рис. 4. Зависимость времени нарастания от константы скорости интеркомбинационной конверсии при различных значениях константы скорости фотовозбуждения: 1 –  $k_{12} = 10^3 \text{ с}^{-1}$ ; 2 –  $k_{12} = 10^4 \text{ с}^{-1}$ ; 3 –  $k_{12} = 10^5 \text{ с}^{-1}$

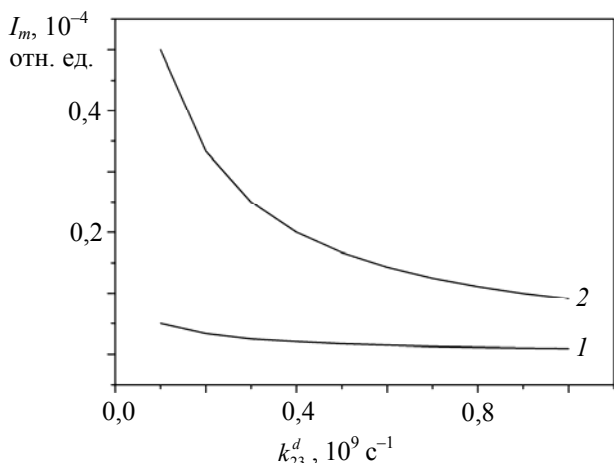


Рис. 5. Зависимость максимального значения интенсивности от константы скорости интеркомбинационной конверсии при различных значениях константы скорости фотовозбуждения:  
 $1 - k_{12} = 10^3 \text{ c}^{-1}$ ;  $2 - k_{12} = 10^4 \text{ c}^{-1}$

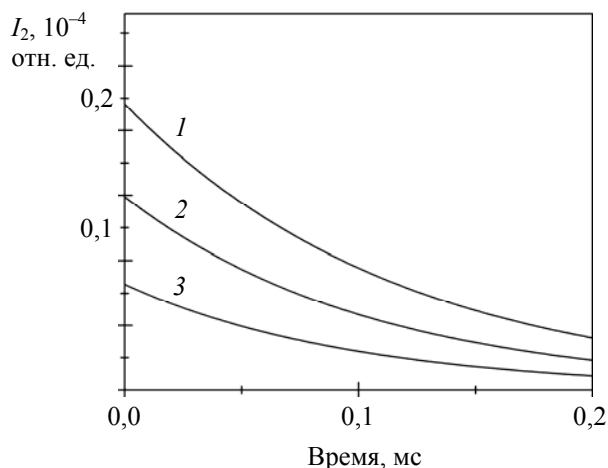


Рис. 7. Зависимость второго экспоненциального слагаемого от времени при различных значениях константы скорости интеркомбинационной конверсии:  
 $1 - k_{23}^d = 0,3 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$ ;  $2 - k_{23}^d = 0,5 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$ ;  
 $3 - k_{23}^d = 10^9 \text{ c}^{-1}$

Вклад экспоненциальных слагаемых  $I_1$  и  $I_2$  (9) в общую интенсивность (8) в разные промежутки времени оказывается неодинаковым и зависит как от коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2$  (3), так и от предэкспоненциальных множителей  $C_1$  и  $C_2$  (12). На рис. 6 и 7 показаны зависимости  $I_1$  и  $I_2$  от времени для различных значений константы скорости интеркомбинационной конверсии  $k_{23}^d$ .

Первое слагаемое  $I_1 < 0$  и существенно при малых временах, когда  $t < t_m$ . Оно обеспечивает рост интенсивности (8) к максимальному значению  $I_m$  и при  $t \rightarrow t_m$  экспоненциально стремится к нулю. Спад интенсивности флуоресценции к стационарному значению определяет второе экспоненциальное слагаемое  $I_2$ , которое при больших промежутках времени стремится к нулю.

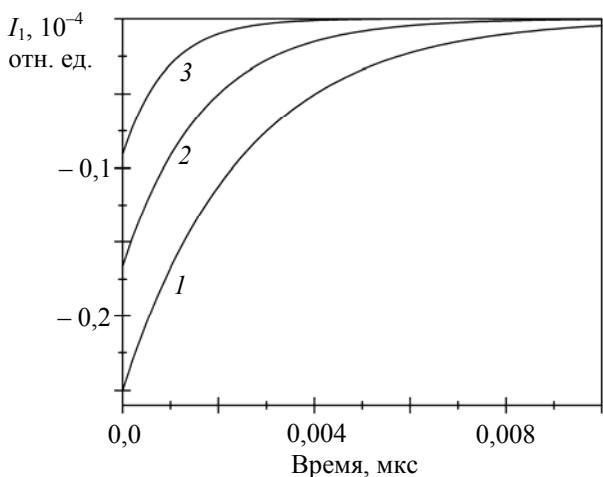


Рис. 6. Зависимость первого экспоненциального слагаемого от времени при различных значениях константы скорости интеркомбинационной конверсии:  
 $1 - k_{23}^d = 0,3 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$ ;  $2 - k_{23}^d = 0,5 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$ ;  
 $3 - k_{23}^d = 10^9 \text{ c}^{-1}$

Таким образом, при  $t \geq t_m$  зависимость интенсивности флуоресценции от времени определяется соотношением

$$I = I_0 + C_2 e^{\alpha_2 t} \tag{15}$$

Из (15) следует, что превышение  $\Delta I$  интенсивности  $I$  над стационарным значением  $I_0$  уменьшается по экспоненциальному закону

$$\Delta I = I - I_0 = C_2 e^{\alpha_2 t} \tag{16}$$

Время релаксации  $t_r$  определим из условия уменьшения величины  $\Delta I$  в  $e$  раз:

$$\frac{\Delta I_m}{\Delta I} = \frac{I_m - I_0}{I - I_0} = e^{-\alpha_2 t_r} = e \tag{17}$$

Отсюда с учетом (3) найдем

$$t_r = -\frac{1}{\alpha_2} = \frac{2}{a - \sqrt{a^2 - 4b}} \tag{18}$$

Из (5), (6) следует, что при  $k_{23}^d \gg k_3$  и  $k_{23}^d \gg k_{12}$ ,  $a^2 \gg 4b$ . Поэтому разложим корень квадратный в знаменателе (18) в ряд Тейлора и воспользуемся первыми двумя слагаемыми в этом ряду

$$\sqrt{a^2 - 4b} \approx a - \frac{2b}{a} \tag{19}$$

Тогда с учетом (5), (6) получим

$$t_r \approx \frac{a}{b} \approx \frac{k_2 + k_{23}^d}{k_{12} k_{23}^d + k_3 (k_2 + k_{23}^d)} \tag{20}$$

Время релаксации (20) представим в виде

$$t_r = \frac{1}{k_{12} \Phi_T + 1/\tau_T} \tag{21}$$

где  $\Phi_T$  – квантовый выход в триплетное состояние и  $\tau_T$  – время жизни триплетного состояния соответственно

$$\Phi_T = \frac{k_{23}^d}{k_2 + k_{23}^d}, \quad \tau_T = \frac{1}{k_3}. \quad (22)$$

Согласно (21),  $1/t_r$  при увеличении константы скорости фотовозбуждения  $k_{12}$  линейно возрастает

$$\frac{1}{t_r} = k_{12}\Phi_T + \frac{1}{\tau_T}. \quad (23)$$

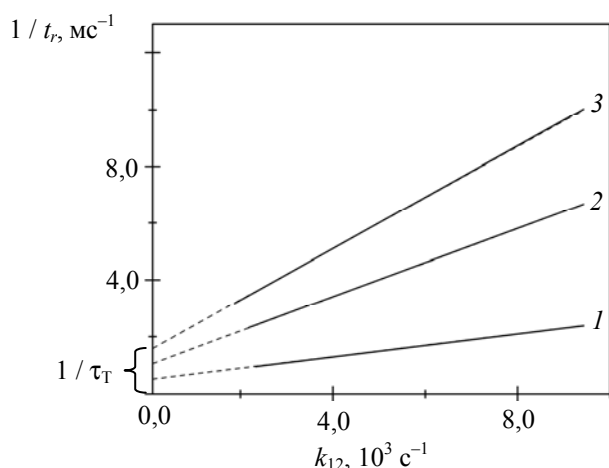


Рис. 8. Зависимость  $1/t_r$  от константы скорости фотовозбуждения:  
 1 –  $\Phi_T = 0,2$ ,  $\tau_T = 2$  мс; 2 –  $\Phi_T = 0,6$ ,  $\tau_T = 1$  мс;  
 3 –  $\Phi_T = 0,9$ ,  $\tau_T = 0,7$  мс

На рис. 8 показана зависимость  $1/t_r$  от  $k_{12}$  при различных значениях  $\Phi_T$  и  $\tau_T$ . При малых значениях константы скорости фотовозбуждения  $k_{12}$ , когда  $k_{12}\Phi_T \ll 1/\tau_T$ , время релаксации равно времени жизни триплетного состояния. С увеличением  $k_{12}$  время релаксации все больше будет отличаться от времени жизни триплетного состояния. Тангенс угла наклона этих линий численно равен квантовому выходу в триплетное состояние  $\Phi_T$ , а отрезки, отсекаемые на оси у при  $k_{12} = 0$ ,  $1/\tau_T$ .

**Заключение.** В работе исследовано влияние фотофизических параметров молекул на характеристики временного профиля флуоресценции. Полученные соотношения для времени нарастания, максимального значения интенсивности флуоресценции и времени релаксации могут быть использованы для нахождения фотофизических параметров сложных органических соединений. Временные характеристики профиля флуоресценции, в отличие от абсолютных значений интенсивности, не зависят от способа нормировки интенсивности, а определяются только значениями констант скоростей рассматриваемых процессов. Заметим, что данное рассмотрение справедливо для образцов с малой концентрацией молекул, когда они не взаимодействуют друг с другом. Влияние межмолекулярных взаимодействий может существенно изменить характер излучательной дезактивации возбужденных молекул.

### Литература

1. Avarmaa R. Fluorescence detection study of molecular triplet states in chlorophyll and related compounds // *Molecular Physics: An International Journal at the Interface Between Chemistry and Physics*. 1979. Vol. 37, issue 2. P. 441–454.
2. Fluorescence-detected triplet kinetics study of the specifically solvated chlorophyll and protochlorophyll in frozen solutions / R. Avarmaa [et al.] // *Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy Section*. 1987. Vol. 43, no. 4. P. 507–514.
3. Фадеев В. В. Нелинейная флуориметрия как метод диагностики природных органических комплексов // *Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия*. 1998. № 4. С. 49–57.
4. Кленицкий Д. В., Крук Н. Н. Влияние триплетного состояния на интенсивность флуоресценции красителей при стационарном фотовозбуждении // *Труды БГТУ*. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 56–60.
5. Кленицкий Д. В., Крук Н. Н. Флуоресценция и фосфоресценция красителей при стационарном фотовозбуждении // *Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика*. 2017. № 1. С. 27–31.

### References

1. Avarmaa R. Fluorescence detection study of molecular triplet states in chlorophyll and related compounds. *Molecular Physics: An International Journal at the Interface Between Chemistry and Physics*, 1979, vol. 37, issue 2, pp. 441–454.
2. Avarmaa R., Mauring K., Renge I., Sary P. Fluorescence-detected triplet kinetics study of the specifically solvated chlorophyll and protochlorophyll in frozen solutions. *Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy Section*, 1987, vol. 43, no. 4, pp. 507–514.
3. Fadeev V. V. Nonlinear fluorimetry as a method of diagnostics of natural organic complexes. *Vestnik Moskovskogo Universiteta* [Bulletin of the Moscow State University], series 3, Physics. Astronomy, 1998, no. 4, pp. 49–57 (In Russian).



4. Klenitsky D. V., Kruk M. M. The triplet state influence on the dyes fluorescence intensity upon steady-state photoexcitation. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 56–60 (In Russian).

5. Klenitsky D. V., Kruk M. M. Fluorescence and phosphorescence of dyes at stationary photoexcitation. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and mathematics. Informatics, 2017, no. 1, pp. 27–31 (In Russian).

#### **Информация об авторах**

**Кленицкий Дмитрий Викентьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: klen@belstu.by

**Крук Николай Николаевич** – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: m.kruk@belstu.by

#### **Information about the authors**

**Klenitsky Dmitry Vikentievich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: klen@belstu.by

**Kruk Mikalai Mikalaevich** – DSc (Physics and Mathematics), Head of the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: m.kruk@belstu.by

*Поступила 28.11.2017*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

---

УДК 681.511

**А. Н. Шумский, Д. С. Карпович**

Белорусский государственный технологический университет

### **НАСТРОЙКА ПАРАМЕТРОВ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ ВЫСОТЫ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА**

Произведена идентификация модели беспилотного летательного аппарата для стабилизации высоты. Идентификация системы управления проводилась в среде графического моделирования Simulink пакета Matlab. На основании полученных результатов выбраны рациональные алгоритмы управления для канала стабилизации высоты беспилотным летательным аппаратом. Созданная модель проверена на робастную устойчивость.

В данной статье предлагается подход идентификации модели беспилотного летательного аппарата для стабилизации высоты.

**Ключевые слова:** система управления, беспилотный летательный аппарат, идентификация.

**A. N. Shumski, D. S. Karpovich**

Belarusian State Technological University

### **SETTING THE PARAMETERS OF CONTROL LAW FOR STABILIZING HEIGHT OF UNMANNED AERIAL VEHICLES**

The identification of the model of an unmanned aerial vehicle for height stabilization has been made. The identification of the control system was carried out in the Simulink simulation environment of the Matlab package. Based on the results obtained, rational control algorithms for the channel of stabilization of the height of an unmanned aerial vehicle were selected. The resulting model is tested for robust stability.

This article proposes an approach of identification model of an unmanned aerial vehicle for the stabilization height.

**Key words:** control system, unmanned aerial vehicle, identification.

**Введение.** Для выполнения качественного регулирования необходимы знания о динамическом поведении объекта управления. Процесс получения (синтеза) математического описания объекта на основе экспериментально полученных сигналов на его входе и выходе называется идентификацией объекта. Математическое описание может быть представлено в табличной форме или в форме уравнений. Идентификация может быть структурной, когда определяется структура математического описания объекта, или параметрической, когда для известной структуры находят величины параметров, входящих в уравнения модели. Когда ищутся параметры модели с известной структурой, то го-

ворят об идентификации параметров модели, а не объекта [1].

Результатом идентификации может быть импульсная или переходная характеристика объекта, а также соответствующие им спектральные характеристики, которые представляются в виде таблицы (массива). Эти характеристики могут использоваться в дальнейшем для структурной и параметрической идентификации математической модели объекта регулирования или непосредственно для определения параметров ПИД-регулятора.

**Основная часть.** Процедуру построения модели принято называть идентификацией, при этом данный термин относится к построению

аналитических математических моделей динамических объектов. Динамический объект – это объект, выход которого зависит не только от текущего значения входных сигналов, но и от их значений в предыдущие моменты времени [2].

Цель идентификации заключается в том, чтобы на основании наблюдений за входным  $u(t)$  и выходным  $y(t)$  сигналами на каком-то интервале времени определить вид оператора, связывающего входной и теоретический выходной сигналы. Перед началом экспериментальных исследований проводят априорный анализ перечня входных переменных с целью отбора и включения в состав модели приоритетных (или лимитирующих), оказывающих наиболее сильное воздействие на выходные переменные  $y(t)$ . В первую очередь в их состав включают управляющие входные переменные, с помощью которых осуществляется регулирующее воздействие на объект управления.

Идентификация – многоэтапная процедура. Основные ее этапы следующие:

1. Структурная идентификация заключается в определении структуры математической модели на основании теоретических соображений.

2. Параметрическая идентификация включает в себя проведение идентифицирующего эксперимента и определение оценок параметров модели по экспериментальным данным.

3. Проверка адекватности – проверка качества модели в смысле выбранного критерия близости выходов модели и объекта.

Идентификация проводилась по следующим пяти методам:

– iv (Instrument Variable approach) – подход оценки параметров регрессионных моделей, основанный на использовании дополнительных, не участвующих в модели, так называемых инструментальных переменных;

– svf (State Variable Filters approach) – подход, основанный на фильтре переменных состояний. Любая стационарная линейная система может быть описана как модель пространства состояний, с  $n$  переменными состояниями для систем  $n$ -го порядка. Метод реализует модель пространства состояний напрямую. Мгновенное выходное значение соответствует одной из переменных пространства состояний модели;

– gpmf (Generalized Poisson Moment Functions approach) – подход, основанный на моделировании случайной величины, равной числу событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга (Распределение Пуассона);

– n4sid (Subspace state-space estimation approach) – используется для оценивания пара-

метров моделей переменных состояния в канонической форме при произвольном числе входов и выходов;

– all (Combination of all of the preceding approaches) – сочетание всех предыдущих подходов.

**Идентификация модели беспилотного летательного аппарата для стабилизации высоты.** Рассмотрим настройку коэффициентов регулятора для стабилизации высоты. Динамическая характеристика изменения высоты от 100 до 1000 м представлена на рис. 1.

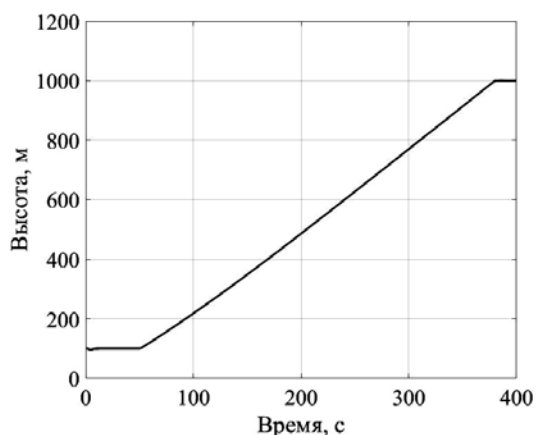


Рис. 1. Динамическая характеристика изменения высоты

В процессе идентификации будем следовать следующим принципам:

– полученная модель высоты должна максимально точно аппроксимировать динамическую характеристику;

– значение среднеквадратичной ошибки должно быть минимальным.

Для пяти подходов идентификации была получена модель высоты в виде передаточных функций:

– для подхода «iv»:

$$W(s) = \frac{8,727 \cdot 10^{-5} s + 2,354 \cdot 10^{-8}}{s^2 + 5,652 \cdot 10^{-5} s + 6,81 \cdot 10^{-8}}; \quad (1)$$

Fit to estimation data: 99,32%; MSE: 0,6058;

– для подхода «svf»:

$$W(s) = \frac{1,722 \cdot 10^{-14} s^8 - 1,813 \cdot 10^{-14} s^7 + 8,322 \cdot 10^{-13} s^6 - 8,609 \cdot 10^{-13} s^5 + 8,163 \cdot 10^{-11} s^4 + 0,001544 s^6 + 7,784 \cdot 10^{-5} s^5 + 2,953 \cdot 10^{-6} s^4 + 1,596 \cdot 10^{-10} s^3 - 1,752 \cdot 10^{-12} s^2 + 7,435 \cdot 10^{-8} s^3 + 1,404 \cdot 10^{-9} s^2 + 1,271 \cdot 10^{-13} s + 3,335 \cdot 10^{-17}}{s^9 + 0,2111 s^8 + 0,2227 s^7 + 7,435 \cdot 10^{-8} s^3 + 1,404 \cdot 10^{-9} s^2 + 1,271 \cdot 10^{-13} s + 3,335 \cdot 10^{-17}}; \quad (2)$$

Fit to estimation data: 99,3%; MSE: 0,6422;

– для подхода «gpmf»:

$$W(s) = \frac{0,0001003s^2 + 3,428 \cdot 10^{-7}s + 9,168 \cdot 10^{-11}}{s^3 + 0,004027s^2 + 2,522 \cdot 10^{-7}s + 2,594 \cdot 10^{-10}}; \quad (3)$$

Fit to estimation data: 99,26%; MSE: 0,7315;

– для подхода «n4sid»:

$$W(s) = \frac{1,885 \cdot 10^{-9}s + 5,915 \cdot 10^{-13}}{s^2 + 7,463 \cdot 10^{-10}s + 1,67 \cdot 10^{-12}}; \quad (4)$$

Fit to estimation data: 100%; MSE: 2,319 \cdot 10^{-10};

– для подхода «all»:

$$W(s) = \frac{-1,468 \cdot 10^{-6}s^6 - 6,355 \cdot 10^{-9}s^5 - 2,625 \cdot 10^{-8}s^4 + 4,543 \cdot 10^{-8}s^3 + 46,16s^5 + 211,5s^4 + 218,3s^3 + 8,354 \cdot 10^{-8}s^2 + 2,561 \cdot 10^{-8}s - 6,78 \cdot 10^{-11}}{s^7 + 8,658s^6 + 58,41s^5 + 1,061 \cdot 10^{-9}s + 1,585 \cdot 10^{-23}}; \quad (5)$$

Fit to estimation data: 99,97%; MSE: 0,003599.

Выбираем передаточную функцию (4), поскольку она максимально точно описывает модель.

**Проверка на робастную устойчивость.**

*Теорема Харитонова.* Для того чтобы система с характеристическим полиномом [3]:

$$Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (6)$$

была робастно устойчива на множестве

$$A = \{a : \underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i \quad i = 0, 1, \dots, n\} \quad (7)$$

необходимо и достаточно, чтобы все полиномы Харитонова были устойчивыми.

$$\begin{aligned} Q_1(\lambda) &: \overline{a}_n, \underline{a}_{n-1}, \overline{a}_{n-2}, \underline{a}_{n-3}, \overline{a}_{n-4}, \underline{a}_{n-5}, \dots; \\ Q_2(\lambda) &: \underline{a}_n, \overline{a}_{n-1}, \underline{a}_{n-2}, \overline{a}_{n-3}, \underline{a}_{n-4}, \overline{a}_{n-5}, \dots; \\ Q_3(\lambda) &: \underline{a}_n, \overline{a}_{n-1}, \underline{a}_{n-2}, \overline{a}_{n-3}, \underline{a}_{n-4}, \overline{a}_{n-5}, \dots; \\ Q_4(\lambda) &: \underline{a}_n, \underline{a}_{n-1}, \overline{a}_{n-2}, \overline{a}_{n-3}, \underline{a}_{n-4}, \underline{a}_{n-5}, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

В случае когда  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , нет необходимости проверять устойчивость всех четырех полиномов Харитонова. При  $n = 1, 2$  необходимо условие:  $\underline{a}_0 > 0, \underline{a}_1 > 0, \dots, \underline{a}_n > 0$  является достаточным.

Характеристическое уравнение для передаточной функции стабилизации высоты от 100 до 1000 м:

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + 7,158\lambda^2 + 2,927 \cdot 10^{-10}\lambda + 2,149 \cdot 10^{-13}. \quad (9)$$

Поскольку все коэффициенты больше 0, то характеристическое уравнение для высоты от 100 до 1000 м является робастно устойчивым.

**Синтез САУ исходя из условия обеспечения заданной степени затухания.** При оценке качества систем управления на основе косвенных методов была получена зависимость степени  $\psi$  затухания от ближайшего к мнимой оси корня, связанного с параметром  $m$ :

$$\psi = 1 - e^{-2\pi m}. \quad (10)$$

При расчетах систем регулирования чаще всего выбирают значение  $m$  от 0,22 ( $\psi = 0,75$ ) до 0,366 ( $\psi = 0,9$ ).

$$u = k_p + k_i \int \varepsilon(t) dt + k_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}; \quad (11)$$

$$p = -m\omega \pm j\omega; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} W_r(p) &= k_p + \frac{k_i}{p} + k_d p = \\ &= k_p + \frac{k_i}{j\omega - m\omega} + k_d(j\omega - m\omega); \end{aligned} \quad (13)$$

$$k_i = \omega(1 + m^2) \text{Im} + k_d \omega^2(1 + m^2);$$

$$k_p = -\text{Re} + \frac{k_i m}{\omega(1 + m^2)} + k_d \omega m. \quad (14)$$

**Синтез нечеткого регулятора для стабилизации высоты.** В качестве закона управления (ЗУ) для стабилизации заданной высоты использована следующая зависимость [4]:

$$\delta_B = K_{\Delta H} \Delta H + K_{\dot{H}} \dot{H} + K_{\int \Delta H dt} \int \Delta H dt + K_{\omega} \omega + K_{\omega_y} \omega_y, \quad (15)$$

где  $\Delta H = -H_{\text{заданная}} + H_{\text{текущая}}$ .

Для контроллера, основанного на нечеткой логике, входными сигналами являются ошибка регулирования высоты (рис. 2), интеграл ошибки регулирования высоты (рис. 3) и текущее значение высоты (рис. 4) [5]. Для данных переменных вводятся следующие термиы:

- отрицательное (minus);
- среднее (average);
- положительное (plus).

Для реализации процедур фазификации и дефазификации задаются функции принадлежности для каждой входной и выходной переменных.

Для контроллера выходными сигналами являются пропорциональная (рис. 5), интегральная (рис. 6) и дифференциальная составляющие ПИД-регулятора (рис. 7). Для данных переменных вводятся следующие термиы:

- малое (small);
- среднее (middle);
- большое (big).

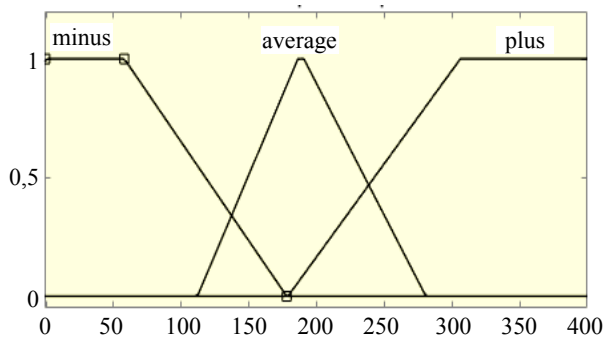


Рис. 2. Функция принадлежности для терм-множества лингвистической переменной «ошибка регулирования высоты»

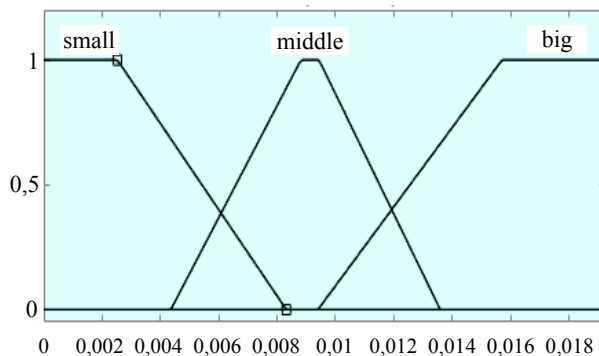


Рис. 6. Функция принадлежности для терм-множества лингвистической переменной I

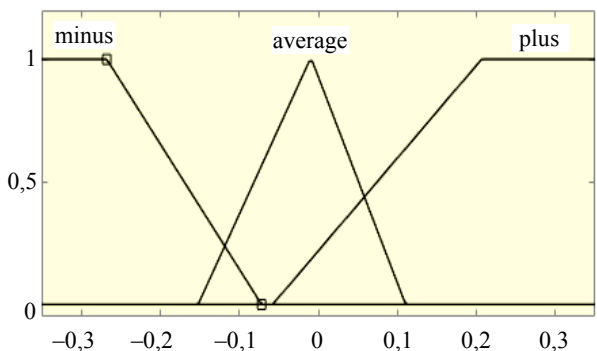


Рис. 3. Функция принадлежности для терм-множества лингвистической переменной «интеграл ошибки регулирования высоты»

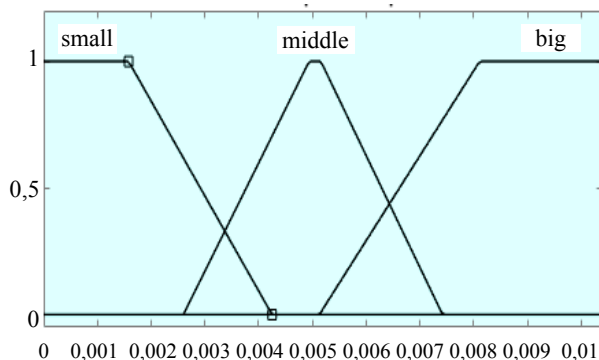


Рис. 7. Функция принадлежности для терм-множества лингвистической переменной D

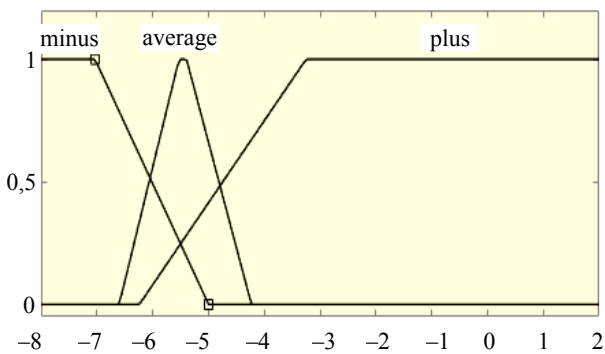


Рис. 4. Функция принадлежности для терм-множества лингвистической переменной «текущее значение высоты»

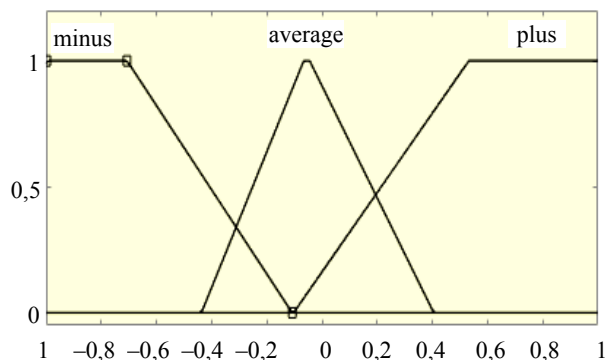


Рис. 8. Функция принадлежности для терм-множества лингвистической переменной «текущее значение тангажа»

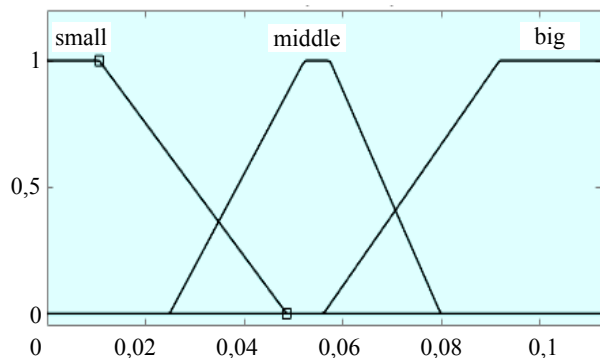


Рис. 5. Функция принадлежности для терм-множества лингвистической переменной P

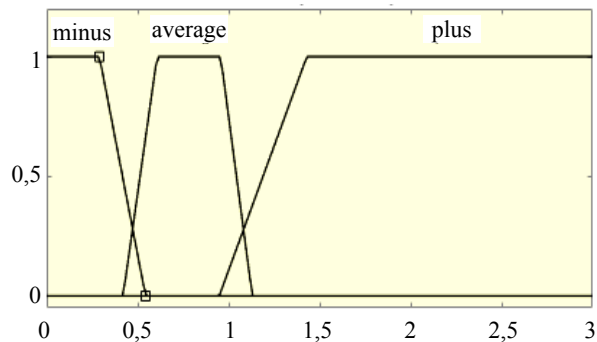


Рис. 9. Функция принадлежности для терм-множества лингвистической переменной «угловая скорость относительно оси Y»

ПД-регулятор ЗУ на продольный канал по тангажу без заданного тангажа. Для контроллера, основанного на нечеткой логике, входными сигналами являются текущее значение тангажа (рис. 8) и угловая скорость относительно оси Y (рис. 9).

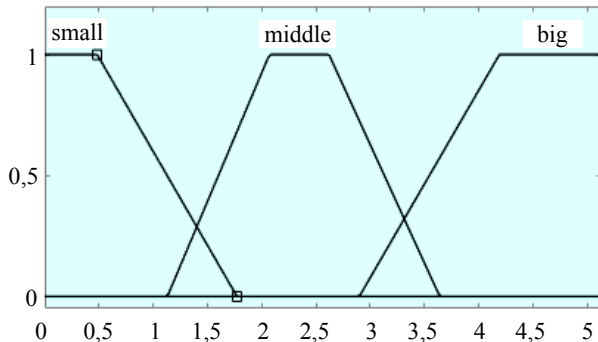


Рис. 10. Функция принадлежности для терм-множества лингвистической переменной P

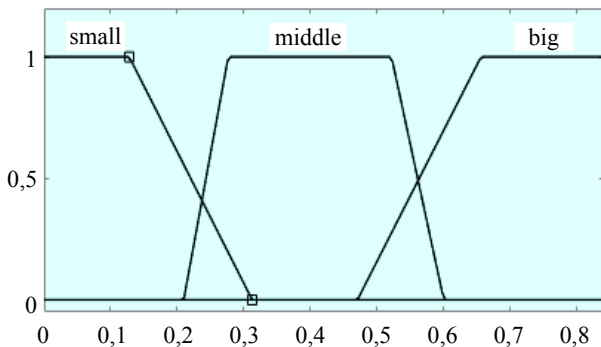


Рис. 11. Функция принадлежности для терм-множества лингвистической переменной D

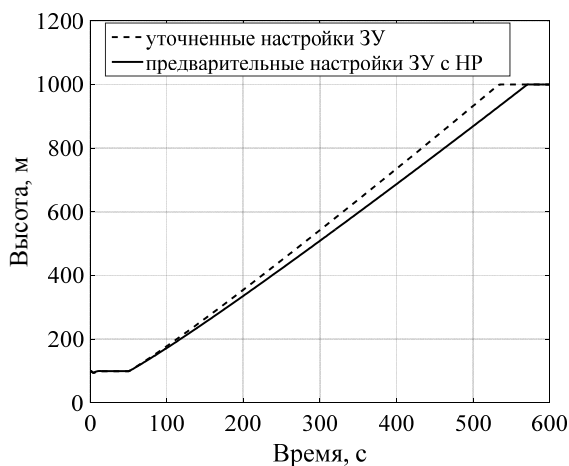


Рис. 12. Стабилизация высоты от 100 до 1000 м

При синтезе нечеткого регулятора были получены первичные настройки закона управления для стабилизации высоты.

$$\delta_B = 0,0562\Delta H + 0,0052\dot{H} + 0,009\int\Delta H dt + 2,074\vartheta + 0,6844\omega_y, \quad (16)$$

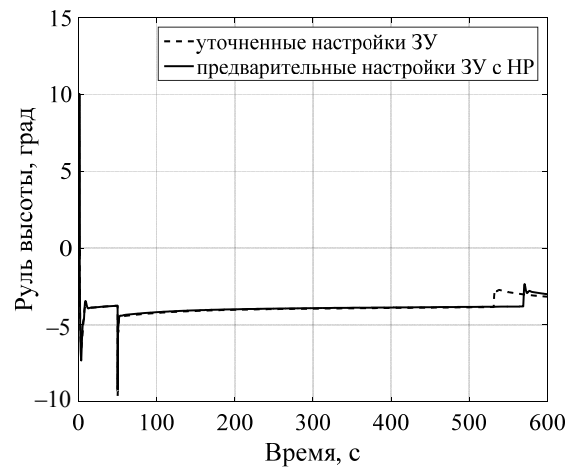


Рис. 13. Стабилизация руля высоты

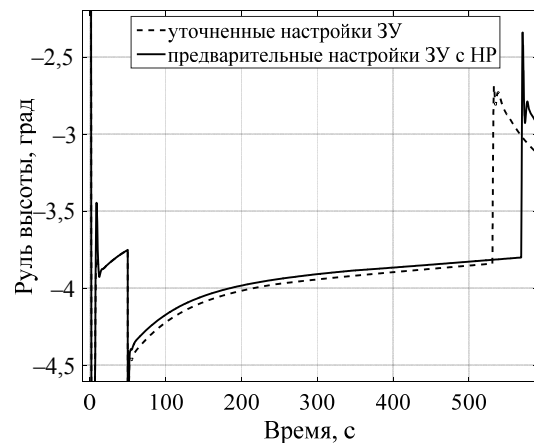


Рис. 14. Стабилизация руля высоты (увеличенный участок)

**Заключение.** Построение модели начинается с создания входных воздействий, которые передаются объекту, и измеряется реакция (отклик) на входные воздействия. Затем входные сигналы, выходные сигналы и выбранная для описания структура используются для расчета значений параметров модели в соответствии с установленным критерием качества. Критерий качества идентификации характеризует степень соответствия модели объекту в рамках согласованных условий и ограничений. Очень часто используется среднеквадратичный критерий. Соответствие модели также устанавливается в течение периода времени проверки путем сравнения откликов на независимые действия, которые не использовались при идентификации.

**Литература**

1. Гроп Д. Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979. 302 с.
2. Цыпкин Я. З. Информационная теория идентификации. М.: Физматлит, 1995. 336 с.

3. Ким Д. П., Дмитриева Н. Д. Сборник задач по теории автоматического управления. Линейные системы. М.: Физматлит, 2007. 168 с.
4. Системы автоматического управления летательных аппаратов / под ред. А. А. Красовского. М.: ВВИА, 1986. 478 с.
5. Рубанов В. Г. Интеллектуальные системы автоматического управления. Нечеткое управление в технических системах. Белгород: Изд-во БГТУ им. В. Г. Шухова, 2010. 170 с.

#### References

1. Grop D. *Metody identifikatsii sistem* [Methods of identification of systems]. Moscow, Mir Publ., 1979. 302 p.
2. Tsypkin Ya. Z. *Informatsionnaya teoriya identifikatsii* [Information theory of identification]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1995. 336 p.
3. Kim D. P., Dmitrieva N. D. *Sbornik zadach po teorii avtomaticheskogo upravleniya. Lineynyye sistemy* [Collection of problems on the theory of automatic control. Linear systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 168 p.
4. *Sistemy avtomaticheskogo upravleniya letatel'nykh apparatov* [Automatic control systems of aircraft]. Moscow, VVIA Publ., 1986. 478 p.
5. Rubanov V. G. *Intellektual'nyye sistemy avtomaticheskogo upravleniya. Nechetkoye upravleniye v tekhnicheskikh sistemakh* [Intelligent automatic control system. Fuzzy control in technical systems]. Belgorod, Izdatel'stvo BGTU imeni V. G. Shukhova Publ., 2010. 170 p.

#### Информация об авторах

**Шумский Андрей Николаевич** – аспирант кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: andreishumski91@gmail.com

**Карпович Дмитрий Семенович** – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: karpovich@tut.by

#### Information about the authors

**Shumski Andrei Nikolaevich** – PhD student, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: andreishumski91@gmail.com

**Karpovich Dmitriy Semenovich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: karpovich@tut.by

Поступила 30.11.2017

УДК 004.94

**М. Ю. Подобед, Д. С. Карпович**

Белорусский государственный технологический университет

**ОСОБЕННОСТИ УПРАВЛЕНИЯ КАЛОРИФЕРНЫМИ УСТАНОВКАМИ  
В СИСТЕМАХ КОНДИЦИОНИРОВАНИЯ ВОЗДУХА**

В составе большинства систем кондиционирования воздуха ключевую роль играют калориферные установки. При помощи данных аппаратов регулируется температура воздуха в помещении. При математическом моделировании систем кондиционирования воздуха нельзя пренебрегать нелинейными свойствами калориферных установок, так как это неминуемо приведет к неадекватности получаемой модели и к неточностям синтезируемой системы автоматического управления.

Учитывая большое количество разновидностей калориферов, разнообразие схем реализации систем кондиционирования воздуха и способов управления теплоотдачей, в работе были выделены основные виды возмущающих и управляющих воздействий для систем кондиционирования воздуха. На основании структурной схемы обобщенной системы кондиционирования приточного воздуха составлены системы уравнения тепло- и массового баланса теплоносителя и воздуха, наиболее точно отражающие все происходящие процессы.

Были показаны свойства калориферных установок, которые динамически меняются во времени в широком диапазоне регулирования расхода теплоносителя в трубках теплообменника. Также сформированы рекомендации по выбору способа гидравлической обвязки калорифера в системах кондиционирования воздуха с точки зрения улучшения настройки регулятора и увеличения точности работы системы автоматического управления.

**Ключевые слова:** система кондиционирования воздуха, калорифер, постоянная времени, гидравлическая обвязка калорифера.

**M. Yu. Podobed, D. S. Karpovich**

Belarusian State Technological University

**FEATURES OF CONTROL OF AIR HEATER UNITS  
IN AIR CONDITIONING SYSTEMS**

The air-heater systems play a key role in the majority of air-conditioning systems. With the help of these devices the air temperature is regulated indoors. The nonlinear properties of air heater units, can't be neglected as it will inevitably lead to the inadequacy of the model obtained and synthesized accuracies automatic control system for mathematical modeling of air conditioning systems.

Given the large number of varieties of heaters, the diversity scheme of the air conditioning systems and ways to manage heat dissipation in the main types were identified disturbing and control actions for air condition systems. On the basis of the block diagram of a generalized supply air conditioning system composed of equations of heat and mass balance of the coolant and the air most accurately reflect all the processes.

The nonlinear properties of air heater units that dynamically change in time over a wide range of coolant flow control in the heat exchanger tubes were shown. Recommendations are also formed at the choice method of hydraulic piping heater in air conditioning systems in terms of improving the settings regulator and increase the accuracy of the automatic control system.

**Key words:** air conditioning, heater, the time constant, the hydraulic piping heater.

**Введение.** Практически во всех инженерных системах здания, обеспечивающих комфортные параметры микроклимата в помещении, используются различные виды теплообменных аппаратов. Это относится не только к системам кондиционирования воздуха, но и к системам радиаторного отопления, воздушного отопления, зональным подогревателям, системам рекуперации тепла и т. д. В системах центрального кондиционирования чаще всего находят применение теплообменные аппараты (калориферы) типа «жидкость – воздух», практически полностью вытеснив устаревшие сис-

темы «пар – воздух» [1]. Поэтому без преувеличения можно сказать, что калорифер, как правило, является основным элементом систем кондиционирования воздуха. В самых простых приточных системах имеется хотя бы один калорифер, в котором горячая вода отдает свое тепло приточному воздуху.

Любой калорифер представляет собой объект с распределенными параметрами со значительной неоднородностью температур воздуха и теплоносителя. Температура изменяется вдоль трубки в пределах одного хода, между ходами и между рядами. Неравномерность тем-



пературы воздуха на выходе из калорифера может составлять десятки градусов и приближаться к половине перепада температур теплоносителя. В силу распределенности параметров математическое описание и анализ динамических характеристик калориферов крайне осложнены. Учитывая тот факт, что в системах кондиционирования приточный воздух, принудительно побуждаемый вентилятором, движется после калорифера турбулентно и активно перемешивается, то по этой причине в дальнейшем целесообразно и обоснованно рассматривать калорифер как объект с сосредоточенными параметрами.

**Основная часть.** Структурная схема системы кондиционирования воздуха с калорифером типа «теплоноситель – воздух» представлена на рис. 1. Учитывая все разнообразие схем реализации систем кондиционирования воздуха, и способов управления теплоотдачей калорифера, можно выделить следующие возмущающие воздействия [2]:

- 1)  $t_{\text{ВН}}$  – температура наружного воздуха, °С;
- 2)  $t_{\text{ВН}}$  – температура теплоносителя на входе в калорифер, °С;
- 3)  $G_{\text{В}}$  – расход воздуха через калорифер, кг/с (для VAV-систем);
- 4)  $G_{\text{В}}$  – расход теплоносителя через калорифер, кг/с.

В зависимости от контура обвязки управляющими воздействиями на теплоотдачу калорифера могут быть:

- а)  $G_{\text{В}}$  – расход теплоносителя через калорифер, кг/с;
- б)  $t_{\text{ВН}}$  – температура теплоносителя на входе в калорифер, °С.

Регулируемым параметром для приточных систем кондиционирования воздуха, как правило, является  $t_{\text{ВП}}$  – температура приточного воздуха, °С.

Для математического описания как количественного, так и качественного управления калорифером, необходимо также ввести следующие дополнительные обозначения:

- 1)  $G_{\text{ВП}}$  – расход приточного воздуха, непосредственно подающегося в помещение, кг/с;
- 2)  $G_{\text{ВБ}}$  – расход воздуха через байпасный канал по воздуху, кг/с (количественное регулирование);
- 3)  $G_{\text{ВБ}}$  – расход теплоносителя через байпасный канал по теплоносителю, кг/с (смесительный контур);
- 4)  $G_{\text{В1}}$  – расход теплоносителя в системе теплоснабжения, кг/с;
- 5)  $t_{\text{В}}$  – температура воздуха после калорифера, °С;
- 6)  $t_{\text{В1}}$  – температура теплоносителя на выходе из системы теплоснабжения, °С;

7)  $t_{\text{ВК}}$  – температура теплоносителя на выходе из калорифера, °С.

Стационарные процессы в калориферной установке могут быть описаны следующей системой уравнений:

**Уравнение теплопередачи:**

$$c_{\text{В}} G_{\text{В}} (t_{\text{В}} - t_{\text{ВН}}) = kF \left( \frac{t_{\text{ВН}} + t_{\text{ВК}}}{2} - \frac{t_{\text{ВН}} + t_{\text{В}}}{2} \right),$$

где  $c_{\text{В}}$  – удельная теплоемкость воздуха, Дж/кг · К;  $k$  – коэффициент теплоотдачи, Вт/м<sup>2</sup> · К;  $F$  – площадь поверхности нагрева калорифера, м<sup>2</sup>.

**Уравнение баланса тепла на переходе «теплоноситель – воздух»:**

$$c_{\text{В}} G_{\text{В}} (t_{\text{В}} - t_{\text{ВН}}) = c_{\text{В}} G_{\text{В}} (t_{\text{ВН}} - t_{\text{ВК}}),$$

где  $c_{\text{В}}$  – удельная теплоемкость теплоносителя, Дж/кг · К.

**Уравнение баланса тепла при смешении потоков теплоносителя:**

$$G_{\text{В1}} t_{\text{В1}} + G_{\text{ВБ}} t_{\text{ВК}} = G_{\text{В}} t_{\text{ВК}}.$$

**Уравнение баланса тепла при смешении потоков воздуха:**

$$G_{\text{В}} t_{\text{В}} + G_{\text{ВБ}} t_{\text{ВН}} = G_{\text{ВП}} t_{\text{ВП}}.$$

**Уравнение смешения потоков теплоносителя:**

$$G_{\text{В}} = G_{\text{ВБ}} + G_{\text{В1}}.$$

**Уравнение смешения потоков воздуха:**

$$G_{\text{ВП}} = G_{\text{В}} + G_{\text{ВБ}}.$$

**Уравнение расхода тепла:**

$$Q_{\text{Т}} = c_{\text{В}} G_{\text{В}} (t_{\text{В1}} - t_{\text{ВК}}),$$

где  $Q_{\text{Т}}$  – затрачиваемое количество тепла на обогрев, Вт.

Получение и решение уравнений динамики процесса теплопередачи в калорифере не может адекватно отражать все особенности протекания теплообменных процессов в конкретном калорифере по ряду причин: неоднородность распределения теплоносителя между рядами калорифера и трубками одного ряда; турбулентность движения теплоносителя в калорифере; турбулентность движения воздуха; конструктивных особенностей калорифера; гидравлических особенностей конкретного объекта и т. д.

Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования показали, что приточную функцию калорифера по каналу «изменение расхода теплоносителя – изменение температуры воздуха после калорифера» можно

аппроксимировать в виде апериодического звена первого порядка [3]:

$$W(p) = \frac{K}{T_K p + 1},$$

где  $K$  – статический коэффициент передачи калорифера, °C/кг/с;  $T_K$  – постоянная времени калорифера, с.

Коэффициент передачи калорифера по каналу «расход теплоносителя – температура приточного воздуха» индивидуально рассчитывается для каждого калорифера и зависит от большого количества факторов, учитывающих площадь калорифера, вид теплоносителя, скорость движения воздуха и теплоносителя, геометрические размеры и конструктивные особенности калорифера. График изменения коэффициента передачи калорифера КСк 3-11 системы кондиционирования воздуха по каналу «расход теплоносителя – температура приточного воздуха» представлен на рис. 2.

Постоянная времени калорифера рассчитывается по следующей зависимости [4]:

$$T_K = \frac{c_M m_M + c_W m_W}{c_W G_W + \left( \frac{2}{kF} + \frac{1}{c_W G_W} \right)^{-1}},$$

где  $c_M, c_W$  – удельная теплоемкость металла и воды, Дж/кг·K;  $m_M, m_W$  – масса металла теплообменника и воды в калорифере, кг;  $k$  – коэффициент теплопередачи аппарата, Вт/м<sup>2</sup>·°C;  $F$  – поверхность аппарата, м<sup>2</sup>.

Зависимость постоянной времени  $T_K$  от расхода теплоносителя при уличной температуре –15°С представлена на рис. 3. Можно заметить, что в рабочем диапазоне расходов

теплоносителя (без угрозы замораживания калорифера) постоянная времени может меняться в разы: от 114 с при расходе теплоносителя 0,2 кг/с и до 12 с при расходе 2,6 кг/с, что соответствует полностью открытому клапану и режиму максимальной теплопроизводительности калорифера. Диапазон изменения коэффициента передачи меняется от 1,6 до 21°С/кг/с в зависимости от расхода теплоносителя. Необходимо отметить, что в межсезонье при минимальных протоках теплоносителя через трубки калорифера и минимальной его теплопроизводительности инерционность калорифера может достигать инерционности обслуживаемого помещения. По внешним видам зависимостей  $T_K$  и  $K$  от расхода теплоносителя можно сделать вывод, что зависимости носят явно нелинейный характер. Пренебрежение вышеперечисленными особенностями калорифера при математическом моделировании приточных систем кондиционирования воздуха в помещениях могут внести существенные неточности, а для некоторых типов помещений с высокой точностью поддержания параметров микроклимата может привести к фатальным ошибкам. Неадекватность модели калорифера может вывести исследователя на ложно синтезированную систему управления с неоптимальными настройками регулятора.

Повлиять на зависимость постоянной времени калорифера от расхода теплоносителя позволяют схемы обвязки калорифера с постоянным расходом, так называемые смесительные контуры. Но такие схемы существенно дороже наиболее распространенных «дресселирующих контуров», так как требуют применения трехходового клапана и дополнительного насоса в обвязке калорифера.

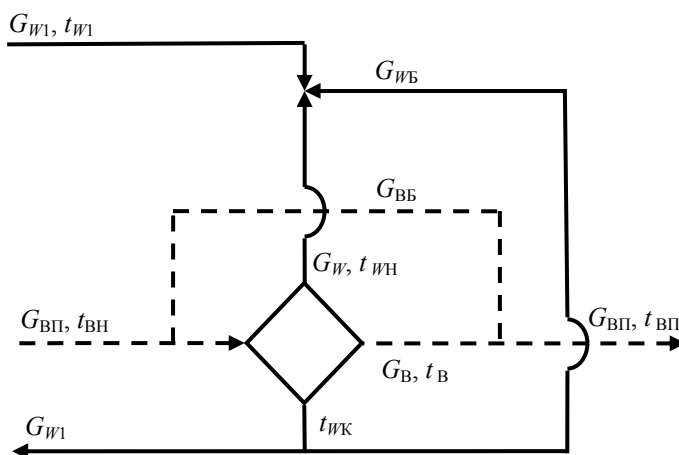


Рис. 1. Структурная схема системы кондиционирования воздуха с калорифером типа «теплоноситель – воздух»

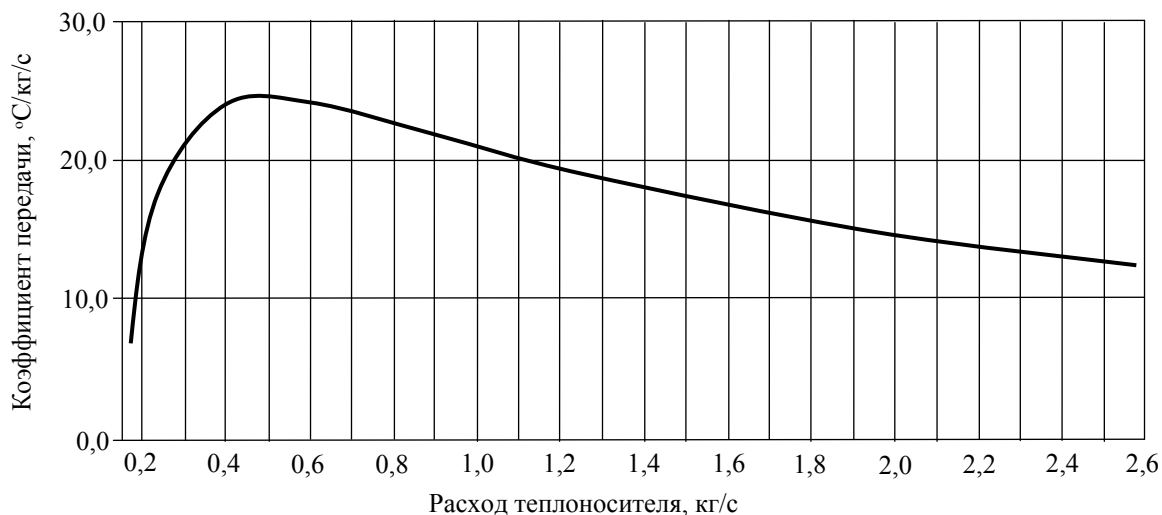


Рис. 2. Зависимость коэффициента передачи калорифера от расхода теплоносителя

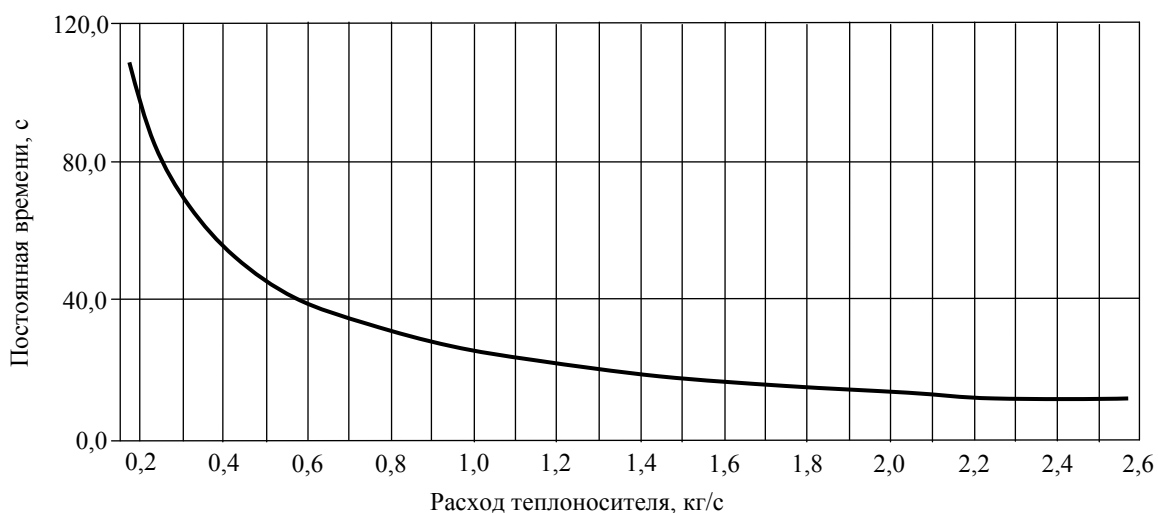


Рис. 3. Зависимость постоянной времени калорифера от расхода теплоносителя

**Заключение.** Таким образом, характеристики калориферной установки в системе кондиционирования воздуха будут меняться при различных расходах теплоносителя и температуре наружного воздуха. Невзирая на всеобщую распространенность калориферов в системах кондиционирования воздуха в помещениях и упрощенное математическое описание, для синтеза адекватной системы управления

необходимо учитывать явно нелинейные, динамически изменяющиеся во времени параметры калорифера. Данное обстоятельство должно носить обязательный характер в тех случаях, когда математическая модель не носит концептуальный теоретический характер, а требуется практическая апробация на объекте с широким диапазоном регулирования теплопроизводительности системы.

#### Литература

1. Автоматизация систем вентиляции и кондиционирования воздуха / Е. С. Бондарь [и др.]. Киев: Аванпост-Прим, 2005. 562 с.
2. Юрманов Б. Н. Автоматизация систем отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха. Л.: Стройиздат, 1976. 216 с.
3. Нефелов С. В. Техника автоматического регулирования в системах вентиляции и кондиционирования воздуха. М.: Стройиздат, 1984. 328 с.
4. Сотников А. Г. Автоматизация систем кондиционирования воздуха и вентиляции. Л.: Машиностроение, 1984. 240 с.

### References

1. Bondar' E. S., Gordienko A. S., Mikhaylov V. A., Nimich G. V. *Avtomatizatsiya sistem ventilyatsii i konditsionirovaniya vozdukha* [Automation of ventilation and air conditioning systems]. Kiev, Avantpost-Prim Publ., 2005. 562 p.
2. Yurmanov B. N. *Avtomatizatsiya sistem otopleniya, ventilyatsii i konditsionirovaniya vozdukha* [Automation of heating, ventilation and air conditioning]. Leningrad, Stroyizdat Publ., 1976. 216 p.
3. Nefelov S. V., Davydov Yu. S. *Tekhnika avtomaticheskogo regulirovaniya v sistemakh ventilyatsii i konditsionirovaniya vozdukha* [Technique of automatic control in ventilation and air-conditioning systems]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1984. 328 p.
4. Sotnikov A. G. *Avtomatizatsiya sistem i konditsionirovaniya vozdukha i ventilyatsii* [Automation of air conditioning and ventilation systems]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1984. 240 p.

### Информация об авторах

**Подобед Михаил Юрьевич** – ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: gabazin@mail.com

**Карпович Дмитрий Семенович** – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: karpovich@tut.by

### Information about the authors

**Podobed Mikhail Yur'yevich** – assistant lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gabazin@mail.com

**Karpovich Dmitriy Semenovich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: karpovich@tut.by

Поступила 22.11.2017

УДК 681.51

**М. Ю. Подобед, Д. С. Карпович**

Белорусский государственный технологический университет

**БЛОК НЕЧЕТКОЙ СЕЛЕКЦИИ СИГНАЛОВ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ**

В силу дешевизны и простоты реализации наиболее распространенными системами управления кондиционированием воздуха являются схемы с расположением нескольких датчиков температуры в контрольных точках помещения. При такой схеме управления контроллер высчитывает и обрабатывает усредненное значение температуры в помещении. Подобные схемы обладают следующими существенными недостатками:

1) возможны такие режимы работы системы управления, при которых в одной части помещения возможен локальный недогрев воздуха, а в другой части – перегрев, в то время как усредненное значение температуры останется в допустимом диапазоне;

2) с увеличением количества точек измерения температуры воздуха в помещении происходит нивелирование частных значений сигналов обратных связей и снижение чувствительности системы управления в целом.

Целесообразно предусмотреть селекцию сигналов обратных связей, которая могла бы решить следующий ряд задач:

- 1) обеспечение непрерывного мониторинга температурного поля в помещении;
- 2) осуществление управления с учетом не только усредненного значения температуры в помещении, но и с учетом значений отклонений температур от среднего;
- 3) реализация гибких правил усреднения в зависимости от параметров объекта;
- 4) улучшение динамических характеристик системы кондиционирования воздуха;
- 5) практическая реализация и простота.

**Ключевые слова:** система кондиционирования воздуха, блок селекции, нечеткая логика, обратная связь.

**M. Yu. Podobed, D. S. Karpovich**

Belarusian State Technological University

**BLOCK OF FUZZY RECOVERY SIGNALS**

Due to the cheapness and simplicity of implementation, the most common air-conditioning management systems are schemes with the arrangement of several temperature sensors in the control points of the room. With this control scheme, the controller calculates and processes the average value of the room temperature. Such schemes have the following significant drawbacks:

1) there are possible modes of operation of the control system, in which in one part of the room there is a local underheating of the air, and in the other part – overheating, while the average value of the temperature will remain within the permissible range;

2) with the increase in the number of points of measurement of the air temperature in the room, the leveling of particular values of the feedback signals and the decrease in the sensitivity of the control system as a whole.

It is advisable to provide for the selection of feedback signals, which could solve the following series of problems:

- 1) ensuring continuous monitoring of the temperature field in the room;
- 2) implementation of control taking into account not only the average value of the room temperature, but also taking into account the values of the deviations of temperatures from the mean;
- 3) implementation of flexible averaging rules depending on the parameters of the object;
- 4) improvement of the dynamic characteristics of the air conditioning system;
- 5) practical implementation and simplicity.

**Key words:** air conditioning system, selection unit, fuzzy logic, feedback.

**Введение.** При решении задач управления параметрами микроклимата на рабочих местах в помещении рассматривать объект в виде системы с сосредоточенными параметрами не всегда корректно. Параметры объекта (температура, влажность, концентрация вредных веществ и др.) под влиянием как внешних, так и внутренних

факторов, характеризуются пространственной протяженностью как по площади, так и по высоте помещения, а управляемая величина зависит не только от времени, но и от распределенности по пространственной области.

Рассмотрим задачу автоматического управления температурой на рабочих местах в про-

изводственном помещении. Пространственное и временное распределение температурного поля в помещении  $\theta(x, t)$  зависит от времени  $t$  и вектора пространственных координат  $x$ . В силу простоты реализации и большой распространенности рассмотрим вариант сосредоточенного управления путем граничного управления плотностью внешнего теплового потока.

Целью системы автоматического управления процессом кондиционирования воздуха в помещении является получение с определенной точностью в некоторый конечный момент времени  $\tau$  заданного распределения температурного поля  $\theta(x, t)$  в контрольных точках пространства помещения после воздействия внешнего возмущения или смены температурного режима.

Ограничения, накладываемые на процесс управления температурой воздуха на рабочих местах, можно записать в следующем виде:

$$\max |\theta(x, t)| \leq \theta_{\text{доп}},$$

где  $\theta_{\text{доп}}$  – допустимые значения температур на рабочих местах для каждой категории работ определяются СанПиНом «Требования к микроклимату рабочих мест в производственных и офисных помещениях» (2013).

Основные трудности, с которыми сталкиваются при управлении микроклиматом в помещении с учетом пространственной распределенности температурного поля:

- 1) проблема наблюдаемости – отсутствие возможности получения полной информации о распределении температурного поля в помещении;
- 2) интеграция информации с  $n$  количества точек измерения в систему каскадного сосредоточенного управления.

*Проблема наблюдаемости.* На практике полную информацию о распределении температурного поля в помещении получить невозможно, в силу невозможности использования бесконечно большого количества средств измерения температуры во всех точках помещения, как по площади, так и по высоте. Существуют методы приближенного определения распределения температурного поля в помещении по известным входным воздействиям и результатам измерения температуры в контрольных точках. Но данные методы требуют измерений дополнительных входных воздействий, наличия распределенной модели помещения – что усложняет систему управления и мало востребовано при практической реализации. Тем более что для некоторых классов помещений нет необходимости в определении распределения температурного поля по всему пространству, а лишь в определенных точках. Так, в соответствии с СанПиНом, измерения температуры в

производственных помещениях в целях контроля их соответствия гигиеническим требованиям должны проводиться на рабочих местах. Если рабочим местом являются несколько участков производственного помещения, то измерения осуществляются на каждом из них.

*Интеграция информации с  $n$  точек измерения в систему каскадного сосредоточенного управления.* В теории управления распределенными системами для этих целей предлагают использовать переходные  $\xi$ -блоки, преобразующие значения функции  $\theta(x, t)$  в одной или  $n$  фиксированных точках и формирующие соответствующий сосредоточенный сигнал обратной связи. При нескольких точках измерения в качестве сосредоточенного выхода могут рассматриваться интегральные оценки функции состояния распределенной системы, например, среднее ее значение или соотношения, характеризующие реальный результат измерения функции состояния в окрестности точки расположения соответствующих датчиков.

На данный момент в системах управления микроклиматом применяется метод обработки сигналов обратных связей по нескольким каналам путем усреднения значений. Системы с усреднением температуры имеют следующие преимущества по отношению к системам автоматического управления (САУ) с контролем температуры в одной точке помещения или вытяжного воздуха (представление помещения в качестве объекта с сосредоточенными параметрами):

- 1) способны контролировать локальные изменения температур на конкретных рабочих местах в помещении;
- 2) уменьшено влияние на показания температуры в помещении различных видов нагрузок (в сравнении с системами контроля температуры по вытяжному воздуху);
- 3) частичная компенсация влияния запаздывания для помещений больших размеров.

Недостатки подобных систем:

- 1) возможны такие режимы работы, при которых на части рабочих мест в помещении может быть локальный недогрев воздуха, а на другой части – перегрев, в то время как усредненное значение температуры останется в допустимом диапазоне;
- 2) при большом количестве установленных в помещении датчиков температуры воздуха чувствительность системы управления снижается.

Критический анализ систем управления с усреднением значений температур по нескольким каналам показал, что, несмотря на простоту, данный метод не всегда может адекватно оценивать распределенное температурное поле в помещении. Поэтому целесообразно предусмотреть

селекцию сигналов обратных связей, которая могла бы решить следующий ряд задач:

- 1) обеспечение непрерывного мониторинга температурного поля в помещении;
- 2) осуществление управления с учетом не только усредненного значения температуры в помещении, но и с учетом значений отклонений температур от среднего;
- 3) реализация гибких правил усреднения в зависимости от параметров объекта;
- 4) улучшение динамических характеристик системы кондиционирования воздуха;
- 5) практическая реализация и простота.

В связи с большим количеством каналов измерения температуры и неопределенности в правилах селекции результирующего сигнала обратной связи целесообразным видится возможность синтеза блока селекции, функционирующего по гибким правилам нечеткой логики.

*Реализация блока нечеткой селекции (БНС).* В контур системы автоматического управления температурой в помещении встраивается блок нечеткой селекции (БНС), на вход которого подаются сигналы от датчиков температуры на рабочих местах в помещении. Обработывая входные сигналы по нечеткому алгоритму, БНС формирует эквивалентный выходной сигнал обратной связи, который подается на вход ре-

гулятора температуры. Структурная схема системы кондиционирования воздуха (СКВ) в помещении с БНС сигналов от четырех каналов обратных связей приведена на рис. 1.

Где  $U$  – выходной сигнал из регулятора;  $U_{\text{кан}}$  – выходной сигнал от датчика температуры (канального);  $U_{\text{жел}}$  – желаемое значение температуры приточного воздуха;  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{31}$ ,  $\varepsilon_{33}$ ,  $\varepsilon_{\text{эжв}}$  – сигналы рассогласований;  $t_{\text{в}}$  – температура приточного воздуха.

БНС состоит из следующих основных элементов: блоки вычисления сигналов рассогласований по каждому каналу обратной связи, блок фазификации, блок агрегатирования, блок активации, блок аккумуляции, блок дефазификации. Структурная БНС приведена на рис. 2.

В БНС вычисляются сигналы рассогласований ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ) между заданными (задание 1, задание 2, ..., задание  $n$ ) и действительными значениями температур ( $T_1, T_2, \dots, T_n$ ) на рабочих местах для каждого канала обратной связи. Если рабочие места, в которых происходит измерение температур, находятся в одном помещении, а категории выполняемых работ по уровню энергозатрат относятся к одной и той же категории, то желаемое значение температур для всех рабочих мест может иметь одинаковое значение.

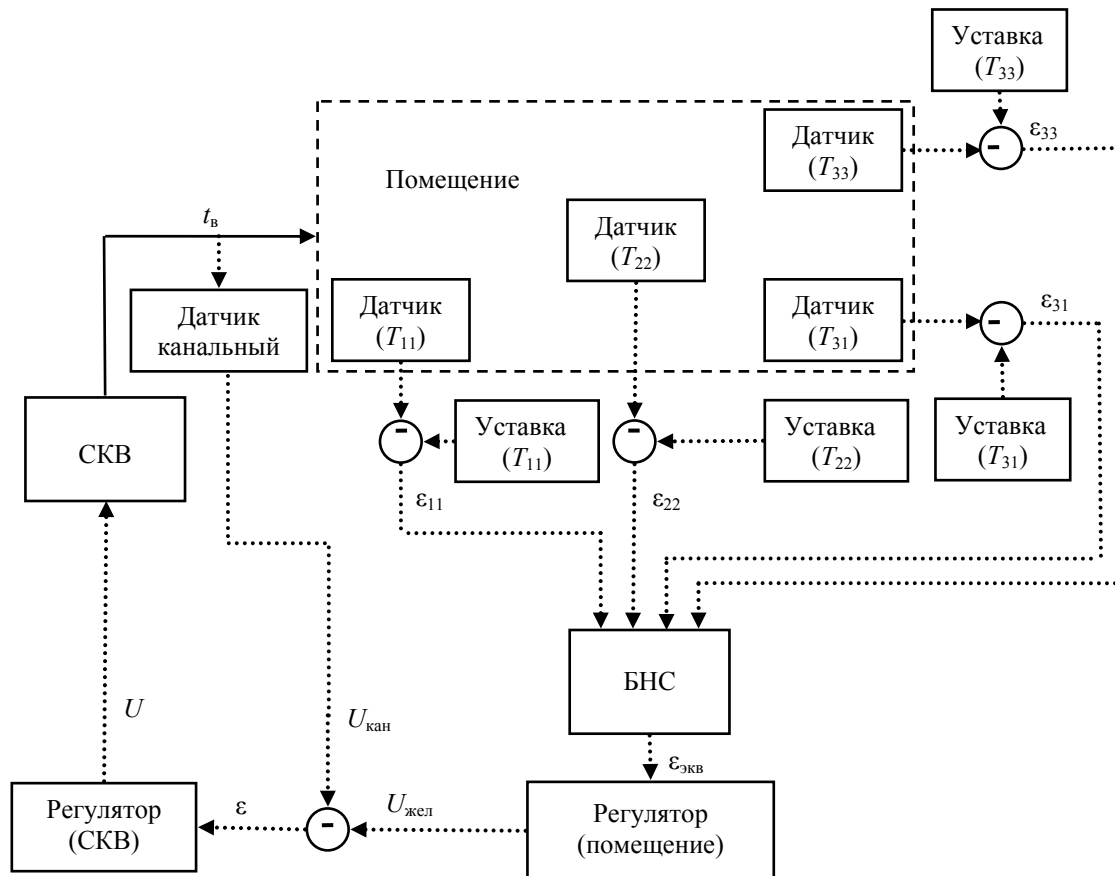


Рис. 1. Структурная схема системы с БНС

Затем вычисленные сигналы рассогласования для всех каналов обратных связей подвергаются фазификации (вычислению соответствия между численными значениями сигналов рассогласования и значением функций принадлежности соответствующего ей терма входной лингвистической переменной). Далее по заранее определенным правилам нечеткого вывода в БНС осуществляется процедура определения истинности каждого из правил нечеткого вывода (агрегатирование) и нахождения степени истинности каждого из подзаключений правил нечеткого вывода (активация). На стадии аккумуляции происходит нахождение функции принадлежности для выходной лингвистической переменной «эквивалентный сигнал рассогласования», которое преобразу-

ется в четкий выходной сигнал (дефазификация) ( $\epsilon_{\text{ЭКВ}}$ ).

В зависимости от целей, преследуемых системой автоматического управления температурой в помещении, могут подвергаться изменению формы функций принадлежности входных сигналов рассогласований, и выходного эквивалентного сигнала рассогласования, численные диапазоны значений функций принадлежности, правила нечеткого вывода и дефазификации.

Рассмотрим помещение с четырьмя распределенными по площади рабочими местами с одинаковой категорией выполняемых работ по уровню энергозатрат (рис. 3). На каждом рабочем месте установлено по одному датчику измерения температуры, которые формируют четыре выходных значения ( $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ ).

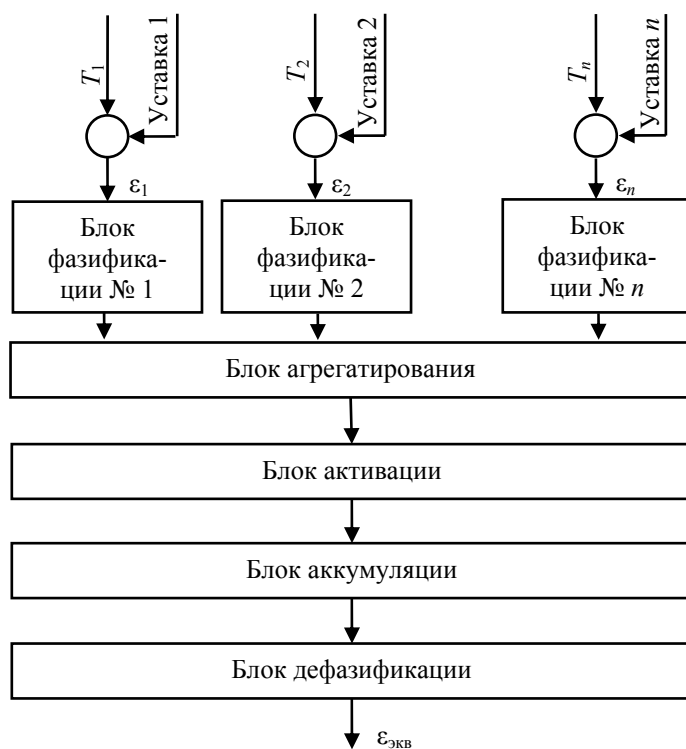


Рис. 2. Структурная схема БНС

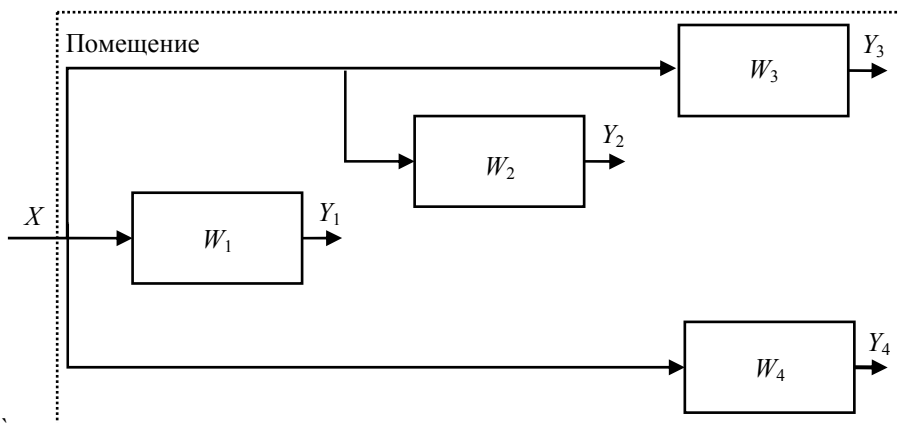


Рис. 3. Структурная схема помещения с четырьмя рабочими местами



При первом приближении передаточную функцию в рассматриваемом помещении по каналу «температура приточного воздуха – температура воздуха в помещении» можно аппроксимировать в виде аperiodического звена первого порядка с запаздыванием. Для системы управления с усреднением значения температуры общий выходной сигнал запишется:

$$Y = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}{4}$$

или в общем виде

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_n.$$

Эквивалентная передаточная функция для системы с усреднением в общем виде запишется

$$W_{\text{экв}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_n.$$

Для системы управления с блоком нечеткой селекции выходной сигнал в общем виде имеет вид

$$Y = \frac{h_1 Y_1 + h_2 Y_2 + h_3 Y_3 + h_4 Y_4}{4},$$

где  $h_1, h_2, h_3, h_4$  – весовые коэффициенты, формируемые БНС индивидуально для каждого сигнала обратной связи.

Эквивалентная передаточная функция для системы с БНС в общем виде запишется

$$W_{\text{экв}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_n W_n.$$

В последней формуле весовой коэффициент  $h_n$  представляет собой числовой коэффициент, отображающий важность (значимость)  $n$  сигнала обратной связи в формировании эквивалентного сигнала  $\varepsilon_{\text{экв}}$ .

*Примеры реализации БНС для производственного помещения с четырьмя рабочими местами категории работ Па.*

В соответствии с СанПиН «Требования к микроклимату рабочих мест в производственных и офисных помещениях» (2013), допустимые значения параметров микроклимата на рабочих местах производственных и офисных помещений для холодного периода года при категории работ Па уровня энергозатрат находятся в диапазоне температур от 17 до 23°C [1]. Разница между максимальным и минимальным значением температур составляет 6°C. Таким образом, целесообразно определить область изменения базовой переменной (значение сигнала рассогласования) в диапазоне от –6 до 6°C. Минимальное значение –6°C будет дости-

гаться в том случае, когда температура в точке измерения будет 23°C, а желаемое значение 17°C, а значение 6°C – сигнал рассогласования примет в противоположном случае.

Базовое множество термов лингвистической переменной определим следующими лингвистическими переменными:

$$T = \{\text{«отрицательный»}, \text{«нормальный»}, \text{«положительный»}\}.$$

Выберем термы треугольной формы [2]:

- 1) они характеризуются простотой;
- 2) содержат точки, позволяющие задать области, где понятие является истинным, а где – ложным, и таким образом упрощают описание системы.

Функции принадлежности сигнала рассогласования приведены на рис. 4.

Учитывая, что в рассматриваемом помещении значения измеренной температуры на всех рабочих местах одинаково важны и имеют одинаковый вес, то базовые множества лингвистических переменных, формы термов и их области изменения целесообразно принять одинаковыми.

Выходной сигнал БНС является обобщенной характеристикой, усреднением значений температуры по рабочим местам в помещении.

При значениях входных сигналов рассогласований в БНС, для которых функция принадлежности  $\mu = 1$ , значение эквивалентного сигнала рассогласования можно описать при помощи традиционной математики. После расчета всех возможных комбинаций входных значений сигналов рассогласований в БНС можно сформировать перечень возможных значений эквивалентного сигнала рассогласования и соответствующих им термов. При наличии четырех значений входных в БНС сигналов рассогласования по каналам обратных связей, описываемых тремя термами «отрицательный», «нормальный», «положительный», необходимо девять термов, чтобы описать всевозможные значения эквивалентного выходного сигнала рассогласования. По аналогии с входными сигналами рассогласований целесообразно применить термы треугольной формы и аналогичные области изменения (рис. 5).

Самым простым принципом формирования правил нечеткого вывода эквивалентного рассогласования является принцип на основании «усреднения значений сигналов рассогласований в точках с  $\mu = 1$ ». Такие системы автоматического управления позволяют существенно ускорить процесс перехода при смене температурных режимов в помещении с прекомфортный/нормальный, в сравнении с классическими системами с усреднением температуры.

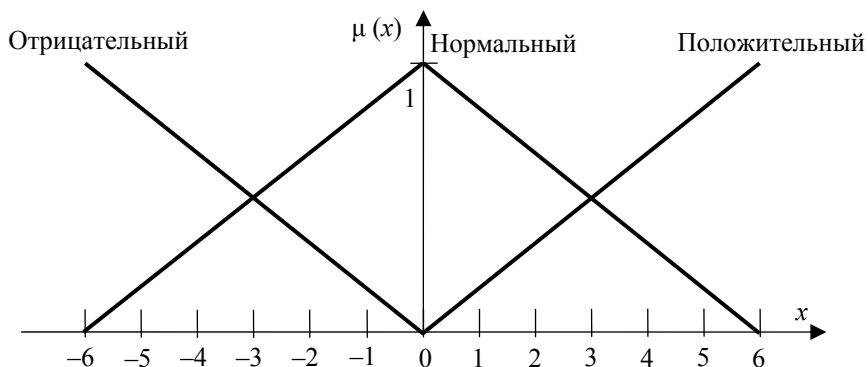


Рис. 4. Функция принадлежности сигнала рассогласования

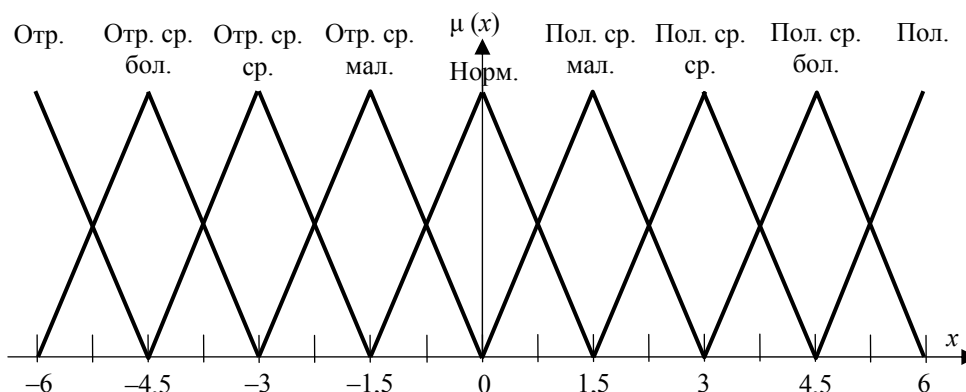


Рис. 5. Функция принадлежности эквивалентного сигнала рассогласования

Проанализируем поведение температур в точках измерения при смене режимов работы прекомфортный/нормальный. При смене режима начинают экспоненциально увеличиваться температуры во всех точках помещения, спустя какое-то время в одной или нескольких точках значение функции принадлежности сигнала рассогласования к терму «нормальный» будет близко к 1. Для того чтобы избавиться от колебаний температуры в данный момент, необходимо искусственно увеличить инерционность системы, путем смещения эквивалентного сигнала рассогласования до ближайшего меньшего терма. Для этого необходимо модифицировать правила нечеткого вывода, в которых один из сигналов рассогласования достигает «нормального» значения, а все остальные еще «отрицательный» или «положительный». Система автоматического управления с БНС (без колебаний) позволяет снизить уровень перерегулирования практически до 0, сохранив при этом время переходного процесса на среднем уровне между системой с усреднением и системой с БНС ( $\mu = 1$ ).

При приближении значения функции принадлежности одного сигнала рассогласования к терму «отрицательный» или «положительный», в то время как значения функций принадлежности других сигналов рассогласований советуют терму «нормальный», целесообразно сме-

стить эквивалентный сигнал рассогласования до ближайшего большего или соответственно меньшего терма.

Также применение БНС позволяет при помощи весовых коэффициентов увеличить или уменьшить значимость значений сигналов обратных связей от некоторых обратных связей.

Путем вариаций правил нечеткого вывода и изменений весовых коэффициентов для значений температуры в каждой точке помещения можно уменьшить присущие системе с усреднением недостатки и расширить функциональные возможности системы управления с большим количеством датчиков в канале обратной связи.

**Заключение.** В данной статье были проанализированы существующие методики управления температурой в производственных помещениях больших объемов с пространственной распределенностью и неоднородностью температурного поля. Критический анализ систем управления с усреднением значений температур по нескольким каналам показал, что, несмотря на простоту, данный метод не всегда может адекватно оценивать распределенное температурное поле в помещении. Поэтому целесообразно предусмотреть селекцию сигналов обратных связей.

Предложен блок нечеткой селекции, предназначенный для обработки сигналов обратных

связей от датчиков температуры воздуха в рабочих зонах помещения и позволяющий увеличить количество вариантов обработки сигналов обратных связей. Для больших помещений с присущей инерционностью и наличием запаздывания БНС позволяет уменьшить время переходного процесса при каждодневной смене режимов работы СКВ без изменений каче-

ства. Путем вариаций правил нечеткого вывода и изменений весовых коэффициентов для значений температуры в каждой точке помещения можно уменьшить присущие системе с усреднением недостатки и расширить функциональные возможности в системе управления с большим количеством датчиков в канале обратной связи.

### Литература

1. Требования к микроклимату рабочих мест в производственных и офисных помещениях: СанПиН : утв. постановлением М-ва здравоохранения Респ. Беларусь 30.04.13 № 33 [Электронный ресурс]. URL: <http://bresttorg.by/DswMedia/pmz33.pdf> (дата обращения: 22.11.2017).
2. Шеври Ф. Нечеткая логика // Техническая коллекция Schneider Electric. 2009. № 31. С. 32.

### References

1. SanPiN. Requirements to the microclimate of workplaces in production and office premises. Available at: <http://bresttorg.by/DswMedia/pmz33.pdf> (accessed 22.11.2017).
2. Shevri F. Fuzzy logic. *Tekhnicheskaya kolleksiya Schneider Electric* [Technical Collection of Schneider Electric], 2009, no. 31, 32 p.

### Информация об авторах

**Подобед Михаил Юрьевич** – ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [gabazin@mail.com](mailto:gabazin@mail.com)

**Карпович Дмитрий Семенович** – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [karpovich@tut.by](mailto:karpovich@tut.by)

### Information about the authors

**Podobed Mikhail Yur'yevich** – assistant lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [gabazin@mail.com](mailto:gabazin@mail.com)

**Karpovich Dmitriy Semenovich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [karpovich@tut.by](mailto:karpovich@tut.by)

Поступила 22.11.2017

УДК 681.51

**М. Ю. Подобед, В. В. Сарока**

Белорусский государственный технологический университет

**АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ КОНДИЦИОНИРОВАНИЯ ВОЗДУХА ПО ОБОБЩАЮЩЕМУ КРИТЕРИЮ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА**

В большинстве систем кондиционирования воздуха (СКВ) центральное место занимают различного типа калориферные установки. При рассмотрении работы таких установок традиционно прибегают к упрощенному аппарату математического описания протекающих процессов теплопередачи. На самом же деле, при рассмотрении работы калориферной установки по каналу «изменение расхода теплоносителя – температура воздуха» постоянная времени и коэффициент передачи меняются в широком диапазоне и могут оказывать существенные влияния на систему автоматического управления. Коэффициент передачи и постоянная времени калорифера по каналу «расход теплоносителя – температура приточного воздуха» имеют нелинейный характер и меняются в широком диапазоне. В осенне-весенние периоды при минимальных протоках теплоносителя через трубки калорифера и минимальной его теплопроизводительности инерционность калориферной установки может достигать инерционности обслуживаемого помещения. Поэтому целесообразно рассмотреть возможность применения в контуре автоматического управления системой кондиционирования воздуха регулятора, который непрерывно адаптировался бы под изменяющиеся свойства объекта управления, а также определить критерий, который бы позволял производить однозначную адаптацию.

**Ключевые слова:** система кондиционирования воздуха, калорифер, постоянная времени, система адаптации, обобщенный критерий температурного режима.

**M. Yu. Podobed, V. V. Saroka**

Belarusian State Technological University

**ADAPTIVE MANAGEMENT OF AIR CONDITIONING SYSTEM BY GENERALIZED TEMPERATURE MODE CRITERIA**

In most air-conditioning systems (SLE), the central place is occupied by a different type of air-heater. When considering the operation of such installations, a simplified apparatus for mathematical description of the ongoing heat transfer processes is traditionally used. In fact, when considering the operation of the air-conditioning unit through the channel “changing the coolant flow rate – air temperature” the time constant, and the transmission factor vary in a wide range, and can have significant effects on the automatic control system. The transmission coefficient and time constant of the air heater on the channel “coolant flow rate – supply air temperature” are non-linear and vary in a wide range. In the autumn-spring periods with minimal heat carrier flows through the tubes of the air heater and its minimum heat output, the inertia of the air-heater can reach the inertia of the room served. Therefore, it is advisable to consider the possibility of using a regulator in the automatic control loop of the air conditioning system, which has continuously adapted to the changing properties of the control object, and to determine a criterion that would allow for unambiguous adaptation.

**Key words:** air conditioning system, air heater, time constant, adaptation system, generalized temperature regime criterion.

**Введение.** Коэффициент передачи  $K$  и постоянная времени  $T_k$  калорифера в системе кондиционирования воздуха существенно меняется в зависимости от расхода теплоносителя и температуры наружного воздуха, поэтому целесообразно рассмотреть возможность применения регулятора с переменной структурой в контуре управления температурой приточного воздуха или нескольких регуляторов, переключение между которыми производилось бы в зависимости от критерия, характеризующего динамические характеристики калорифера в определенные моменты времени.

**Основная часть.** Рассмотрим выражение для расчета температуры приточного воздуха после калорифера:

$$t_B = t_{BH} + \frac{t_{WH} - t_{BH}}{\left( \frac{1}{kF} + \frac{1}{2G_W c_W} + \frac{1}{2c_B \rho_B L} \right) c_B \rho_B L},$$

где  $t_B$  – температура воздуха после калорифера, °C;  $t_{BH}$  – температура наружного воздуха, °C;  $t_{WH}$  – температура теплоносителя на входе в калорифер, °C;  $k$  – коэффициент теплоотдачи, Вт/м<sup>2</sup> · °C;  $F$  – площадь поверхности нагрева калорифера, м<sup>2</sup>;  $G_W$  – массовый расход тепло-

носителя, кг/с;  $c_W$  – теплоемкость теплоносителя, Дж/кг · К;  $c_B$  – удельная теплоемкость воздуха, Дж/кг · К;  $\rho_B$  – плотность воздуха при средней температуре воздуха, кг/м<sup>3</sup>;  $L$  – объемный расход воздуха, м<sup>3</sup>/с.

Обозначим знаменатель через  $g$ , тогда:

$$t_B = t_{BH} + \frac{t_{WH} - t_{BH}}{g}$$

или

$$g = \frac{t_{WH} - t_{BH}}{t_B - t_{BH}} = \frac{1}{K_B},$$

где  $K_B$  – коэффициент нагрева воздуха, который определяется по формуле [1]

$$K_B = \frac{t_B - t_{BH}}{t_{WH} - t_{BH}}.$$

Температура теплоносителя на входе в калорифер зависит от наружной температуры по отопительному графику (коэффициенты  $k$  и  $b$ ), тогда

$$K_B = \frac{t_B - t_{BH}}{kt_{BH} + b - t_{BH}} = \frac{t_B - t_{BH}}{t_{BH}(k-1) + b}.$$

При известных параметрах температурного графика системы отопления для системы кондиционирования воздуха (СКВ) по значениям температуры приточного и наружного воздуха, можно рассчитать значение коэффициента эффективности воздухонагрева  $K_B$ . Таким образом, коэффициент эффективности по воздуху  $K_B$  зависит от  $t_B$  и  $t_{BH}$ , точнее от перепада температуры по воздуху до и после теплообменника. Вариация любого из значений температур ( $t_B$  или  $t_{BH}$ ) спустя какое-то время приведет СКВ к новому стационарному состоянию, с новым значением  $K_B$ . Причем  $K_B$  можно рассчитать заранее, до начала переходного процесса. Учитывая тот факт, что рассматривается система с постоянным расходом воздуха, то значение  $K_B$  точно определяет расход теплоносителя в новом установившемся режиме. Расход теплоносителя в стационарном режиме  $G_W$ , при качественном регулировании, можно рассматривать в зависимости от  $K_B$  ( $t_B$  или  $t_{BH}$ ):

$$G_W = f(K_B) = f(t_B, t_{BH}).$$

Проанализируем зависимость для расчета постоянной времени калорифера [2]:

$$T_K = \frac{c_M m_M + c_W m_W}{c_W G_W + \left[ \frac{2}{A \left( \frac{\rho_B L}{f} \right)^n \left( \frac{G_W}{\rho_W f_W} \right)^m F} + \frac{1}{c_W G_W} \right]^{-1}},$$

где  $c_M$  – удельная теплоемкость металла, Дж/кг · К;  $m_M, m_W$  – масса металла теплообменника и теплоносителя в калорифере, кг;  $f$  – площадь фронтального сечения калорифера по воздуху, м<sup>2</sup>;  $f_W$  – средняя площадь живого сечения одного хода теплообменника, м<sup>2</sup>;  $\rho_W$  – плотность теплоносителя при средней температуре воздуха, кг/м<sup>3</sup>;  $A, n, m$  – коэффициенты теплопередачи калорифера.

При постоянном расходе воздуха  $L$  справедлива запись:

$$T_K = f(G_W) = f(K_B) = f(t_B, t_{BH}).$$

Изменение температуры приточного воздуха от расхода теплоносителя при различных температурных режимах (для отопительного графика 105/70) приведено на рис. 1. Из графика видно, что одной и той же температуре приточного воздуха при различных значениях наружной температуры и температуры теплоносителя на входе в калорифер соответствуют различные расходы теплоносителя.

Статический коэффициент передачи калорифера по каналу «температура приточного воздуха – расход теплоносителя»  $K$  рассчитывается по формуле

$$K = \frac{t_B}{G_W}.$$

Из зависимости для расчета температуры приточного воздуха для различных температурных режимов, т. е. при  $t_{BH} = \text{const}$  и  $t_{WH} = \text{const}$  (из температурного графика) можно заметить, что  $t_B$  находится в зависимости от расхода теплоносителя. Следовательно, для любого значения наружной температуры верно утверждение, что статический коэффициент передачи зависит от расхода теплоносителя:

$$K = f(G_W).$$

Из вышеизложенного очевидно, что при каждом значении температуры наружного воздуха динамические характеристики калорифера  $T_K$  и  $K$  определяются расходом теплоносителя (и  $K_B$ ), который определяется перепадом температур по воздуху  $t_B$  и  $t_{BH}$ . Поэтому, целесообразно рассматривать коэффициент эффективности по воздуху  $K_B$  в качестве обобщающего критерия температурного режима, который определяет динамические характеристики калорифера.

Учитывая тот факт, что характеристики остальных элементов (датчик, исполнительный механизм) в замкнутом контуре локальной системы управления не существенно изменяются во времени и не зависят от других факторов, то

настройки параметров регулятора будут зависеть от постоянной времени  $T_k$ , статического коэффициента передачи калорифера  $K$  и гидравлической характеристики клапана. В отличие от постоянной времени калорифера со строгой зависимостью от расхода теплоносителя, статический коэффициент можно рассматривать, как зависящий от расхода только при постоянной температуре наружного воздуха. То есть для каждого значения температуры наружного воздуха можно однозначно идентифицировать динамические характеристики калорифера по ранее полученным зависимостям. В связи с этим САУ должна адаптировать настройки регулятора под изменяющиеся параметры нелинейного объекта.

Для системы кондиционирования воздуха режимы работы меняются в зависимости от температуры наружного воздуха в диапазоне от  $-25$  до  $+10^\circ\text{C}$ , а ранее полученные зависимости позволяют рассчитать динамические характеристики калорифера для каждого режима работы.

За величину, однозначно характеризующую режим работы, целесообразно принять температуру наружного воздуха. А в качестве обобщающего критерия температурного режима, который определяет динамические характеристики калорифера, целесообразно рассматривать коэффициент эффективности по воздуху  $K_B$ . Таким образом, можно получить следующую табл. 1, характеризующую все множество возможных состояний системы в контрольных точках.

Применим метод адаптации с табличным управлением: зная заранее возможные измене-

ния режима работы системы, выполняют идентификацию объекта для нескольких разных режимов и для каждого из них находят параметры регулятора. Значения этих параметров записывают в таблицу. В процессе функционирования системы измеряют величину, которая характеризует режим работы системы, и, в зависимости от ее значений, выбирают из таблицы значения коэффициентов ПИД-регулятора.

Табличное управление характеризуется высоким быстродействием, отсутствием ложного срабатывания или расхождения алгоритмов адаптации. В общем случае таблица может быть многомерной; для снижения необходимой размерности таблицы можно использовать интерполяцию данных с помощью сплайна [3].

Для каждого контрольного состояния системы, зная расходы теплоносителя, однозначно можно определить динамические характеристики калорифера и настройки регулятора, это значит, что можно получить таблицу управления (табл. 2).

Переключение между столбцами в таблице настроек регулятора должно происходить по значению температуры наружного воздуха, выбор строки в таблице должен осуществлять по расчетному значению коэффициента нагрева воздуха  $K_B$  для желаемого значения температуры приточного воздуха. При несовпадении реальных рабочих точек с контрольными необходимо применить интерполяцию данных сначала по ближайшим двум столбцам, а затем по строке. Структурная схема САУ приведена на рис. 2.

Таблица 1

**Множество возможных состояний калорифера в контрольных точках**

$K_B$	Температура наружного воздуха $t_{вн}$							
	-25	-20	-15	-10	-5	0	5	10
0	$G_W$ (-25; 0)	$G_W$ (-20; 0)	$G_W$ (-15; 0)	$G_W$ (-10; 0)	$G_W$ (-5; 0)	$G_W$ (0; 0)	$G_W$ (5; 0)	$G_W$ (10; 0)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$N$	$G_W$ (-25; $N$ )	$G_W$ (-20; $N$ )	$G_W$ (-15; $N$ )	$G_W$ (-10; $N$ )	$G_W$ (-5; $N$ )	$G_W$ (0; $N$ )	$G_W$ (5; $N$ )	$G_W$ (10; $N$ )

Таблица 2

**Множество настроек регулятора в контрольных точках**

$K_B$	Температура наружного воздуха $t_{вн}$							
	25	-20	-15	-10	-5	0	5	10
0	Per (-25; 0)	Per (-20; 0)	Per (-15; 0)	Per (-10; 0)	Per (-5; 0)	Per (0; 0)	Per (5; 0)	Per (10; 0)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$N$	Per (-25; $N$ )	Per (-20; $N$ )	Per (-15; $N$ )	Per (-10; $N$ )	Per (-5; $N$ )	Per (0; $N$ )	Per (5; $N$ )	Per (10; $N$ )

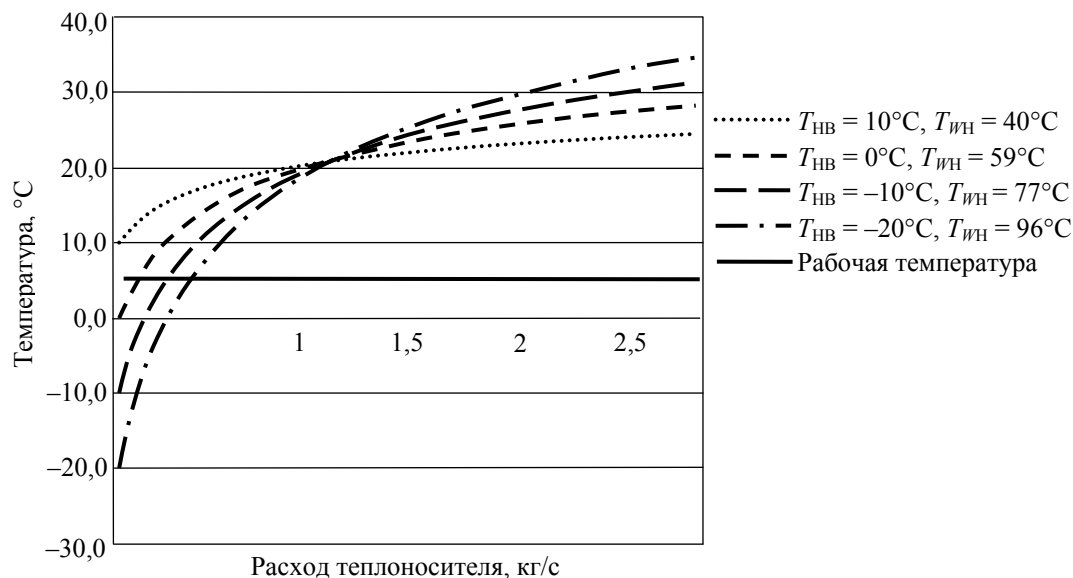


Рис. 1. Изменение температуры приточного воздуха

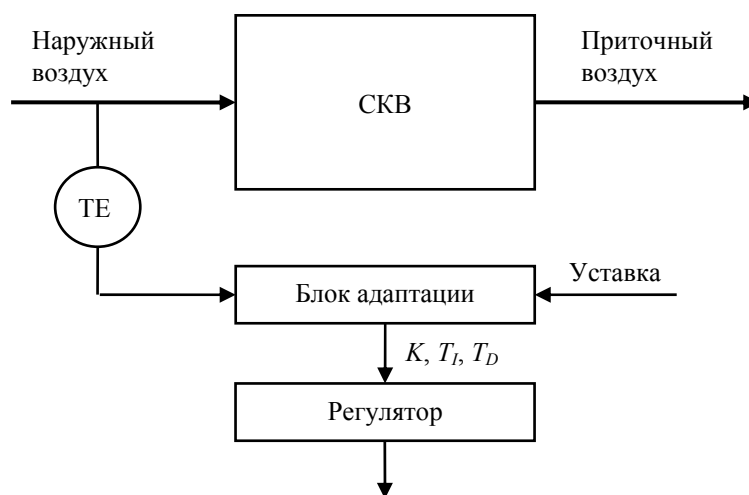


Рис. 2. Структурная схема САУ СКВ с табличной адаптацией

**Заключение.** В данной статье для модели СКВ с динамически меняющимися характеристиками были проанализированы зависимости коэффициентов от внешних факторов. Постоянная времени калорифера зависит от расхода теплоносителя и практически не подвержена влиянию температур наружного воздуха и температуры теплоносителя на входе. Статический коэффициент передачи калорифера зависит не только от расхода теплоносителя, но и от температур среды на входе, и способен изменяться в достаточно большом диапазоне от среднего значения для всех возможных режимов эксплуатации. Учитывая вышеизложенные факты, и то, что характеристики остальных элементов в замкнутом контуре локальной системы управления несущественно изменяются во времени и не зависят от других факторов, то настройки регулятора будут зависеть от постоянной вре-

мени  $T_K$ , статического коэффициента передачи калорифера  $K$  и гидравлической характеристики клапана. Таким образом, для каждого значения температуры наружного воздуха можно однозначно идентифицировать динамические характеристики калорифера.

Была предложена САУ СКВ с блоком адаптации, в котором хранится множество настроек регулятора (в виде таблицы), каждая из которых применялась бы в работу в зависимости от режима работы и температурного режима. Блок адаптации на основании желаемой температуры приточного воздуха  $t_B$ , температуры наружного  $t_{\text{ВН}}$ , характеристик температурного графика системы отопления просчитывает значение коэффициента эффективности нагрева воздуха  $K_B$ . Далее, по полученным опытным путем таблицам значений параметров регулятора для расчетного значения  $K_B$  формируются действующие

щие значения  $P$  и  $I$ , составляющих регулятора. Полученная САУ адаптируется под изменяющиеся требования управления, и показывает луч-

шие результаты по сравнению с классическими САУ с ПИД-регуляторами со стационарными настройками, применяющимися в СКВ.

### Литература

1. Сотников А. Г. Автоматизация систем кондиционирования воздуха и вентиляции. Л.: Машиностроение, 1984. 240 с.
2. Автоматизация систем вентиляции и кондиционирования воздуха / Е. С. Бондарь [и др.]. Киев: Аванпост-Прим, 2005. 562 с.
3. Денисенко В. ПИД-регуляторы: вопросы реализации // СТА. 2008. № 1. С. 86–99.

### References

1. Sotnikov A. G. *Avtomatizatsiya sistem i konditsionirovaniya vozdukhа i ventilyatsii* [Automation of air conditioning and ventilation systems]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1984. 240 p.
2. Bondar' E. S., Gordienko A. S., Mikhaylov V. A., Nimich G. V. *Avtomatizatsiya sistem ventilyatsii i konditsionirovaniya vozdukhа* [Automation of ventilation and air conditioning systems]. Kiev, Avantpost-Prim Publ., 2005. 562 p.
3. Denisenko V. PID-regulators: implementation issues. *STA* [Modern automation technologies], 2008, no. 1, pp. 86–99.

### Информация об авторах

**Подобед Михаил Юрьевич** – ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: gabazin@mail.com

**Сарока Виктор Викторович** – кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: viksar@mail.ru

### Information about the authors

**Podobed Mikhail Yur'yevich** – assistant lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gabazin@mail.com

**Saroka Viktor Viktorovich** – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: viksar@mail.ru

Поступила 22.11.2017



УДК 517.977.54

**С. А. Овцов, В. В. Сарока**

Белорусский государственный технологический университет

**ПОВЫШЕНИЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ РАБОТЫ АВТООПЕРАТОРА  
ПОРТАЛЬНОГО ТИПА ГАЛЬВАНИЧЕСКОЙ ЛИНИИ  
МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БЕЛЛМАНА**

В статье рассматривается проблема повышения быстродействия процесса переноса деталей между технологическими позициями в гальванической линии в условиях нежелательной инерции подвески с деталями во время передвижения гальванического робота-манипулятора портального типа. Раскачивание штанги приводит к уменьшению точности установки рамы автооператора над гальваническими ваннами, нарушению безопасного ведения технологического процесса и увеличению себестоимости продукции.

В связи с заданными условиями, изучая двухмассовую модель системы, разработан метод уменьшения времени переходного процесса (разгон или торможение рамы автооператора) для переноса деталей между технологическими позициями. Выявлен критерий оптимальности, который включает квадрат времени переходного процесса и квадрат электродинамического усилия, возникающего в обмотках двигателя при передвижении. Данные условия необходимы для максимального быстродействия системы, увеличения точности позиционирования и уменьшения энергозатрат.

С помощью метода динамического программирования Беллмана заданный критерий приведен к минимуму и определена функция оптимального управления робота-манипулятора. На основании полученных математических выкладок синтезирована система оптимального управления и смоделированы графики динамики системы.

**Ключевые слова:** быстродействие, оптимальное управление, автооператор, критерий оптимальности, функция оптимального управления.

**S. A. Ovtsov, V. V. Saroka**

Belarusian State Technological University

**INCREASE IN THE SPEED OF OPERATION OF THE PORTAL OPERATOR  
OF THE GALVANIC LINE TYPE BY THE DYNAMIC PROGRAMMING OF BELLMAN**

The article considers the problem of increasing the speed of the process of transferring parts between technological positions in the galvanic line under the conditions of undesirable inertia of the suspension with parts during the movement of the galvanic robot manipulator of the portal type. Rocking of the rod leads to a decrease in the accuracy of the installation of the auto operator's frame over the galvanic baths, the disruption of safe operation of the technological process and the increase in the cost of production.

In connection with the given conditions, studying the two-mass model of the system, a method has been developed for reducing the time of the transient process (acceleration or braking of the auto-operator frame) for transferring parts between technological positions. An optimality criterion is found that includes the square of the time of the transient process and the square of the electrodynamic force arising in the motor windings during the movement. These conditions are necessary for maximum system speed, increasing positioning accuracy and reducing power consumption.

Using Bellman's dynamic programming method, the specified criterion is minimized and the optimal control function of the robot manipulator is determined. Based on the mathematical calculations obtained, the optimal control system was synthesized and the dynamics graphs of the system were simulated.

**Key words:** speed, optimal control, auto operator, criterion of optimality, optimal control function.

**Введение.** Работа портального автооператора гальванической линии имеет строго циклический характер, при этом переходные режимы движения механизма занимают значительную часть от всей длительности рабочего цикла робота. Одним из способов повышения эффективности работы автоматизированной

гальванической линии является оптимизация переходных режимов движения автооператора с подвеской (разгон/торможение).

Раскачивание подвески с грузом, которое возникает в течение переходных режимов движения автооператора, является причиной его неравномерного движения, дополнитель-

ных нагрузок на элементы привода автооператора. Это угрожает безопасному ведению технологического процесса и сокращает производительность.

Колебания могут затруднять точность установки подвески над заданной позицией соответствующей ванны. Особенно это относится к крупногабаритным и тяжелым обрабатываемым деталям. Колебательный характер движения груза может вносить неопределенность в программу автоматизированной работы робота-манипулятора. Кроме того, значительно возрастают динамические нагрузки на элементы привода и металлоконструкцию автооператора, которые уменьшают их надежность.

Существуют три группы способов устранения колебаний груза:

- маневрирование автооператора за счет ручного управления;
- применение специальных подвесок или направляющих;
- использование адаптивных систем управления приводами автооператоров.

Первые два способа в современных условиях гальванического производства не способны обеспечить полное устранение колебаний подвески: первый способ связан с психофизическими особенностями рабочего-оператора (усталость и пр.), второй – с необходимостью изменения конструкции подвески и направляющих. Поэтому распространенной является третья группа способов.

Устранять колебания подвески можно, управляя скоростью движения манипулятора.

Целесообразным является использование, например, нечеткого регулирования, которое в некотором смысле копирует логику человека, его способы принятия решений, по тем или иным воздействиям на движение автооператора. Однако нечеткому регулированию свойственны те же недостатки, что и ручному: движение портального автооператора не является оптимальным.

Характер влияния на движение элементов автооператора должен обеспечивать минимизацию нежелательных (например, динамические нагрузки, максимальное отклонение оси подвески и т. п.) или максимизацию желаемых свойств (например, плавность движения, быстродействие и т. д.) движения системы.

**Основная часть.** Поставим комплексную задачу оптимального управления движением автооператора с подвеской. Эта задача заключается в том, что необходимо найти оптимальное управление движением автооператора при устранении колебаний подвески с учетом повышения быстродействия всего процесса передвижения с учетом большой протяженности

гальванической линии до момента остановки. Рассмотрение такой задачи позволяет разгонять портальный автооператор по любому закону, при этом колебания подвески сохраняются в течение установившегося движения, а время переходного процесса заметно сокращается.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) определить дифференциальное уравнение, описывающее передвижение робота-манипулятора;
- 2) задать критерий оптимальности, учитывающий необходимые параметры;
- 3) вычислить функцию оптимального управления;
- 4) выполнить синтез оптимального управления движения автооператора во время его торможения с учетом ограничений, накладываемых на величину управления.

Автооператор, как правило, может работать в недетерминированной внешней среде, поэтому важно обеспечение оптимальности процесса при воздействии стохастических внешних возмущений. Для этого необходимо получить информацию о текущем состоянии системы, т. е. необходимо использовать обратные связи по различным параметрам движения.

Для исследований примем двухмассовую модель механизма передвижения автооператора (рис. 1), которая достаточно широко используется в задачах исследования динамики движения роботов-манипуляторов и оптимизации их движения [1, 2].

Стоит отметить, что рассматривается весь цикл торможения/разгона робота-манипулятора, а не разбивается на определенные этапы. Такое исследование проблемы позволяет получить более точный и наглядный результат. Однако даже с учетом перечисленных ранее требований всех недостатков в разработке системы оптимального управления не избежать.

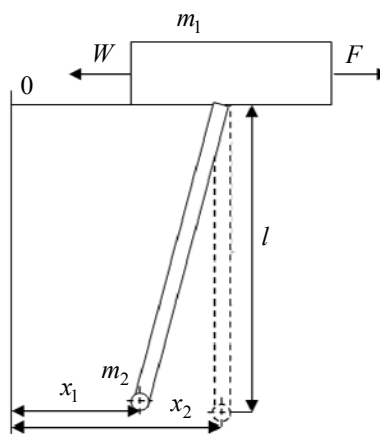


Рис. 1. Двухмассовая модель системы движения робота-манипулятора

Приведенная расчетная схема описывается системой дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 x_2 \frac{g}{l} = F - W, \\ m_2 \left( \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) + m_2 x_2 \frac{g}{l} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $m_1$  – приведенная масса рамы автооператора;  $x_1, x_2$  – начальные и конечные положения подвески при передвижении рамы автооператора соответственно;  $m_2$  – масса подвески с грузом;  $F$  – суммарное тяговое или тормозное усилие, действующее на раму;  $W$  – приведенная сила сопротивления перемещению рамы;  $g$  – ускорение свободного падения;  $l$  – длина подвески.

Приведенную систему дифференциальных уравнений можно свести к одному уравнению второго порядка [2, 3]:

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = \frac{F - W}{m_1}, \quad (2)$$

где  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right)}$  – частота собственных маятниковых колебаний груза относительно подвижной точки подвеса.

Дифференциальное уравнение (2) можно представить в виде системы канонических уравнений, если принять следующие обозначения  $u = \frac{F - W}{m_1}$ ,  $z_1 = x_2$ :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = (u - \omega^2 z_1). \end{cases} \quad (3)$$

В качестве критерия оптимизации выберем комплексный (кинематически-динамический) интегральный критерий, который отражает в соответствующих пропорциях величину квадрата времени передвижения автооператора и величину квадрата динамической составляющей приводного усилия [2, 3]:

$$I = \int_0^T \left[ k_2 t^2 + k_1 \left( \frac{F - W}{m_1} \right)^2 \right] dt, \quad (4)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  – коэффициенты, стоящие при единичных условиях.

Поясним выбор именно такого критерия. Для уменьшения времени переходного процесса необходимо повысить скорость передвижения автооператора с учетом безопасного ведения технологического процесса. Следовательно,

но, необходим нестандартный критерий оптимальности с переменной времени в подынтегральном выражении.

Что касается минимизации динамической составляющей приводного усилия, то это позволит сократить электрические потери в обмотках двигателя, поскольку эквивалентный момент асинхронного двигателя и двигателя постоянного тока независимого возбуждения примерно пропорциональны эквивалентному току, который определяет электрические потери [4].

С учетом введенных выше обозначений критерий (4) можно переписать в следующем виде:

$$I = \int_0^T \left[ k_2 z_2^2 + k_1 u^2 \right] dt. \quad (5)$$

Для минимизации критерия (5) используем метод динамического программирования Р. Беллмана [5]. Основное функциональное уравнение запишем так:

$$\min \left[ k_2 z_2^2 + k_1 u^2 + \frac{\partial S}{\partial z_1} z_2 + \frac{\partial S}{\partial z_2} (u - \omega^2 z_1) \right] = 0, \quad (6)$$

где  $S$  – функция Беллмана.

Минимум правой части уравнения (6) будем искать по параметру управления  $u$ , для чего продифференцируем его по  $u$  и приравняем полученное выражение к нулю:

$$2k_1 u + \frac{\partial S}{\partial z_2} = 0. \quad (7)$$

Найдем из уравнения (7) искомое  $u$ :

$$u = -\frac{1}{2k_1} \frac{\partial S}{\partial z_2}. \quad (8)$$

Подставим найденное значение  $u$  в уравнение (6), в результате чего получим:

$$k_2 z_2^2 + \frac{\partial S}{\partial z_1} z_2 - \frac{\partial S}{\partial z_2} z_1 \omega^2 - \frac{1}{4k_1} \left( \frac{\partial S}{\partial z_2} \right)^2 = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных. Искать его решение следует в виде квадратичной формы, как принято при решении подобных задач [6]:

$$S = A_1 z_2^2 + A_2 z_1 z_2 + A_3 z_1^2, \quad (10)$$

где  $A_1, A_2, A_3$  – постоянные коэффициенты, которые необходимо определить.

Возьмем частные производные выражения (10) относительно  $u_1$  и  $u_2$ :

$$\frac{\partial S}{\partial z_1} = A_2 z_2 + 2A_3 z_1, \quad (11)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z_2} = 2A_1 z_2 + A_2 z_1. \quad (12)$$

Подставим полученные выражения (11) и (12) в уравнение (10) и получим:

$$z_2^2 \left( k_2 + A_2 - \frac{A_1^2}{k_1} \right) - z_1^2 \left( A_2 \omega^2 + \frac{A_2^2}{4k_1} \right) + z_1 z_2 \left( 2A_3 - 2\omega^2 A_1 - \frac{A_1 A_2}{k_1} \right) = 0. \quad (13)$$

Уравнение (14) будет справедливым в том случае, когда выражения в скобках будут равны нулю, поскольку  $y_1 \neq 0, y_2 \neq 0$ . Поэтому формулу (14) можно заменить системой нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} k_2 + A_2 - \frac{A_1^2}{k_1} = 0, \\ A_2 \omega^2 + \frac{A_2^2}{4k_1} = 0, \\ 2A_3 - 2\omega^2 A_1 - \frac{A_1 A_2}{k_1} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Из решения системы уравнений (14) выберем один действительный корень, который не приводит к потере устойчивости системы.

Подставив найденные корни в выражение (9), получим функцию оптимального управления:

$$u = 2\omega^2 z_1 - \frac{z_2 \sqrt{k_1(k_2 - 4\omega^2 k_1)}}{k_1}. \quad (15)$$

Итак, нам удалось синтезировать функцию управления  $u = u(z_1, z_2, k_1, k_2, \omega)$ .

Использование метода динамического программирования и прямого метода всех вариаций позволяет достичь оптимального режима торможения, характер оптимального управления движением рамки в горизонтальном направлении является плавным, а абсолютное контрольное значение не превышает заданные пределы. Это уменьшает динамическую нагрузку на двигатели автооператора.

Недостаток оптимальной системы управления системой «подвеска – рама» – слабое управление в конце торможения при низкой энергии колебаний.

Используя пакет Matlab, можно синтезировать оптимальную систему управления, используя найденную оптимальную функцию  $u$ .

Полученные математические расчеты позволяют составить структурную схему оптимального регулятора (рис. 2).

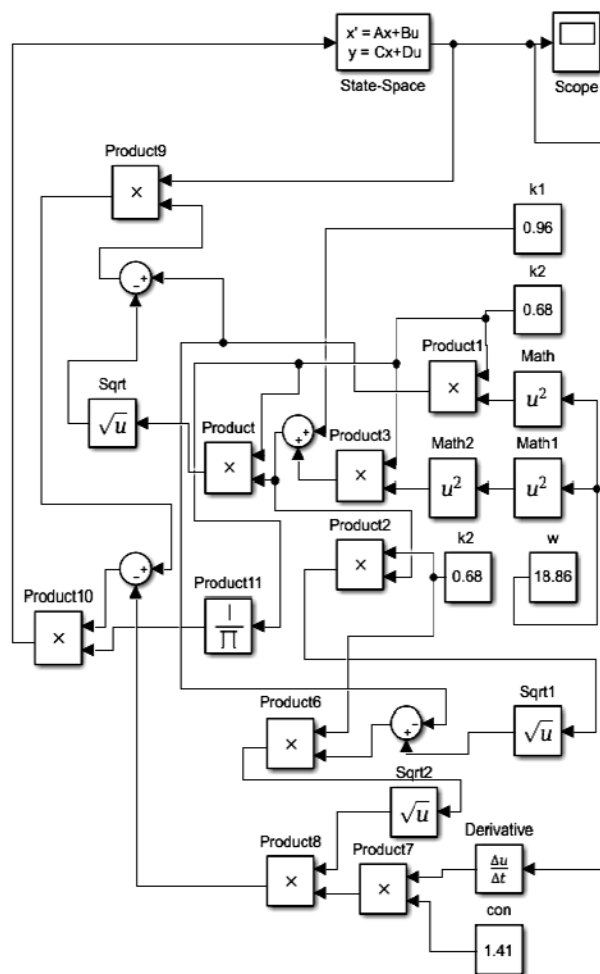


Рис. 2. Структурная схема системы управления с оптимальным регулятором

В ходе моделирования получаем следующие графики динамики системы (рис. 3 и 4).

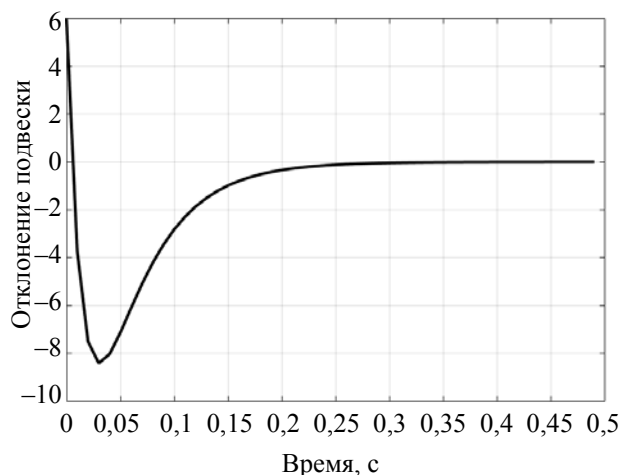


Рис. 3. График динамики системы относительно отклонения подвески

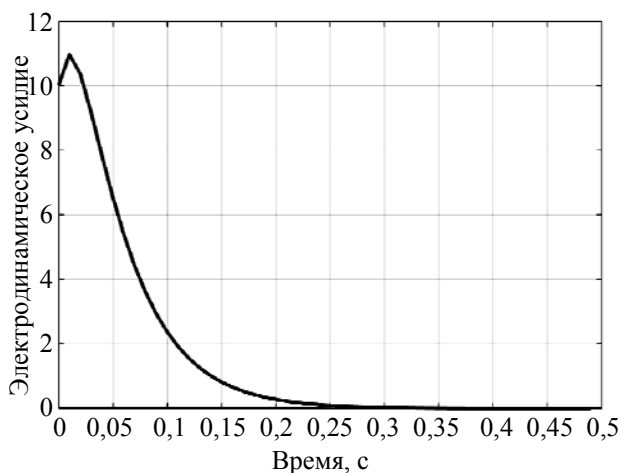


Рис. 3. График динамики системы относительно скачка электродинамического усилия

Как видно из графиков, время переходного процесса составляет 0,5 с, сдвиг от желаемой величины для отклонения подвески – 8,3, а для электродинамического усилия – 6,5.

**Заключение.** Во время процесса переноса деталей между технологическим положением было обнаружено, что при ускорении и тормо-

жении автооператора возникают нежелательные колебания подвески, которые приводят к уменьшению точности позиционирования. Поэтому была рассчитана функция оптимального управления движения автооператора, на основе которой был синтезирован оптимальный регулятор. Это управление позволяет быстро удалить нежелательную инерцию, тем самым увеличивая скорость движения автоматического манипулятора.

Важно учитывать то, что данный способ повышения быстродействия робота-манипулятора гальванической линии целесообразно использовать только при большой протяженности технологической линии. В противном случае, повышение быстродействия автооператора не будет давать экономического эффекта в виде уменьшения энергопотребления, а нагрузка на двигатель рамы существенно возрастет.

Также для повышения быстродействия робота-манипулятора в гальванической линии можно использовать векторное управление с оптимальным регулятором, что будет рассматриваться в дальнейшем.

### Литература

1. Геронимус Я. Л., Перельмутер М. М. О некоторых методах определения оптимального закона движения, рассматриваемого как управляющее воздействие // *Машиноведение*. 1966. № 6. С. 6–24.
2. Ловейкин В. С., Ромасевич Ю. О. Комплексный синтез оптимального управления движением грузоподъемного крана // *Автоматизация производственных процессов в машиностроении и приборостроении*. 2011. № 45. С. 385–389.
3. Овцов С. А., Сарока В. В. Разработка оптимальной системы управления роботом-манипулятором гальванической линии для погашения колебаний подвески в переходных режимах // *Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика*. 2017. № 1. С. 63–68
4. Смехов А. А., Ерофеев Н. И. *Оптимальное управление подъемно-транспортными машинами*. М.: Машиностроение, 1975. 239 с.
5. Беллман Р., Дрейфус С. *Прикладные задачи динамического программирования*. М.: Наука, 1965. 460 с.
6. Олейников В. А., Золотов Н. С., Пришвин А. М. *Основы оптимального и экстремального управления*. М.: Высш. шк., 1969. 296 с.

### References

1. Geronimus Ya. L., Perel'muter M. M. Some methods of determining the optimum law of motion, considered as the control action. *Mashinovedeniye* [Knowing machines], 1966, no. 6, pp. 6–24 (In Russian).
2. Loveykin V. S., Romasevich Yu. O. A comprehensive synthesis of the optimal motion control crane. *Avtomatizatsiya proizvodstvennykh protsessov v mashinostroenii i priborostroenii* [Automation of production processes in mechanical engineering and instrument], 2011, no. 45, pp. 385–389 (In Russian).
3. Ovtsov S. A., Saroka V. V. Development of the optimal control system for the robot manipulator of the galvanic line for the damping of suspension oscillations in transient modes. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and mathematics. Informatics, 2017, no. 1, pp. 25–27 (In Russian).
4. Smekhov A. A., Erofeev N. I. *Optimal'noye upravleniye pod'yemno-transportnymi mashinami* [Optimal control of handling machinery]. Moscow, Mashinostroeniye Publ., 1975. 239 p.
5. Bellman R., Dreyfus S. *Prikladnyye zadachi dinamicheskogo programmirovaniya* [Applications of dynamic programming]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 460 p.
6. Oleynikov V. A., Zolotov N. S., Prishvin A. M. *Osnovy optimal'nogo i ekstremal'nogo upravleniya* [Foundations of optimal control and extreme]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1969. 296 p.

**Информация об авторах**

**Сарока Виктор Викторович** – кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: viksar@mail.ru

**Овцов Сергей Александрович** – аспирант кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: s.ovtsov@mail.ru

**Information about the authors**

**Saroka Viktor Viktorovich** – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: viksar@mail.ru

**Ovtsov Sergey Aleksandrovich** – PhD student, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: s.ovtsov@mail.ru

*Поступила 15.12.2016*

УДК 004.896

**С. А. Пекарь, В. В. Смелов**

Белорусский государственный технологический университет

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ  
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ 3D-ОБЪЕКТА**

Статья посвящена описанию математической модели, позволяющей в общем виде описать работу программного комплекса для построения имитационных моделей интеллектуального поведения 3D-объектов в пространстве. Построение такого рода имитационных моделей дает возможность получить решения многих задач в робототехнике, эргономике и 3D-анимации без необходимости применения дорогостоящего оборудования или построения физических прототипов. Это позволит значительно сократить временные и финансовые затраты на разработку реальных систем, реализующих интеллектуальное поведение 3D-объектов в пространстве. В статье описаны сферы применения таких систем, а также лежащая в их основе математическая модель. Введены понятия интеллектуального 3D-объекта и его свойств: форма, центр, границы, операторы, состояние. Сформулированы понятия: время моделирования, среда существования 3D-объекта, цель и жизненный цикл. Сделаны выводы о полноте разработанной математической модели, а также приведены примеры практической реализации ее компонентов.

**Ключевые слова:** 3D-объект, форма, граница, точка, состояние, оператор, жизненный цикл, интеллектуальное поведение.

**S. A. Pekar', V. V. Smelov**

Belarusian State Technological University

**MATHEMATICAL MODEL OF INTELLIGENT BEHAVIOR OF 3D-OBJECT**

The article is devoted to the description of the mathematical model of intellectual behaviour of 3D-object, which allows to generally describe the work of software applications intended for simulation models creation. The simulation models of this type of objects give the opportunity to test complex and expensive hardware complexes software packages without need of creating physical prototypes. This helps to save a huge amount of time and financial resources for the development of real systems containing implementation of intellectual behaviour of 3D-objects. This paper describes the scopes of application of systems of modeling of such objects. The article also contains a concept of an intelligent 3D-object and its properties: form, center, bounding box, operators, state, the definition of the terms of modeling time, environment, goal and the life cycle. Article also formulates the concept of intellectual behavior of a 3D-object. Another objective of the paper is to describe the developed mathematical model of the system for modeling the intellectual behavior of a 3D-object. The conclusion of the article is about the completeness of the developed mathematical model and gives examples of practical implementation of all model components.

**Key words:** 3-D object, form, bounding box, point, state, operator, life cycle, intellectual behavior.

**Введение.** Среди многообразия компьютерных систем можно выделить класс систем, работу которых можно представить как разумное поведение 3D-объектов в пространстве. Исследование, моделирование и реализация таких систем может привести к решению ряда насущных прикладных задач, связанных с движением или трансформацией интеллектуальных объектов в трехмерном пространстве. Полученные модели могут быть использованы в робототехнике [1, 2], эргономике [3] и в технологиях 3D-анимации [4]. Подобные модели широко применяются в программах-автопилотах для беспилотных автомобилей (Tesla Motors, Google) [5, 6], в различного рода симуляторах (для обучения водителей или пилотов) и компьютерных играх [4, 7].

В предлагаемой статье решаются следующие задачи:

– формулируется понятие интеллектуального 3D-объекта (I3D);

– описывается общая математическая модель разумного поведения I3D.

**Основная часть.** Формулировка понятия I3D требует пояснения следующих терминов:

– 3D-объект;

– среда существования 3D-объекта;

– жизненный цикл 3D-объекта;

– интеллектуальное поведение 3D-объекта.

*3D-объект* – основной активный элемент (агент) модели интеллектуального поведения 3D-объекта в пространстве, обладающий следующими свойствами:

– *форма* ( $F = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ , где  $v_i$  – координаты  $\langle x, y, z \rangle$   $i$ -й точки *формы* 3D-объекта  $D$ :  $n$  – количество точек, образующих *формы*) – упорядоченный набор точек в трехмерном евк-

лидовом пространстве, соединение которых образует геометрическую фигуру, являющуюся поверхностью 3D-объекта и образующую визуальное представление; принцип соединения точек для формирования геометрической фигуры не является принципиальным при построении модели и может быть реализован различными способами;

– *центр*  $o = \langle M, \Delta S \rangle$ , где  $x, y$ , и  $z$  – координаты *центра* – точка в трехмерном евклидовом пространстве, определяющая положение 3D-объекта; за центр может быть принята любая внутренняя точка трехмерной фигуры 3D-объекта; центр может быть задан декларативно или вычислен (медианная точка, центр масс и т. п.);

– *граница*  $\langle B = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ , где  $v_i$  – координаты  $\langle x, y, z \rangle$   $i$ -й точки *границы*  $B$ ;  $m$  – количество точек, образующих *границу*  $B$  3D-объекта  $D$ . В некоторых случаях  $F \triangleq B$  – упорядоченный набор точек, образующий собой геометрическую фигуру; введение понятия *границы* 3D-объекта обусловлено необходимостью упрощения расчета столкновений; в простейших случаях граница может совпадать с *формой* 3D-объекта; в общем случае *граница* полностью включает в себя форму;

– *состояние* ( $S$ ) – величина, характеризующая потенциальную возможность 3D-объекта выполнять *операторы*; одно из состояний 3D-объекта задается как *идеальное состояние*;

– *операторы* ( $O = \langle o_1, o_2, \dots, o_k \rangle$ , где  $o_i$  – *элементарный оператор*, который может быть исполнен 3D-объектом;  $k$  – общее число операторов 3D-объекта). *Элементарный оператор*  $o_i$  3D-объекта является действием 3D-объекта, связанным с движением (перемещение, поворот и т. п.) и/или изменением его *формы* и/или *состояния*;  $o_i$  *определяется* следующим образом:  $D = \langle F, C, B, O, S \rangle$ , где  $M$  – матрица аффинного преобразования, содержащая информацию о смещении, масштабировании и повороте;  $\Delta S$  – изменение *состояния*  $S$  относительно текущего.

Таким образом, в общем случае 3D-объект  $D$  представляется в виде пятерки:

$$D = \langle F, C, B, O, S \rangle,$$

где  $F$  – форма;  $C$  – центр;  $B$  – граница;  $O$  – множество операторов;  $S$  – множество состояний.

*Среда существования*  $E$  объекта представляет собой окружение, воспринимаемое 3D-объектом, другими словами то, что объект «знает» о своем окружающем мире и то, что «видит».

Более точная формулировка понятия *видимой среды*  $E$  3D-объекта требует определения термина *время существования* 3D-объекта.

*Время существования* 3D-объекта является дискретным. За единицу дискретизации выбран

*такт*  $t$ , который равен времени выполнения одного элементарного оператора  $o_i$ .

Таким образом: *видимая для* 3D-объекта *среда существования*  $E$  зависит от месторасположения его центра  $C$  и времени  $t$ . Другими словами, *среда существования*  $E$  3D-объекта  $D$  является функцией *центра*  $C$  этого 3D-объекта и номера такта  $t$ :

$$E(t) = f(C, t - 1).$$

Понятие *жизненного цикла*  $L$  3D-объекта требует введение термина *цель* 3D-объекта.

*Цель* – точка в трехмерном пространстве, достижение которой означает окончание *жизненного цикла* 3D-объекта.

*Жизненный цикл*  $L$  3D-объекта включает в себя *цель*, которую должен достичь 3D-объект и последовательность *операторов*, которую он должен выполнить для достижения цели при заданной *среде существования*.

Таким образом, *жизненный цикл*  $L$  3D-объекта задается выражением

$$L = \langle T, \langle o_1, o_2, \dots, o_l \rangle \rangle,$$

где  $T$  – *цель* объекта;  $\langle o_1, o_2, \dots, o_l \rangle$  – последовательность элементарных операторов,  $o_i \in O$ , последовательное выполнение которых приводит 3D-объект  $D$  к *цели*  $T$ ;  $l$  – количество *операторов*, которые должен выполнить 3D-объект  $D$  для достижения *цели*  $T$ .

В свою очередь, последовательность операторов  $\langle o_1, o_2, \dots, o_l \rangle$  является функцией от *среды существования*  $E$  3D-объекта:

$$\langle o_1, o_2, \dots, o_l \rangle = f(E).$$

*Интеллектуальное поведение*  $I$  3D-объекта  $D$  представляет собой его способность построить эффективную последовательность операторов *собственного жизненного цикла*. Причем под *эффективностью* понимается выбор такой последовательности операторов, которая позволяет достичь *цель* и *конечное состояние объекта*, величина которого минимально расходится с *идеальным состоянием*. Таким образом, *интеллектуальное поведение*  $I$  3D-объекта является функцией от объекта  $D$ , *среды существования*  $E$  и *цели*  $T$ :

$$I(t) = f(D(t), E(t), T).$$

*Интеллектуальный 3D-объект*  $I3D$  – это *3D-объект*, способный на *интеллектуальное поведение* для реализации своего *жизненного цикла* в заданной *среде существования* при заданной *цели*.

Реализация формы  $F$  3D-объекта может быть выполнена при помощи большинства популярных программных пакетов 3D-моделирования (Autodesk 3D Studio Max, Autodesk Maya, Blender)



или трехмерных игровых движков (Unity, Unreal Engine, Source, Cry Engine). В общем случае множество точек, принадлежащих форме  $F$  3D-объекта, последовательно соединены гранями, служащими границами для плоскостей образующих «каркас объекта».

Аналогично объекту  $D$  среда существования  $E$  тоже может быть реализована в виде 3D-объекта.

Элементарные операторы могут быть записаны в виде заранее заданных величин отклонения состояния  $S$  и матрицы аффинного преобразования  $M$  или вычисляться на основании заданных формул: параметрами которых будут выступать текущее состояние 3D-объекта  $D$ , а также его геометрические характеристики.

Жизненный цикл реализуется через выполнение  $I3D$  последовательности операторов, построенной при помощи его функции интеллектуального поведения  $I$ .

Интеллектуально поведение  $I$  может быть реализовано с помощью искусственных ней-

ронных сетей, нечеткой логики или других методов искусственного интеллекта. Практическая реализация  $I$  может сочетать методы искусственного интеллекта с классическими методами реализации поведения: «Поиск пути», «Деревья поведения», «Машины состояний» и т. д.

Практическая реализация  $I$  допускает возможность построения последовательности  $\langle o_1, o_2, \dots, o_l \rangle$  как перед началом выполнения жизненного цикла  $L$ , так и построение эффективной последовательности операторов «на лету», то есть в процессе выполнения  $L$ . Важным является только подбор необходимого оператора  $o_i$  для выполнения в момент  $t_i$ , то есть объект должен «успеть» осуществить выбор подходящего оператора  $o_i$  из множества  $O$  раньше либо в момент выполнения действия.

**Заключение.** Представленная математическая модель является обобщенной и может быть легко расширена для описания интеллектуального поведения нескольких 3D-объектов.

### Литература

1. Thrun S., Montemerlo M., Dahlkamp H. Stanley: The Robot that Won the DARPA Grand Challenge // Journal of Field Robotics. URL: <http://isl.ecst.csuchico.edu/DOCS/darpa2005/DARPA%202005%20Stanley.pdf> (date of access: 06.07.2017).
2. Urmson C., Anhalt J., Bagnell A. Tartan Racing: A Multi-Modal Approach to the DARPA Urban Challenge // Carnegie Mellon University. URL: [https://www.ri.cmu.edu/pub\\_files/2007/4/Tartan\\_Racing.pdf](https://www.ri.cmu.edu/pub_files/2007/4/Tartan_Racing.pdf) (date of access: 08.07.2017).
3. Rychtycky N. Ergonomics Analysis for Vehicle Assembly Using Artificial Intelligence // Ford Motor Company Manufacturing Engineering Systems. URL: <https://www.aaai.org/Papers/IAAI/2004/IAAI04-004.pdf> (date of access: 12.07.2017).
4. Cavazza M., Bandi S., Palmer I. “Situating AI” in Video Games: Integrating NLP, Path Planning and 3D Animation // Electronic Imaging and Media Communications, University of Bradford. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/29dc/dfb9fc3bc6294a87cc0707181dc36c3d1d8e.pdf> (date of access: 05.08.2017).
5. Jafee E. The First Look at How Google's Self-Driving Car Handles City Streets // Citylab.com, The Atlantic Monthly Group. Mode of access: <https://www.citylab.com/life/2014/04/first-look-how-googles-self-driving-car-handles-city-streets/8977/> (date of access: 06.08.2017).
6. Stewart J. Tesla's New “Autopilot” Is Just the Start of a Critical Reboot // Weird Media Group. URL: <https://www.wired.com/2017/01/teslas-new-autopilot-may-seem-lame-critical-reboot/> (date of access: 06.08.2017).
7. Kuanusont K., Lucas S. M., Pérez-Liébana D. General Video Game AI: Learning from screen capture // IEEE Xplore Digital Library. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7969556/?reload=true> (date of access: 09.09.2017).

### References

1. Thrun S., Montemerlo M., Dahlkamp H. Stanley: The Robot that Won the DARPA Grand Challenge. Available at: <http://isl.ecst.csuchico.edu/DOCS/darpa2005/DARPA%202005%20Stanley.pdf> (accessed 06.07.2017).
2. Urmson C., Anhalt J., Bagnell A. Tartan Racing: A Multi-Modal Approach to the DARPA Urban Challenge. Available at: [https://www.ri.cmu.edu/pub\\_files/2007/4/Tartan\\_Racing.pdf](https://www.ri.cmu.edu/pub_files/2007/4/Tartan_Racing.pdf) (accessed: 08.07.2017).
3. Rychtycky N. Ergonomics Analysis for Vehicle Assembly Using Artificial Intelligence. Available at: <https://www.aaai.org/Papers/IAAI/2004/IAAI04-004.pdf> (accessed 12.07.2017).
4. Cavazza M., Bandi S., Palmer I. “Situating AI” in Video Games: Integrating NLP, Path Planning and 3D Animation. Available at: <https://pdfs.semanticscholar.org/29dc/dfb9fc3bc6294a87cc0707181dc36c3d1d8e.pdf> (accessed 05.08.2017).

5. Jafee E. The First Look at How Google's Self-Driving Car Handles City Streets. Available at: <https://www.citylab.com/life/2014/04/first-look-how-googles-self-driving-car-handles-city-streets/8977/> (accessed 06.08.2017).

6. Stewart J. Tesla's New "Autopilot" Is Just the Start of a Critical Reboot. Available at: <https://www.wired.com/2017/01/teslas-new-autopilot-may-seem-lame-critical-reboot/> (accessed 06.08.2017).

7. Kunanusont K., Lucas S. M., Pérez-Liébana D. General Video Game AI: Learning from screen capture. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7969556/?reload=true> (accessed 09.09.2017).

#### **Информация об авторах**

**Пекарь Сергей Александрович** – аспирант. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [sergik.com@mai.ru](mailto:sergik.com@mai.ru)

**Смелов Владимир Владиславович** – кандидат технических наук, заведующий кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [smw60@mail.ru](mailto:smw60@mail.ru)

#### **Information about the authors**

**Pekar' Sergey Aleksandrovich** – PhD student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [sergik.com@mai.ru](mailto:sergik.com@mai.ru)

**Smelov Vladimir Vladislavovich** – PhD (Engineering), Head of the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [smw60@mail.ru](mailto:smw60@mail.ru)

*Поступила 01.02.2018*

УДК 502.5

**А. В. Бурмакова<sup>1</sup>, В. В. Смелов<sup>1</sup>, А. А. Захаров<sup>2</sup>**<sup>1</sup> Белорусский государственный технологический университет<sup>2</sup> Институт природопользования Национальной академии наук Беларуси**РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПОСЛЕДСТВИЙ АВАРИЙНОГО ПРОЛИВА НЕФТЕПРОДУКТОВ**

Статья посвящена описанию математической модели прогнозирования последствий аварийного пролива нефтепродуктов. Модель является основой экологической экспертной системы и носит комплексный характер. Разделена на уровни, соответствующие слоям геологической среды: поверхностный, почвенный, грунтовый, грунтовые воды. Модель позволяет рассчитывать значения концентраций нефтепродуктов в почве и в грунте под наземным пятном загрязнения, а также концентрацию нефтепродуктов в грунтовых водах, горизонтальную скорость распространения загрязнения за границы наземного пятна. Позволяет также рассчитать площадь и форму наземного пятна, вертикальную скорость проникновения и распространения загрязнения, учитывает испарение и адсорбцию нефтепродуктов в почве и грунте. В качестве входных данных используются данные о географических координатах пролива (долгота, широта), тип и объем пролитого нефтепродукта, справочные данные о физико-химических свойствах нефтепродуктов, почвы и грунта, картографическая информация (рельеф местности, глубина залегания грунтовых вод, мощность грунтового и почвенного слоя), температура окружающей среды.

**Ключевые слова:** математическая модель, прогнозирование, экология, нефтепродукты, экспертная система.

**A. V. Burmakova<sup>1</sup>, V. V. Smelov<sup>1</sup>, A. A. Zakharov<sup>2</sup>**<sup>1</sup> Belarusian State Technological University<sup>2</sup> The Institute of Nature Management of the National Academy of Sciences of Belarus**THE IMPLEMENTATION OF THE MATHEMATICAL MODEL FOR PREDICTING THE CONSEQUENCES OF THE EMERGENCY EXERCISE OF OIL PRODUCTS**

The article is devoted to the description of the mathematical model of forecasting the consequences of accidental spillage of oil products. The model is the basis of the ecological expert system and is of a complex nature. It is divided into levels corresponding to the layers of the geological environment: surface, soil, ground, groundwater. The model makes it possible to calculate the values of the concentrations of oil products in the soil and in the ground under the ground pollution spot, as well as the concentration of petroleum products in groundwater, the horizontal speed of pollution spread beyond the boundary of the ground spot. It also allows to calculate the area and shape of the ground spot, the vertical rate of penetration and spread of pollution, takes the into account evaporation and adsorption of oil products in soil and soil. Are used as input data on the geographic coordinates of the strait (longitude, latitude), type and amount of spilled oil, reference data on the physicochemical properties of oil products, soil and soil, cartographic information (terrain relief, groundwater depth, ground and soil thickness layer), ambient temperature.

**Key words:** mathematical model, forecasting, ecology, oil products, expert system.

**Введение.** Математическая модель прогнозирования последствий аварийного пролива нефтепродуктов является основой экспертной системы, которая предназначена для поддержки принятия решений по выбору оптимальных с точки зрения экологической и экономической эффективности технологий реабилитации геологической среды.

Существуют различные модели для прогноза последствий пролива нефтепродуктов, например программно-аппаратный комплекс по моделированию последствий аварийных разливов нефти на платформе ArcGIS, созданный во Всероссийском научно-исследовательском ин-

ституте по проблемам гражданской обороны и чрезвычайным ситуациям МЧС России в 2005 г. Программный модуль позволяет определить: площадь и форму пятна загрязнения и вероятность загрязнения близлежащих объектов. Существует также геоинформационная система, которую разрабатывали специалисты Уфимского государственного авиационного технического университета в 2006 г., где с помощью картографических данных определяется направление растекания пятна загрязнения [1].

Математическая модель создана для комплексного прогноза всех возможных последствий загрязнений геологической среды. Для это-

го собраны справочные и картографические данные в качестве входных значений и формулы расчета последствий пролива для каждого из слоев геосферы.

**Основная часть.** Исходными для математической модели прогнозирования (ММП) являются следующие данные.

1. Географические координаты центра пролива, объем и тип (бензин, керосин, сырая нефть и пр.) пролитого нефтепродукта (НП).

2. Данные о физико-химических свойствах нефтепродуктов.

3. Данные о свойствах грунтов.

4. Картографическая информация: рельеф местности, глубина залегания грунтовых вод, мощность грунтового и почвенного слоя, коэффициенты задержки НП в грунте и почве.

ММП позволяет прогнозировать: площадь и форму наземного пятна загрязнения, массу испарения НП с поверхностного слоя, глубину и скорость проникновения НП в почву и грунт, адсорбированную массу НП в почве и грунте, максимальную концентрацию НП в почве и грунте, максимальную концентрацию нефтепродуктов в грунтовых водах, временной интервал для достижения максимальной концентрации в грунтовых водах, скорость распространения фронта загрязнения с потоком грунтовых вод.

ММП является многоуровневой. На рис. 1 отображены четыре уровня ММП (нумеруются сверху вниз от 1 до 4).

В таблице перечислены уровни, значения и справочные данные, применяемые для вычислений на каждом уровне ММП.

**Поверхностный слой.** На первом уровне модели вычисляются следующие значения: масса испарения НП, площадь пятна загрязнения и форма пятна загрязнения.

**Площадь  $S_1$  пятна загрязнения** вычисляется по следующей формуле:

$$S_1 = V_0 \cdot d_1. \quad (1)$$

Коэффициент растекания нефтепродукта  $d_1$  является справочной величиной и зависит от типа и объема нефтепродукта, типа почвы, а также угла наклона поверхности [2].

**Масса  $M_1$  испарившегося нефтепродукта** вычисляется по следующей формуле:

$$M_1 = S_1 \cdot q_1(T). \quad (2)$$

Значение  $q_1(T)$  зависит от температуры  $T$  воздуха и является справочной величиной ( $\text{кг}/\text{м}^2$ ) [3].

Для вычисления формы пятна загрязнения применяется эвристический алгоритм, исходными данными для которого являются геогра-

фические координаты центра, площадь  $S_1$  пролива, а также картографические данные о рельефе поверхности в окрестности центра. Результатом расчета является множество пар  $(x, y)$  координат границ пятна загрязнения. Высоты в точках вычисляются методом аппроксимации.

**Толщина наземного слоя пролитого нефтепродукта  $H_1$**  находится по формуле

$$H_1 = \frac{V_0}{S_1}. \quad (3)$$

**Почвенный слой.** На втором уровне модели вычисляются: адсорбированная почвой масса НП, максимально возможная концентрация НП в почве и максимальная глубина проникновения НП в почву.

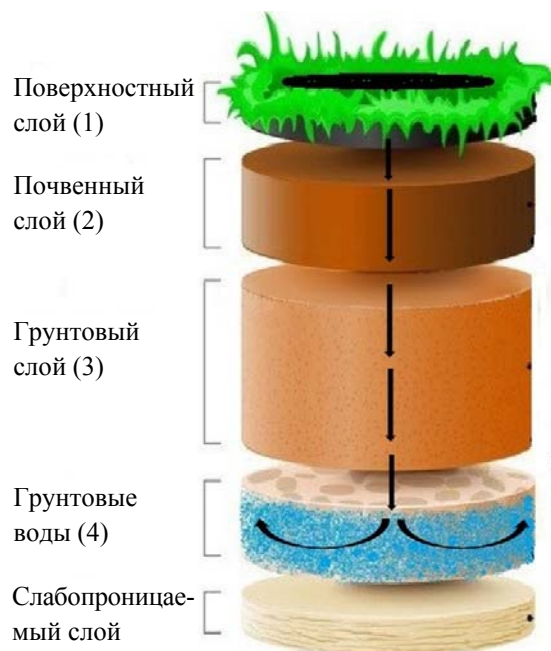


Рис. 1. Слои модели прогнозирования последствий пролива нефтепродуктов

**Адсорбированная почвой масса  $M_2$  НП** вычисляется по следующей формуле:

$$M_2 = S_1 \cdot h_2 \cdot u_2 \cdot \rho_0. \quad (4)$$

Значение  $u_2$  – нефтеемкость почвы, является максимальной возможной концентрацией НП в почве.

Нефтеемкость  $u_2$  является справочной величиной [3], так же как и средняя плотность НП  $\rho_0$  [4].

**Максимальная глубина проникновения  $H_2$  НП в почву** вычисляется следующим образом:

$$H_2 = h_2 \cdot \frac{M_0 - M_1}{M_2}. \quad (5)$$

## Значения, вычисляемые в ММП

№	Уровни модели	Величины		
		Обозначение	Единицы измерения	Наименование
0	Исходные данные	$V_0$	м <sup>3</sup>	Объем пролитого НП
		$\rho_0$	кг/м <sup>3</sup>	Плотность НП
		$M_0$	кг	Масса пролитого НП
		$\delta_0$	кг/с <sup>2</sup>	Коэффициент поверхностного натяжения НП
1	Поверхностный слой	$S_1$	м <sup>2</sup>	Площадь пятна загрязнения
		$d_1$	м <sup>-1</sup>	Коэффициент растекания НП
		$M_1$	кг	Масса испарившегося нефтепродукта
		$q_1(T)$	кг/м <sup>2</sup>	Удельная величина выбросов нефтепродукта
		$H_1$	м	Толщина наземного слоя пролитого нефтепродукта
2	Почвенный слой	$M_2$	кг	Адсорбированная почвой масса НП
		$h_2$	м	Средняя высота почвенного слоя
		$u_2$	–	Нефтеемкость почвы
		$H_2$	м	Максимальная глубина проникновения НП в почву
3	Грунтовый слой	$v_3$	м/с	Скорость вертикального проникновения НП в грунт
		$k_v$	м/с	Коэффициент фильтрации воды
		$r_3$	–	Коэффициент задержки НП в грунте
		$M_3$	кг	Адсорбированная грунтовым слоем масса НП
		$h_3$	м	Мощность слоя грунта
		$m_3$	–	Пористость грунта (от 0 до 1)
		$w_3$	–	Капиллярная влагоемкость грунта (от 0 до 1)
		$\rho_v$	кг/м <sup>3</sup>	Плотность воды
		$\delta_v$	кг/с <sup>2</sup>	Коэффициент поверхностного натяжения воды
		$H_3$	м	Максимальная глубина проникновения НП в грунт
		$C_3$	–	Максимальная концентрация НП в грунте
		$\rho_3$	кг/м <sup>3</sup>	Средняя плотность грунта
		4	Грунтовые воды	$t_4$
$l_4$	м			Максимальное расстояние распространения фронта загрязнения от центра пролива НП с грунтовыми водами
$v_4$	м/с			Горизонтальная скорость распространения фронта загрязнения с грунтовыми водами
$h_4$	м			Толщина водоносного слоя, принимается за 1 м
$h'_3$	м			Мощность грунтового слоя в первой точке
$h''_3$	м			Мощность грунтового слоя во второй точке
$C_4$	–			Концентрация загрязнения в грунтовых водах

*Грунтовый слой.* На третьем уровне модели вычисляются: скорость вертикального проникновения НП в грунт, адсорбированная грунтом масса НП, максимальная глубина проникновения НП в грунт, максимальная концентрация НП в грунте.

*Скорость вертикального проникновения  $v_3$  НП в грунт* вычисляется по следующей формуле:

$$v_3 = \frac{k_v}{r_3}. \quad (6)$$

Коэффициент фильтрации воды  $k_v$  [5] и коэффициент задержки  $r_3$  НП [6] в грунте являются справочными величинами.

*Адсорбированная грунтовым слоем масса  $M_3$  НП* рассчитывается по формуле

$$M_3 = h_3 \cdot S_1 \cdot \rho_v \cdot m_3 \cdot w_3 \cdot \frac{\delta_0}{\delta_v}. \quad (7)$$

Плотность воды  $\rho_v$  [7], коэффициент поверхностного натяжения НП  $\delta_0$ , коэффициент поверхностного натяжения воды  $\delta_v$  [8], пористость грунта  $m_3$  и капиллярная влагоемкость грунта  $w_3$  [9] являются справочными величинами.

*Максимальная глубина проникновения  $H_3$  НП в грунт* зависит от адсорбированной в грунте массы и вычисляется следующим образом: концентрация высчитывается с использованием верхней формулы, или же, приравнивая

ется к мощности грунтового слоя. Вычисляется по следующей формуле:

$$H_3 = \begin{cases} h_3 \cdot \frac{M_0 - (M_1 + M_2)}{M_3}, & \text{при } M_0 - (M_1 + M_2) \leq M_3, \\ h_3, & \text{при } M_0 - (M_1 + M_2) > M_3. \end{cases} \quad (8)$$

Максимальная концентрация НП  $C_3$  в грунте зависит от адсорбированной в грунте массы, следовательно, концентрация высчитывается используя максимальную глубину проникновения НП в грунт или же заменяя ее на мощность грунтового слоя. Вычисляется по следующей формуле:

$$C_3 = \frac{M_3}{S_1 \cdot H_3 \cdot \rho_3}. \quad (9)$$

Средняя плотность грунта  $\rho_3$  является справочной величиной [10].

Уровень грунтовых вод. На четвертом уровне модели вычисляются: срок достижения максимальной концентрации на границе грун-

товых вод, горизонтальная скорость распространения фронта загрязнения с грунтовыми водами, концентрация НП в грунтовых водах, радиус распространения НП с грунтовыми водами.

Временной интервал для максимальной концентрации на уровне грунтовых вод  $t_4$  вычисляется как сумма продолжительности времени полного впитывания НП в почву и времени полного впитывания НП в грунт:

$$t_4 = \frac{h_2 + h_3}{v^3}. \quad (10)$$

Максимальное расстояние распространения фронта загрязнения от центра пролива НП с грунтовыми водами  $l_4$  вычисляется по следующей формуле:

$$l_4 = \frac{M_0 - (M_1 + M_2 + M_3)}{2R \cdot h_4 \cdot m_3 \cdot w_3 \cdot \frac{\delta_0}{\delta_b}}, \quad (11)$$

где  $R$  – радиус пятна пролива (м).

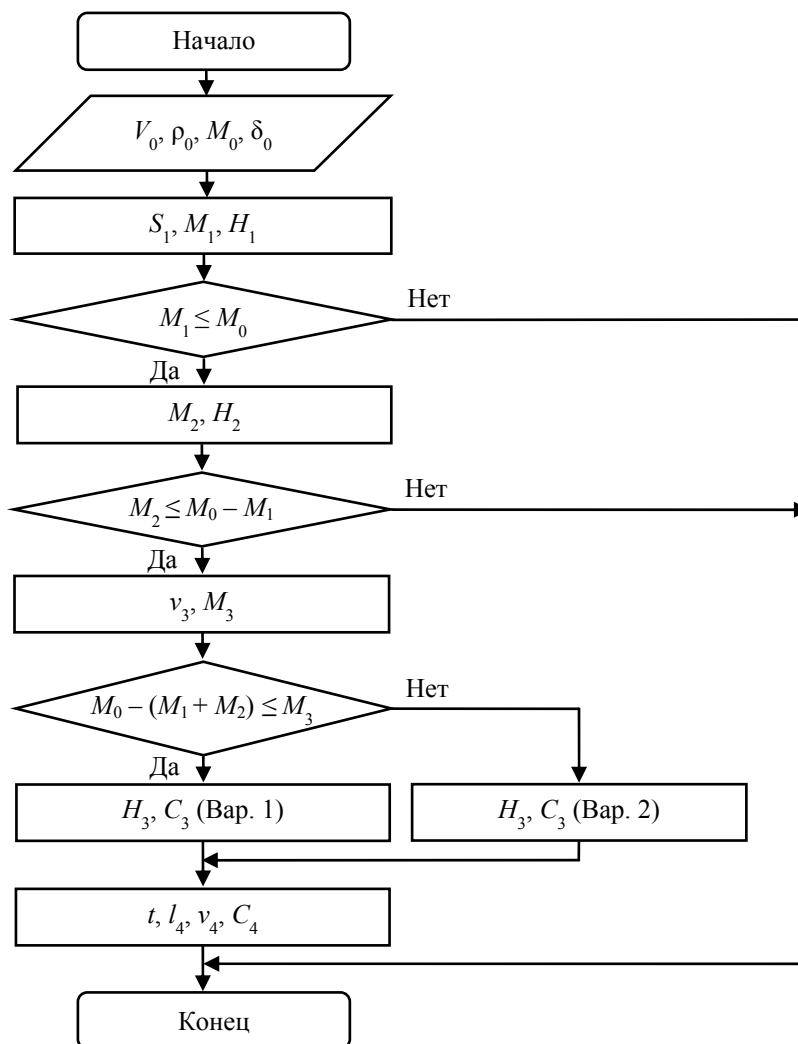


Рис. 2. Схема алгоритма работы ММП

Горизонтальная скорость распространения  $v_4$  фронта загрязнения с грунтовыми водами рассчитывается по следующей формуле:

$$v_4 = \frac{h'_3 - h''_3}{l_4} \cdot \frac{k_B}{r_3}. \quad (12)$$

Концентрация загрязнения в грунтовых водах  $C_4$  вычисляется по следующей формуле:

$$C_4 = \frac{M_0 - (M_1 + M_2 + M_3)}{2R \cdot l_4 \cdot h_4}. \quad (13)$$

ММП работает по алгоритму, схема которого представлена на рис. 2.

Для оценки адекватности модели проведены испытания на пяти объектах в Беларуси. В качестве объектов были выбраны нефтебазы и автозаправочные станции, на которых были зафиксированы аварийные проливы НП и проведены исследования по замеру концентраций Институтом природопользования. Предварительный анализ полученного с помощью ММП прогноза и результатов измерений показал, что при значительных расхождениях прогнозируемых и измеренных концентраций НП в отдельных точках, в целом прогноз ММП не противоречит общей реальной картине загрязнения. Аналогичные исследования в настоящее время проводятся на двух объектах (нефтепроводы) в Казахстане.

**Заключение.** Сравнивая рассмотренную математическую модель с программно-аппа-

ратным комплексом на платформе ArcGIS, стоит заметить, что обе модели прогнозируют площадь и форму пятна загрязнения и вероятность попадания нефтепродукта на близлежащие объекты. Однако математическая модель учитывает то, что происходит с пятном загрязнения с момента аварии до распространения загрязнения с грунтовыми водами, показывая последствия пролива поэтапно, начиная с поверхностного слоя до попадания нефтепродукта в водные ресурсы, в отличие от конкурента, где учитываются лишь наземные последствия пролива.

Модель находится в стадии доработки, в дальнейшем планируется ее расширение вводом дополнительной информации.

Работа выполнена в рамках совместного белорусско-казахстанского инновационного проекта «Разработка экспертной системы реабилитации геологической среды, загрязненной нефтепродуктами, на основе принципов самоорганизации для территорий государств – участников СНГ» Межгосударственной программы инновационного сотрудничества государств-участников на период до 2020 г.

Математическая модель является совместной разработкой специалистов Научно-производственного центра по геологии, Института природопользования Национальной академии наук Беларуси и Белорусского государственного технологического университета.

### Литература

1. Data+/Геоинформационные системы для бизнеса и общества [Электронный ресурс]. 2017. URL: [https://www.dataplus.ru/news/arcreview/detail.php?ID=1865&SECTION\\_ID=49](https://www.dataplus.ru/news/arcreview/detail.php?ID=1865&SECTION_ID=49) (дата обращения: 12.12.2017).
2. Методика расчета минимальной оснащенности аварийно-спасательных служб (формирований) предназначенных для локализации и ликвидации разливов нефти и нефтепродуктов на территории Российской Федерации, на континентальном шельфе и в исключительной экономической зоне Российской Федерации: приложение № 1 к приказу № 613, от 21 августа 2000 г., МЧС Российской Федерации. С. 4–5, 39.
3. Белькова С. В. Определение ущерба окружающей среде при авариях на магистральных нефтепроводах. Омск: ОмГТУ, 2010. С. 14–18.
4. Гольдберг В. М., Газда С. Гидрогеологические основы охраны подземных вод от загрязнения – М.: Недра, 1984. 262 с.
5. Отчет о комплексной геолого-гидрогеологической и инженерно-геологической съемке масштаба 1:50 000 для целей мелиорации в водосборах рек Или и Гайны (Плещеницкий участок) / Т. А. Михалева [и др.]. Минск: Институт геологических наук, 1978–1980. Отчет 921.
6. Методика прогнозирования миграции загрязняющих веществ в грунтовых водоносных горизонтах от автозаправочных станций: РД РБ 0212.1-98. Минск, 1998. 258 с.
7. Методика прогнозирования объема экологического загрязнения грунтов и грунтовых вод при проливе экологически вредных веществ / А. В. Вагнер [и др.]. // ИСБ: Экологический вестник России. 2004, № 5. С. 45–51.
8. Огнянник Н. С. Основы изучения загрязнения геологической среды легкими нефтепродуктами. Киев: А.П.Н., 2006. С. 278.
9. Белоусова А. П. Экологическая гидрогеология: учеб. для вузов. М.: Академкнига, 2006. С. 397.

10. Шляппо Е. С. Отчет о комплексной геолого-гидрогеологической съёмке масштаба 1:50 000 с инженерно-геологическими исследованиями по водосборам низовьев рек Горыни, Ствиги и Уборти (Средне-Припятский участок) 1968–1970. Бобруйск, 1970.

### References

1. Data+/Geoinformation system for business and society. Available at: [https://www.dataplus.ru/news/arcreview/detail.php?ID=1865&SECTION\\_ID=49](https://www.dataplus.ru/news/arcreview/detail.php?ID=1865&SECTION_ID=49) (accessed 12.12.2017).
2. Methodology for calculating the minimum equipment of rescue services (formations) intended for localization and liquidation of oil and oil products spills in the territory of the Russian Federation, on the continental shelf and in the exclusive economic zone of the Russian Federation: Appendix 1 to the Draft Order of the Ministry of Emergency Situations of the Russian Federation. P. 39.
3. Bel'kova S. V. *Opredeleniye ushcherba okruzhayushchey srede pri avariyaх na magistral'nykh nefteprovodakh* [Definition: Determination of damage to the environment during accidents on main oil pipelines]. Omsk, OmGTU Publ., 2010. Pp. 14–18.
4. Gol'dberg V. M., Gazda S. *Gidrogeologicheskiye osnovy okhrany podzemnykh vod ot zagryazneniya* [Definition: Hydrogeological basis of protection of groundwater from pollution]. Moscow, Nedra Publ., 1984. P. 262.
5. Mikhaleva T. A., Deruto G. V., Andrusenko N. Yu. *Otchet o kompleksnoy geologo-gidrogeologicheskoy i inzhenerno-geologicheskoy s'yemke masshtaba 1:50 000 dlya tseley melioratsii v vodosborakh rek Ilii i Gayny (Pleshchenitskiy uchastok)* [Report on a comprehensive geological and hydrogeological survey of a scale of 1:50 000 for the purposes of land reclamation in the watersheds of the rivers Iliya and Gayna (Pleshchenitskiy site)]. 1978–1980. Report 921.
6. RD RB 0212.1-98. Methods of forecasting the migration of pollutants in groundwater aquifers from petrol station. Minsk, 1998. 258 p.
7. Wagner A. V., Bukharin S. N., Kochemasov S. G., Priymak V. M. Methods of forecasting the volume of ecological use of soil and groundwater in the strait of environmentally harmful substances. *ISB: Ekologicheskii vestnik Rossii* [Ecological Bulletin of Russia], 2004, no. 5, pp. 45–51 (In Russian).
8. Ognyanik N. S., Paramonova N. K., Briks A. L., Konnov P. V., Pashkovskiy I. S. *Osnovy izucheniya zagryazneniya geologicheskoy sredy legkimi nefteproduktami* [Fundamentals of studying the pollution of the geological environment with light oil products]. Kiev, A.P.N. Publ., 2006. 278 p.
9. Belousova A. P., Gavich I. K., Lisenkov A. V., Popov Ye. V. *Ekologicheskaya gidrogeologiya: uchebnik dlya vuzov* [Ecological hydrogeology: A textbook for high schools]. Moscow, Akademkniga Publ., 2006. 397 p.
10. Shlyappo Ye. S., Shchurok Ye. K., Sergeevich V. P. *Otchet o kompleksnoy geologo-gidrogeologicheskoy s'yemke masshtaba 1: 50 000 s inzhenerno-geologicheskimi issledovaniyami po vodosboram nizov'yev rek Goryni, Stvigi i Uborti (Sredne-Pripyatskiy uchastok)* [Report on a comprehensive geological and hydrogeological survey of a scale of 1:50 000 engineering-geological studies on catchments of the lower reaches of the Goryni, Stvigi and Uborti rivers (Middle Pripyatskiy site)]. 1968–1970. Report 20.

### Информация об авторах

**Бурмакова Анастасия Владимировна** – магистрант. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: burmakova@belstu.by

**Смелов Владимир Владиславович** – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: smw@belstu.by

**Захаров Алексей Александрович** – младший научный сотрудник. Институт природопользования Национальной академии наук Беларуси (220072, г. Минск, пр-т Независимости 66, Республика Беларусь). E-mail: nature@ecology.basnet.by

### Information about the authors

**Burmakova Anastasiya Vladimirovna** – Master's degree student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str, 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: burmakova@belstu.by

**Smelov Vladimir Vladislavovich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str, 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: smw@belstu.by

**Zakharov Aleksey Alekseevich** – junior researcher. The Institute of Nature Management of the National Academy of Sciences of Belarus. (66, Nezavisimosti Ave, 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: nature@ecology.basnet.by

Поступила 13.12.2017



# ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ

---

УДК 681.391

**Д. М. Романенко, Н. В. Пацей, А. М. Драко**  
Белорусский государственный технологический университет

## ОСОБЕННОСТИ ДЕКОДИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ БЛОЧНЫХ КОДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕКУРРЕНТНЫХ И РАДИАЛЬНО-БАЗИСНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

В статье рассмотрены особенности применения нейронной сети для декодирования кода Хэмминга. Предлагается использовать нейронную сеть для декодирования полученного сообщения путем выбора к какому из вариантов принадлежит переданное сообщение, что является решением задачи классификации. Возможными вариантами для решения такой задачи являются рекуррентные нейронные сети и сети на основе радиально-базисных функций. Процесс декодирования рассматривается для кода Хэмминга (7, 4). Исходными данными при декодировании являются шестнадцать вариантов сочетания четырех информационных символов закодированного сообщения. Кодовые символы поступают на элементы сети, образующие входной слой. Данный слой использует рекуррентную связь между нейронами, что позволяет найти корреляцию между символами переданного сообщения. Выходной слой из шестнадцати элементов, связанный прямой связью с предыдущим слоем, выполняет функцию классификации, формируя тем самым биты декодированного сообщения. Сеть обучается на примерах входных и выходных значений элементов по методу градиентного спуска с минимизацией количества ошибок при классификации.

Выполнены исследования предложенных методов нейронного декодирования на основе разработанной программной модели. Согласно полученным результатам методы нейросетевого декодирования можно применять и для других блочных кодов, например, для итеративных. Нейросетевой декодер в целом показал высокие результаты по обнаружению и исправлению ошибок, которые ближе к «мягкому» декодированию, чем к «жесткому». Однако увеличение длины кодовой последовательности до 64 бит и выше существенно усложняет процесс декодирования.

**Ключевые слова:** кодирование, сети, нейрон, информация, каналы, связь, передача, обучение, уровни.

**D. M. Romanenko, N. V. Patsei, A. M. Drako**  
Belarusian State Technological University

## FEATURES OF LINEAR BLOCK CODES DECODING WITH USE OF RECURRENT AND RADIAL-BASIS NEURAL NETWORKS

The article describes the features of the decoding Hamming code with a neural network. When Hamming code (7, 4) is used, there are seven symbols that are transmitted over the network. However, only four symbols are informational which correspond to sixteen sets for messages after encoding. Possible variants for solving such a problem are made on base of recurrent neural networks and radially basic functions networks. The decoding process is considered. The initial data for decoding are sixteen variants of the four information symbols encoded message. This data build an input layer with recurrent connections between the elements. This layer will help to find a correlation between the symbols of the transmitted message. The output layer of sixteen elements, linked by a direct link to the previous layer, performs the classification function, thereby generating the bits of the decoded message. The network is trained on the examples of input and output values by the method of the gradient descent, that is based on the minimization of errors numbers during the classification.

Based on the developed software simulation model the proposed methods of neural network decoding are carried out. According to the obtained results, neural network decoding methods can be used with other block codes, for example, iterative. The neural network decoder as a whole showed high results in detecting and correcting errors, which are closer to “soft” than to “hard” decoding. However, increasing the length of the code sequence to 64 bits or more significantly complicates the decoding process.

**Key words:** coding, network, neuron, information channels, communication, connection, training, levels.

**Введение.** Рост числа пользователей коммуникационных систем, появление новых мультимедийных услуг предъявляют высокие требования к скорости, надежности и времени задержки при обработке информации. Одна из самых весомых задержек связана с необходимостью использования помехоустойчивого кодирования и декодирования данных. Для снижения временных затрат необходимо решать проблемы совершенствования существующих и разработки новых методов обработки информации.

В настоящее время подобные проблемы решаются различными путями, в том числе внедрением параллельных методов кодирования и декодирования, основанных на элементах теории искусственных нейронных сетей. Одним из перспективных направлений развития нейронных сетей является их использование при решении задач декодирования линейных блочных кодов в системах передачи информации, которые зачастую являются достаточно сложными для решения с использованием традиционной архитектуры вычислительных машин.

Существует множество подходов к использованию нейронных сетей как в качестве отдельных элементов системы декодирования, так и для построения дискретных декодеров [1]. В силу того, что декодер играет ключевую роль в процессе исправления ошибок в переданном сообщении, можно сделать вывод, что актуальность разработки новых методов декодирования, основанных на использовании нейронных сетей, не вызывает сомнений.

**Основная часть.** В целом нейросетевое декодирование можно рассматривать как процесс перехода от вторичного отображения сообщения (закодированного сообщения) к первичному алфавиту (информационному сообщению). Фактически оно сводится к задаче классификации или определения принадлежности входного образа, представленного вектором признаков, к одному или нескольким предварительно определенным классам. Сети с прямой связью являются универсальным средством аппроксимации функций, что позволяет их использовать в решении задач классификации. Как правило, нейронные сети оказываются наиболее эффективным способом классификации, потому что генерируют фактически большое число регрессионных моделей (которые используются в решении задач классификации статистическими методами).

К сожалению, в применении нейронных сетей в практических задачах возникает ряд проблем. Заранее неизвестно, какой сложности (размера) может потребоваться сеть для достаточно точной реализации отображения. Эта

сложность может оказаться чрезмерно высокой, что потребует сложной архитектуры сетей. Так, в работе [2] доказано, что простейшие однослойные нейронные сети способны решать только линейно разделимые задачи. Это ограничение преодолимо при использовании многослойных нейронных сетей. В общем виде можно сказать, что в сети с одним скрытым слоем вектор, соответствующий входной последовательности бит, преобразуется скрытым слоем в некоторое новое пространство, которое может иметь другую размерность, а затем гиперплоскости, соответствующие нейронам выходного слоя, разделяют его на классы. Таким образом, сеть распознает не только характеристики исходных данных, но и «характеристики характеристик», сформированные скрытым слоем. Последнее и позволяет найти корреляционные зависимости между информационными и избыточными символами сообщения.

Задача классификации при наличии двух классов может быть решена сетью из одного нейрона в выходном слое, который может принимать одно из двух значений (0 или 1) в зависимости от того, к какому классу принадлежит образец. При наличии нескольких классов возникает проблема, связанная с представлением этих данных для выхода сети. Наиболее простым способом представления выходных данных в таком случае является вектор, компоненты которого соответствуют различным номерам классов. При этом  $i$ -я компонента вектора соответствует  $j$ -му классу. Все остальные компоненты при этом устанавливаются в нуль. При интерпретации результата обычно считается, что номер класса определяется номером выхода сети, на котором появилось максимальное значение. Так, например, если в сети с тремя выходами имеется вектор выходных значений (0,3; 0,6; 0,4), то сообщение приравнивается ко второму классу, так как максимальное значение имеет вторая компонента вектора. При данном способе кодирования иногда вводится также понятие «уверенности» сети в том, что пример относится к этому классу. Наиболее простой способ определения «уверенности» заключается в установлении разности между максимальным значением выхода и значением другого выхода, которое является ближайшим к максимальному значению. Например, для рассмотренного выше примера «уверенность» сети в том, что пример относится ко второму классу, определится как разность между второй и третьей компонентой вектора и равна 0,2. Соответственно, чем выше уверенность, тем больше вероятность того, что сеть дала правильный ответ. Этот метод кодирования является самым простым, но не всегда оптимальным

способом представления данных (возникнут сложности при практической реализации при значениях  $k > 64$ ).

Возможен также другой вариант классификации, который заключается в следующем: выходной вектор представляет собой номер кластера, записанный в двоичной форме. Тогда при наличии ста двадцати восьми классов потребуется вектор из восьми элементов, и, скажем, сто двадцать седьмому классу будет соответствовать вектор 01111111. При этом пятистам двенадцати классам соответствует вектор из десяти элементов, что всего на два элемента больше. В случае получения неверного значения на одном из выходов возможно получить неверную классификацию. В рассмотренном далее примере используется значение выходных элементов, равное количеству классов. Однако необходимо отметить, что обе описанные выше системы классификации имеют как преимущества, так и недостатки. Преимуществом первой будет надежность классификации, однако большое количество элементов сети делает ее сложно реализуемой и значительно более медленной, чем в случае, когда класс будет представлен двоичным числом.

При классификации большее значение имеет выбор данных. Так, для блочных кодов исходными данными являются информационная последовательность, которая подлежит преобразованию в кодовую. Поэтому можно использовать переданное сообщение как входные данные для нейросетевого декодера. Далее нейронная сеть при помощи скрытого слоя устанавливает корреляцию между информационными и избыточными битами, а на выходном слое будет определен класс, который укажет, какая информационная последовательность передавалась. При этом предполагается использовать обучение с «учителем». Входному сообщению будет соответствовать класс определенной кодовой последовательности.

Топология сети приведена на примере кода Хэмминга (7, 4). Кодовая последовательность подается на семь элементов на входном слое [3]. Скрытый слой также состоит из семи элементов, связанных рекуррентно, для получения корреляции между символами переданного сообщения. При этом информационных символов всего четыре, что соответственно дает шестнадцать вариаций кодовых последовательностей или классов для сети. В соответствии с этим используется либо шестнадцать элементов выходного слоя, либо четыре в зависимости от применяемого кодирования классов. Рассмотрим пример декодирования. Пусть после передачи по зашумленному каналу принято сообщение 0010110, которое и формирует входной

вектор нейронной сети. После выполнения соответствующих вычислений нейронной сетью будет получен выходной вектор значений: 1; 0,52; 1; 0,59; 1; 0,88; 0,62; 1; 0,86; 0,73; 1; 0,65; 1; 0,64; 0,59; 0,67. Минимальное значение, полученное во втором элементе вектора, означает, что переданная кодовая последовательность относится ко второму классу, который соответствует следующей кодовой последовательности 0010110 (согласно таблице соответствия класса кодовой последовательности). В итоге если выбранная нейронной сетью в процессе классификации последовательность совпадет с исходной информационной последовательностью, то можно считать, что декодирование завершено успешно.

Среди многослойных нейронных сетей можно выделить четыре наиболее подходящих варианта:

- сети прямого распространения;
- рекуррентные нейронные сети или сети обратного распространения (RNN);
- сети на основе радиально базисных функций (RFB);
- нейронная сеть Геленбе [4].

Отметим, что далее основное внимание будет уделено принципам декодирования с использованием двух из них: рекуррентных нейронных сетей и сетей на основе радиально-базисных функций.

Далее рассмотрим особенности применения рекуррентных нейронных сетей (Recurrent Neural Network, RNN). Основное отличие данных сетей от традиционных заключается в том, что каждый нейрон взаимодействует сам с собой. На вход данному типу сетей подается сигнал, который соответствует полученной кодовой последовательности. Каждый элемент такой последовательности поочередно передается одним и тем же нейронам, которые своё же предсказание возвращают себе вместе со следующим ее элементом до тех пор, пока последовательность не закончится. Элементы рекуррентной сети изображают как обычные нейроны с дополнительной циклической стрелкой, которая демонстрирует то, что кроме входного сигнала нейрон использует также свое дополнительное скрытое состояние. Если «развернуть» такое изображение, получится цепочка одинаковых нейронов, каждый из которых получает на вход свой элемент последовательности, выдает предсказание и передает его дальше по цепочке.

В соответствии с представленным выше описанием принципов декодирования с RNN рекуррентная нейронная сеть для декодирования кода Хэмминга (7, 4) будет выглядеть, как показано на рис. 1.

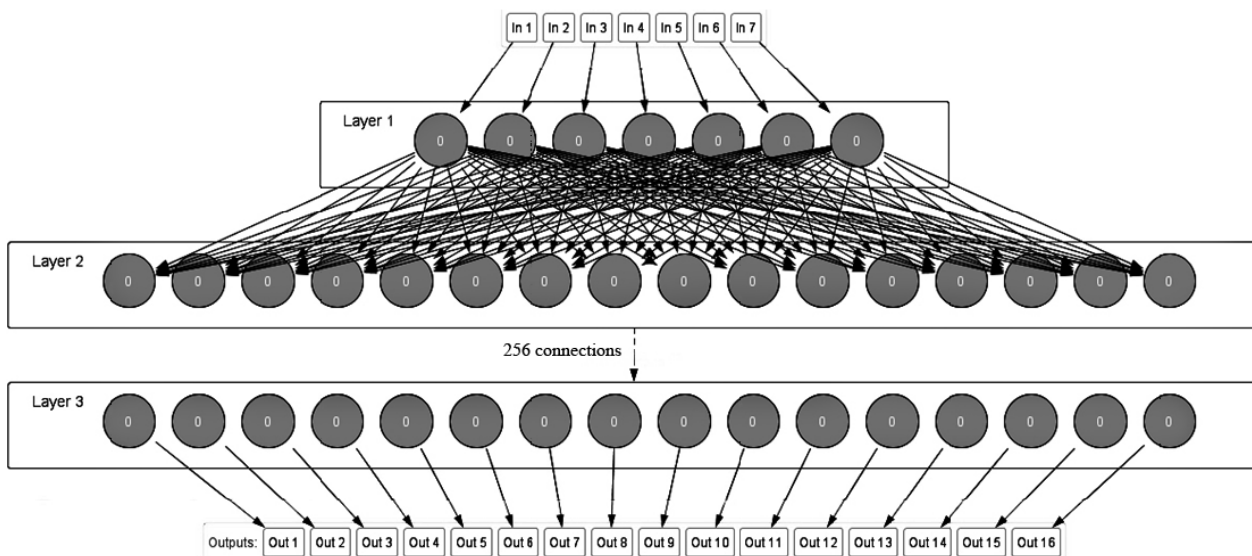


Рис. 1. Скриншот сгенерированной рекуррентной сети для декодирования кода Хэмминга (7, 4)

Другим типом исследуемых нейронных сетей являются сети, которые основываются на использовании радиально-симметричных функций. Это функции, относящиеся к специальному классу, характерное свойство которых заключается в том, что отклик функции монотонно убывает (возрастает) с удалением от центральной точки. Типичный пример такой функции – функция Гаусса, для скалярного аргумента имеющая следующее аналитическое представление:

$$h(x) = \exp\left(-\frac{(x - c)^2}{r^2}\right), \quad (1)$$

где  $c$  – смещение относительно центра;  $r$  – радиус (параметр, от значения которого зависит ширина функции).

В случае векторной переменной  $x$  формула для функции Гаусса приобретает следующий вид:

$$h(\bar{x}) = \exp\left(-\frac{\|\bar{x} - \bar{c}\|^2}{r^2}\right). \quad (2)$$

Структура однослойных RBF сетей, представлена на рис. 2.

Очевидно, что каждый  $j$ -й из  $n$  компонентов входного вектора подается на вход  $m$  базисных функций и их выходы линейно суммируются с весами:

$$\{w_j\}_j^m, \quad (3)$$

где  $w$  – вектор весов, показывающий смещение функции.

Таким образом, выход RBF сети является линейной комбинацией некоторого набора базисных функций:

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m w_j h_j(\bar{x}). \quad (4)$$

В дальнейшем под функцией  $h$  будем подразумевать функцию Гаусса с векторным аргументом. Допускается использование в качестве базисных функций произвольный набор функций. В любом случае на основе некоторого набора экспериментальных данных типа «вход – выход» и в условиях полной неопределенности относительно вида возможной функциональной зависимости между входными и выходными данными «пытаются угадать» эту зависимость.

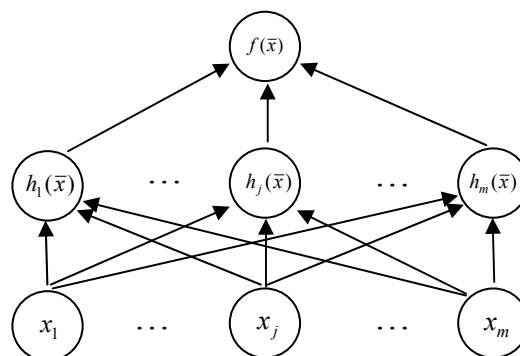


Рис. 2. Структура RBF сети для декодирования кода Хэмминга (7, 4)

Рассмотрим настройку RBF сетей. Предположим, что параметры функции  $h$ , а именно смещение  $c$  и радиус  $r$ , фиксированы, т. е. уже определены. Следовательно, задача нахождения весов в формуле (4) решается методами линейной алгебры. Этот метод называется методом псевдообратных матриц, он позволяет минимизировать средний квадрат ошибки. В соответствии с данным методом сначала находится интерполяционная матрица  $H$ :

$$H = \begin{pmatrix} h_1(\bar{x}_1) & h_2(\bar{x}_1) & \dots & h_m(\bar{x}_1) \\ h_1(\bar{x}_2) & h_2(\bar{x}_2) & \dots & h_m(\bar{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1(\bar{x}_p) & h_2(\bar{x}_p) & \dots & h_m(\bar{x}_p) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В представленной матрице  $m$  – число нейронов в скрытом слое;  $p$  – размер обучающей выборки, а каждый вектор  $x$  состоит из  $n$  компонентов, где  $n$  – число входов сети.

На следующем этапе вычисляется инверсия произведения матрицы  $H$  на транспонированную матрицу  $H^T$ :

$$A^{-1} = (H^T H)^{-1}. \quad (6)$$

Окончательный результат в виде вектора весов рассчитывается по формуле

$$\bar{W} = A^{-1} H^T \bar{y}. \quad (7)$$

Если предыдущее предположение о фиксированных параметрах функции активации  $h$  не выполняется, т. е. помимо весов необходимо настроить параметры активационной функции каждого нейрона (смещение функции и ее радиуса), задача становится нелинейной. И решать ее приходится с использованием итеративных численных методов оптимизации, например, градиентных методов.

Для изучения процесса декодирования с использованием нейронных сетей и сравнения с классическими методами декодирования была разработана программная модель, имитирующая работу следующих типов декодеров: классического «жесткого», «мягкого», нейронного на основе рекуррентной сети, нейронного на основе RBF сети. В результате моделирования процесса декодирования были получены результаты декодирования, представленные в виде зависимостей вероятности ошибки от уровня шума (рис. 3 и 4).

В ходе моделирования процесса декодирования было установлено, что использование нейронного декодера на основе RBF сети уступает по эффективности «мягкому» декодированию, однако лучше, чем «жесткое» декодирование и несколько превосходит декодирование на основе простой рекуррентной сети, которая в свою очередь также превосходит декодеры жесткого типа.

При этом необходимо отметить, что нейронные сети могут не только декодировать переданное кодовое сообщение, но и также давать оценку успешности декодирования, что может быть важным при появлении в процессе передачи многократных ошибок высокой кратности, превосходящих корректирующие возможности используемого помехоустойчивого кода.

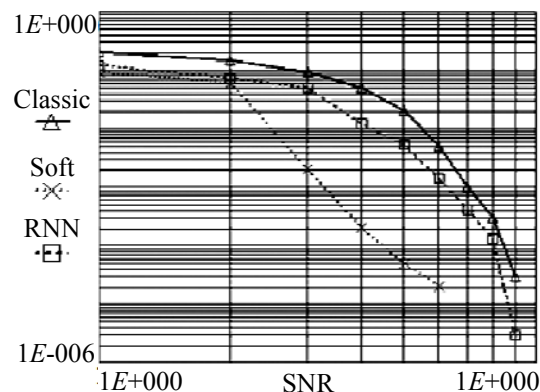


Рис. 3. Зависимости вероятности ошибки после декодирования от уровня шума для классического декодера, «мягкого» и декодеров на основе рекуррентной сети

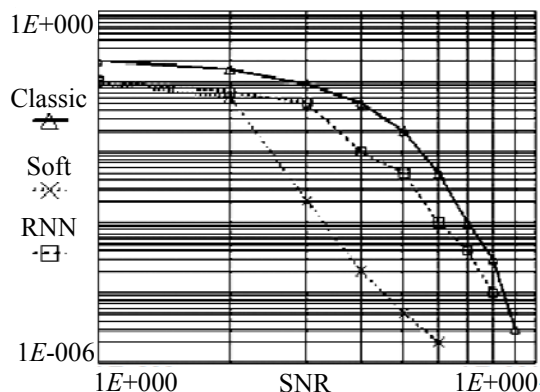


Рис. 4. Зависимости вероятности ошибки после декодирования от уровня шума для классического декодера, «мягкого» и декодеров на основе RBF сети

Несмотря на то что эффективность «мягкого» декодера в целом не была достигнута, необходимо отметить достаточно большой потенциал методов декодирования, основанных на использовании нейросетевых технологий, который заключается в возможности выполнения параллельных операций (например, вычислений) при аппаратном исполнении декодера, например, на основе VLSI (Very-large-scale integration) чипа. Также необходимо отметить, что при классическом методе декодирования кода Хэмминга возможно исправление только одной ошибки, а при декодировании с использованием нейронных сетей возможно исправление до трех ошибок с относительно высокой вероятностью получения на выходе декодера корректного информационного сообщения.

**Заключение.** По результатам проведенных исследований можно утверждать, что нейронные сети можно использовать для декодирования линейных блочных кодов, например, кода Хэмминга. В процессе декодирования нейрон-

ная сеть выполняет задачу классификации. Предложенные методы декодирования на основе рекуррентной и RBF нейронных сетей предполагают универсальность применения к всем кодам, относящимся к классу линейных блочных, и показывают высокие результаты по обнаружению и исправлению ошибок, которые по эффективности хоть и уступают «мягкому» декодированию, но при этом превосходят «жесткое». Однако увеличение длины кодовой последовательности значительно усложняет процесс декодирования. Выходом из данной си-

туации может служить кодирование классов в виде последовательности бит, что значительно уменьшает количество выходных элементов нейронной сети либо использование многослойных нейронных сетей. Разработанная имитационная модель процесса декодирования линейных избыточных кодов с использованием нейросетевых технологий позволила получить оценку эффективности предложенных методов на основе рекуррентной и RBF нейронных сетей в виде зависимостей вероятности появления ошибки от соотношения сигнал/шум.

### Литература

1. Zeng G., Hush D., Ahmed N. An application of neural net in decoding error-correcting codes // *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. 1989. P. 782–785.
2. Minsky M. L., Papert S. *Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry*. Cambridge, MA: MIT Press, 1969. 258 p.
3. Stefano A. D., Cataldo G. D., Palumbo G. On the use of neural networks for hamming coding // *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. 1991. Vol. 3. P. 1601–1604.
4. Драко А. М., Романенко Д. М. Особенности нейросетевого декодирования линейных блочных кодов // *Труды БГТУ*. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 166–170.

### References

1. Zeng G., Hush D., Ahmed N. An application of neural net in decoding error-correcting codes. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. 1989, pp. 782–785.
2. Minsky M. L., Papert S. *Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry*. Cambridge, MA: MIT Press, 1969. 258 p.
3. Stefano A. D., Cataldo G. D., Palumbo G. On the use of neural networks for hamming coding. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 1991, vol. 3, pp. 1601–1604.
4. Drako A. M., Romanenko D. M. Features of neural network decoding of linear block codes. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 166–170 (In Russian).

### Информация об авторах

**Романенко Дмитрий Михайлович** – кандидат технических наук, заведующий кафедрой информатики и веб-дизайна. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: rdm@belstu.by

**Пацей Наталья Владимировна** – кандидат технических наук, исполняющая обязанности заведующего кафедрой программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: n.patsei@belstu.by

**Драко Арсений Михайлович** – магистр технических наук, ассистент кафедры информатики и компьютерной графики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: a.drako@belstu.by

### Information about the authors

**Romanenko Dmitri Mikhailovich** – PhD (engineering), Head of the Department of Informatics and Web-design. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: rdm@belstu.by

**Patsei Nataliya Vladimirovna** – PhD (engineering), Acting Head of the Department of Programming Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: n.patsei@belstu.by

**Drako Arseni Mikhailovich** – Master of Engineering, Assistant, the Department of Informatics and Computer Graphics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a.drako@belstu.by

Поступила 28.11.2017

УДК 681.391

**А. Вахаб, Д. М. Романенко**

Белорусский государственный технологический университет

**МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ СТЕГАНОГРАФИИ НА ОСНОВЕ МОДИФИКАЦИИ ЦВЕТОВЫХ ПАРАМЕТРОВ ИЗОБРАЖЕНИЯ**

Рассмотрены особенности реализации методов стеганографии для изображений с целью скрытой передачи данных и охраны прав интеллектуальной собственности. Методы основаны на модификации цветковых параметров пикселей изображения. Скрытие данных может производиться во всех трех цветковых каналах: красном, зеленом, синем. Служебная информация графических файлов не затрагивается. Разработан и описан новый алгоритм стеганографического осаждения данных в растровые изображения, проанализированы его достоинства и недостатки, определены направления дальнейших исследований. Особенностью разработанного метода является то, что в отличие от классического LSB, осаждение данных осуществляется в десятичной форме, что позволяет добиться большей эффективности с точки зрения максимально возможного количества скрытых в изображении данных. Разработано программное средство, позволяющее осаждать/извлекать секретную авторскую информацию в графические файлы наиболее распространенных форматов (jpeg, bmp, png). Реализованные стеганографические методы предусматривают модификацию значений красного, зеленого и синего каналов любого пикселя изображения-контейнера. Выбор пикселей, подлежащих модификации, осуществляется в соответствии с секретным ключом пользователя, а также с учетом обеспечения высокой стегостойкости. Описаны функциональные возможности разработанного программного средства.

**Ключевые слова:** стеганография, изображение, осаждение, алгоритм, модель, цвет, авторское право.

**A. Wahab, D. M. Romanenko**

Belarusian State Technological University

**METHODS OF DIGITAL STEGANOGRAPHY BASED ON THE MODIFICATION OF COLOR IMAGE PARAMETERS**

Features of the steganography methods implementation for images for the purpose of hidden data transmission and protection of intellectual property rights are considered. The methods are based on the modification of the image pixels color parameters. Data concealment can be performed in all three color channels: red, green, blue. The service information of graphic files is not affected. A new algorithm for steganographic data precipitation in images is developed and described, its advantages and disadvantages are analyzed, directions for further research are determined. The main feature of the developed method, compares the classical LSB method, is that the data is deposited in decimal form, which allows to achieve greater efficiency in point of view the maximum possible hidden data amount in the image. A software tool has been developed that allows to precipitate/extract secret copyright information in graphic files of the most common formats (jpeg, bmp, png). The implemented steganographic methods provide the values modification of the red, green and blue channels of any pixel of the container image. The selection of the pixels to be modified is carried out in accordance with the user's secret key, and also with considering the maintenance of high stag resistance. The functional capabilities of the developed software are described.

**Key words:** steganography, image, precipitation, algorithm, model, color, copyright.

**Введение.** Проблема защиты авторских прав существенно обострилась в связи с вступлением человечества в цифровую эру, где вся информация хранится и передается в цифровом виде. Рассылка документов (текстовых, графических и т. д.) по сети предполагает, что их может получить большое число адресатов. Это также дает возможность недобросовестным пользователям адаптировать или перерабатывать информацию с целью извлечения коммерческой выгоды. Угроза информационного пиратства стала реальностью.

Авторское право распространяется на результаты науки, произведения литературы и

искусства, находящиеся в какой-либо объективной форме (в том числе и цифровой):

- письменной (рукопись, машинопись, нотная запись);
- электронной (компьютерная программа, электронная база данных, текст); звуко- или видеозаписи (магнитная, оптическая, электронная);
- изображения (картина, рисунок, кино-, теле-, видео-, фотокадр);
- объемно-пространственной (скульптура, макет, сооружение).

Одним из направлений решения указанной проблемы в контексте защиты авторства на объекты в цифровом виде является применение

современных стеганографических методов. Стеганография – это искусство передачи скрытого сообщения [1]. Компьютерные технологии придали новый импульс развитию и совершенствованию стеганографии, появилось новое направление в области защиты информации – цифровая стеганография. Причем, в отличие от криптографии, данные методы скрывают сам факт передачи информации [2].

Цифровая стеганография – направление классической стеганографии, основанное на сокрытии или внедрении дополнительной информации в цифровые объекты, вызывая при этом некоторые искажения этих объектов. Но, как правило, данные объекты являются мультимедиа объектами (изображения, видео, аудио, текстуры 3D-объектов) и внесение искажений, которые находятся ниже порога чувствительности среднестатистического человека, не приводит к заметным изменениям этих объектов. Кроме того, в оцифрованных объектах, изначально имеющих аналоговую природу, всегда присутствует шум квантования, а при воспроизведении этих объектов появляется дополнительный аналоговый шум и нелинейные искажения аппаратуры, все это способствует большей незаметности сокрытой информации.

Все алгоритмы встраивания скрытой информации в мультимедиа объекты (в том числе и изображения) можно разделить на несколько подгрупп:

1. Работающие непосредственно с самим цифровым сигналом, например, изображением. Классическим примером является метод LSB (Least Significant Bit, метод наименьшего значащего бита) [3].

2. «Впаивание» скрытой информации. В данном случае происходит наложение скрываемого изображения (звука, иногда текста) поверх оригинала. Часто используется для встраивания цифровых водяных знаков (ЦВЗ).

3. Использование особенностей форматов файлов. Сюда можно отнести запись информации в метаданные или в различные другие не используемые зарезервированные поля файла.

Далее в данной статье будут рассматриваться вопросы применения именно методов цифровой стеганографии, работающих непосредственно с отдельными элементами (пикселями) растровых изображений, для осаждения информации, с помощью которой автор может защитить права интеллектуальной собственности.

**Основная часть.** Цифровая стеганография базируется на двух принципах. Первый заключается в том, что файлы, содержащие изображение в цифровом виде, могут быть до некоторой степени видоизменены без потери

функциональности, в отличие от других типов данных, требующих абсолютной точности.

Второй принцип состоит в неспособности органов чувств человека различить незначительные изменения в цвете изображения, что особенно легко использовать применительно к объекту, несущему избыточную информацию, будь то 8-битное или, еще лучше, 48-битное изображение.

Некоторые современные методы стеганографии основываются именно на данных положениях. В цифровой стеганографии таким методом является, например, метод LSB.

Как известно, в графических форматах (например, BMP, JPEG) изображение хранится как матрица значений оттенков цвета для каждой точки хранимого изображения. Если каждая из компонент пространства RGB (их еще называют каналами цвета) хранится в одном байте, она может принимать значения от 0 до 255 включительно, что соответствует 24-битной глубине цвета (8 бит на канал). Особенность зрения человека заключается в том, что оно слабо различает незначительные колебания цвета. Для 24-битного цвета изменение в каждом из трех каналов одного наименее значимого бита (т. е. крайнего правого) приводит к изменению не более чем на 3–4% интенсивности (цвета) данной точки, что позволяет изменять их незаметно для глаза по своему усмотрению.

Далее рассмотрим более подробно непосредственно метод LSB. Если отбросить в расчетах обычно незначительную относительно размера изображения служебную информацию в начале файла, то получим возможность скрытно передать сообщение размером в 1/8 размера контейнера (равномерно распределенную по последним битам в каждой байте матрицы цветов пикселей) или же размером в 1/4 контейнера (соответственно при использовании двух последних бит в байтах).

Принцип работы стеганографического метода LSB заключается в следующем. Пусть имеется 24-битное изображение в градациях серого. Пиксель кодируется 3 байтами, и в них расположены значения каналов RGB. При изменении наименее значимого бита будет изменяться значение байта на единицу. Такие градации мало заметны для человека, они могут вообще не отобразиться при использовании низкокачественных устройств вывода. Приведенный ниже пример показывает, как сообщение может быть скрыто в первых 8 байтах, относящихся к трем пикселям 24-битного изображения (в рассматриваемом примере подчеркнуты только те три бита, которые были фактически изменены).



Исходные значения пикселей:

(00100111 11101001 11001000),  
(00100111 11001000 11101001),  
(11001000 00100111 11101001).

Осаждаемый текст: 01000001.

Результат осаждения:

(00100110 11101001 11001000),  
(00100110 11001000 11101000),  
(11001000 00100111 11101001).

Также известна небольшая модификация представленной методики осаждения стеганографической информации, позволяющая использовать для встраивания сообщения два или более младших бит на байт. Это увеличивает объем скрытой информации в объекте-контейнере, но скрытность сильно снижается, что облегчает обнаружение результатов осаждения информации.

В целом основной проблемой метода LSB является именно слабая стегостойкость. Так, например, существует интеллектуальное программное обеспечение, которое для выявления стеганографии проверяет области, состоящие из одного сплошного цвета. Для повышения скрытности следует избегать записи изменений в такие пиксели.

В рамках представленной работы предлагается модификация техники осаждения секретной (авторской) информации для метода графической стеганографии LSB. Суть модификации заключается в следующем. Авторский текст в соответствии с кодировкой ASCII преобразуется в числовой вид, т. е. символы заменяются на соответствующие числовые коды. Так при конвертации секретного текста Alaa получим: A (ASCII) = 65; L (ASCII) = 76; A (ASCII) = 65; A (ASCII) = 65. На следующем шаге с помощью секретного ключа определяется место осаждения информации (в рассматриваемом примере информация будет осаждаться относительно центра изображения, как представлено на рис. 1).

Для осаждения четырех тестовых символов в рассматриваемом случае потребуется четыре пикселя изображения. Пусть исходное изображение (стегоконтейнер) имеет размеры 281×179 пикселей. Тогда получится, что изменять в процессе осаждения будем цветовые составляющие, например, следующих точек с координатами (140, 58), (140, 87), (140, 88), (140, 89) (рис. 2).

Замена значений трех составляющих цвета (red, green, blue) будет осуществляться не в двоичном, как в классическом LSB методе, а в десятичном виде. Замена подлежат наименее значимые (правые) цифры значений соответствующего цветового канала (рис. 3).

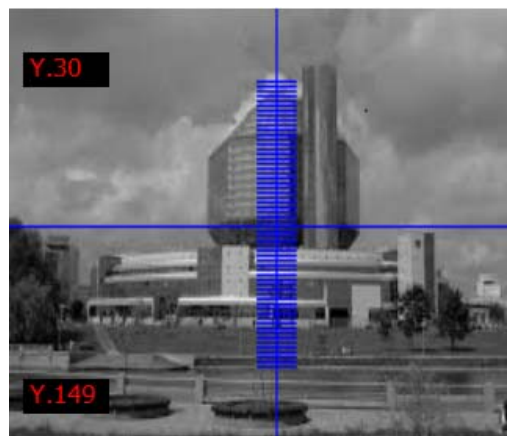


Рис. 1. Пример выбора места (пикселей) для осаждения авторской информации

R	G	B	X	Y	№	TEXT	DECIMAL
97	88	86	140	86	1	A	65
96	93	87	140	87	2	L	76
97	92	85	140	88	3	A	65
95	84	76	140	89	4	A	65

Рис. 2. Пример выбранных для осаждения пикселей

R	G	B	X	Y	№	TEXT	DECIMAL
9x	88	8x	140	86	1	A	65
9x	93	8x	140	87	2	L	76
9x	92	8x	140	88	3	A	65
9x	84	7x	140	89	4	A	65

Рис. 3. Пример цифр в выбранных пикселях, подлежащих замене при осаждении информации

Отметим, что если использовать символы кириллицы (ASCII коды >127), то потребуются задействовать и зеленую составляющую пикселя, либо увеличивать количество задействованных в процессе осаждения пикселей. При замене в красную составляющую будет записываться первая цифра двоичного кода символа, а в синюю составляющую – вторая цифра двоичного кода символа. Таким образом получим следующие значения цветовых составляющих пикселей, как показано на рис. 4.

Пиксели исходного изображения							
R	G	B	X	Y	№	TEXT	DECIMAL
97	88	86	140	86	1	A	65
96	93	87	140	87	2	L	76
97	92	85	140	88	3	A	65
95	84	76	140	89	4	A	65
Пиксели изображения с осажденной информацией							
R	G	B	X	Y	№	TEXT	DECIMAL
96	88	85	140	86	1	A	65
97	93	86	140	87	2	L	76
96	92	85	140	88	3	A	65
96	84	75	140	89	4	A	65

Рис. 4. Результат замены значений в выбранных пикселях при осаждении информации

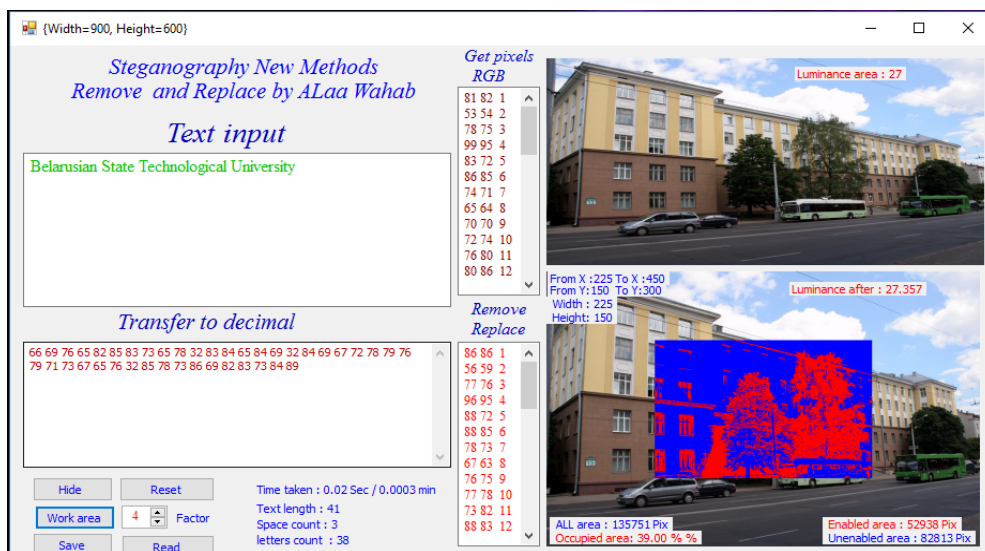


Рис. 5. Интерфейс главного окна программного средства

В целом можно заметить, что такой механизм осаждения информации будет изменять не один младший бит, как бы это было в классическом методе LSB, а целую группу бит, причем необязательно начиная с младшего разряда. Но при этом все равно будет достигаться незначительное изменение цвета пикселя. Так, например, если бы значение в красном канале для какого-то пикселя было изменено с 96 (в двоичной системе 1100000) на 95 (в двоичной системе 1011110), то это было бы эквивалентно изменению 5 бит. Это говорит о том, что применение представленного механизма осаждения информации позволит улучшить такую характеристику, как максимально возможное количество осаждаемой информации в контейнере (изображении).

Для реализации предлагаемого метода изменения цветовых значений изображения и классического LSB, а также с целью их дальнейшего изучения и сравнения было создано специальное программное средство, главное окно которого представлено на рис. 5.

Отметим, что сохранять изображения при использовании данного программного средства можно практически в любом графическом формате, но при этом не предусматривается использование jpeg со сжатием, так как в последнем применяются операции «выкалывания» и «прореживания», приводящие к замене группы значений на усредненное, а поэтому осаждаемая авторская информация при сохранении файла может быть повреждена. При использовании сжатого формата jpeg осаждаемую информацию надо в матрицу коэффициентов, получаемую при ортогональном DCT преобразовании изображения.

Проанализируем эффективность использования разработанной модификации стеганогра-

фического метода LSB. Как было показано ранее на примере с осаждением текста Alaa, в предложенном методе требуется изменить цветовые составляющие лишь одного пикселя для каждой буквы алфавита, а если бы использовался классическим алгоритм LSB, то задействованы были бы как минимум по 3 пикселя на один символ. Соответственно получим следующие графики зависимостей количества модифицируемых пикселей от количества осаждаемой информации (в байтах) (рис. 6).

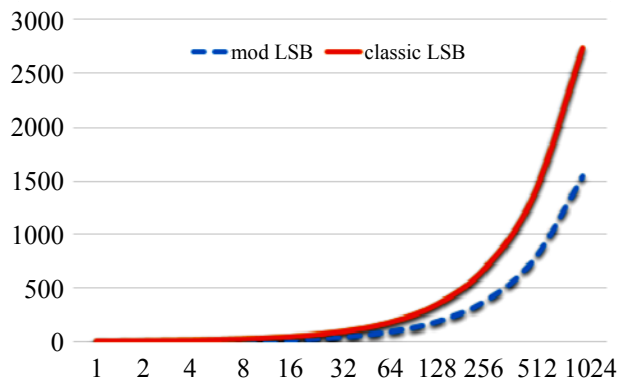


Рис. 6. Зависимости количества модифицируемых пикселей от количества осаждаемой информации

Как видно из рис. 6, модифицированный LSB метод превосходит классический с точки зрения емкости осаждаемой информации примерно на 40–50%. Однако очевидно, что такая высокая информационная емкость стегоконтейнера имеет и обратную сторону – потенциально возможную меньшую стегостойкость. В данном случае важнейшую роль в процессе осаждения будет играть непосредственно алгоритм выбора пикселей, в которые будет осаж-

даться информация, который еще предстоит оптимизировать с точки зрения критерия минимальности цветовых отклонений пикселей исходного изображения-контейнера и изображения с авторской информацией, что является важнейшим направлением для дальнейшего исследования. В качестве целевой функции предполагается использовать геометрическую разность цветов при представлении их в трехмерной системе координат.

**Заключение.** В качестве метода для защиты и доказательства прав собственности на растровые изображения предложена модификация стеганографического метода LSB, основанная на специальном изменении цветовых значений пикселей. Подробно описан метод стеганогра-

фического осаждения данных, проанализированы некоторые его свойства (например, максимальная емкость контейнера). Разработано программное средство, которое позволяет вносить в изображение авторскую текстовую информацию, а также ее извлекать.

Предложенная модификация метода характеризуется большей эффективностью, поскольку позволяет по сравнению с классическим LSB методом осаждавать больше (на 40–50%) информации в пересчете на один пиксель.

В качестве дальнейшего направления исследований определено изучение оптимизация алгоритма выбора пикселей по цветогеометрическим параметрам, в которые предполагается осаждавать информацию, подтверждающую авторство.

### Литература

1. Bennett K. Linguistic steganography: Survey, analysis, and robustness concerns for hiding information in text. Purdue Univ., CERIAS Tech. Rep., 2004.
2. Конахович Г. Ф., Пузыренко А. Ю. Компьютерная стеганография. Теория и практика. Киев: МК-Пресс, 2006. 288 с.
3. Urbanovich N., Plaskovitsky V. The use of steganographic techniques for protection of intellectual property rights. *New Electrical and Electronic Technologies and their Industrial Implementation*, 2011, P. 147–148.

### References

1. Bennett K. Linguistic steganography: Survey, analysis, and robustness concerns for hiding information in text. Purdue Univ., CERIAS Tech. Rep., 2004.
2. Konakhovich G. F., Puzyrenko A. Yu. *Komp'yuternaya steganografiya. Teoriya i praktika* [Computer steganography. Theory and practice]. Kiev, MK-Press Publ., 2006. 288 p.
3. Urbanovich, N., Plaskovitsky V. The use of steganographic techniques for protection of intellectual property rights. *New Electrical and Electronic Technologies and their Industrial Implementation*, 2011, pp. 147–148.

### Информация об авторах

**Романенко Дмитрий Михайлович** – кандидат технических наук, заведующий кафедрой информатики и веб-дизайна. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: rdm@belstu.by

**Алаа Вахаб** – аспирант. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: alaasouth@gmail.com

### Information about the authors

**Romanenko Dmitri Mikhailovich** – PhD (engineering), Head of the Department of Informatics and Web-design. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: rdm@belstu.by

**Alaa Wahab** – PhD student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alaasouth@gmail.com

Поступила 28.11.2017

УДК 316.776

**Я. Ю. Навроцкий, Н. В. Пацей**

Белорусский государственный технологический университет

**РЕАЛИЗАЦИЯ ПОЛИТИК КЭШИРОВАНИЯ  
В ИНФОРМАЦИОННО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ СЕТЯХ**

Статья посвящена исследованию системы кэширования информационно-ориентированных сетей (ICN). Рассмотрены основные практически пригодные для ICN политики кэширования: Leave Copy Everywhere, Leave Copy Down, Copy With Probability и Probabilistic Cache. Помимо политик кэширования немаловажную роль играет стратегия замещения кэша. Рассмотрены алгоритмы замещения: семантическая замена, замена случайной выборкой и замена Least Recently Used. Построена программная модель ICN сети с возможностью выбора политики кэширования и стратегии замещения из числа перечисленных выше, количества активных пользователей, размера кэша и с другими характеристиками.

Представлены результаты математического моделирования работы модели ICN сети. Оценивались вероятности попадания в кэш в зависимости от количества запросов пользователей и зависимость «протяженности» (процента пройденного пути для получения данных) от количества запросов для реализованных политик кэширования сети. Проведенные исследования показали, что Leave Copy Everywhere и Probabilistic Cache больше всего подходят для организации ICN, обеспечивая вероятность попадания в кэш на 7–12% выше и минимальный путь для извлечения данных на 5–18% меньше по сравнению с остальными.

**Ключевые слова:** ICN, кэширование, алгоритм, сети.

**Ya. Yu. Navrotskiy, N. V. Patsei**

Belarusian State Technological University

**CACHING POLICIES IMPLEMENTATION IN INFORMATION-CENTRIC NETWORKS**

The article is devoted to the investigation of the caching system for information-oriented networks (ICN). The main practical ICN caching policies are considered: Leave Copy Everywhere, Leave Copy Down, Copy With Probability and Probabilistic Cache. In addition to cache policies, the cache replacement strategy plays an important role. A semantic replacement, replacement by random sampling and the replacement of Least Recently Used were considered. A software model of the ICN network was built with a choice of cache policy and substitution strategy from the number listed above, the number of active users, the size of the cache and other characteristics.

The results of mathematical modeling of the ICN network model operation are presented. Estimated the probability of cache hit, depending on the number of user requests and the dependency of the “length” (percentage of the distance traveled to retrieve data) from the number of requests for implemented network caching policies. There are shown that Leave Copy Everywhere and Probabilistic Cache are most suitable for organizing ICN. It provide the probability of caching hit by 7–12% higher and the minimum way to extract data is 5–18% less compared to the rest.

**Key words:** ICN, caching, algorithm, networks.

**Введение.** Информационно-ориентированная сеть (ICN) – это новая концепция сетевой архитектуры, разработанная для замены, текущей широко используемой хост-ориентированной архитектуры. ICN обладает рядом преимуществ в обеспечении безопасности данных и клиентов сети. Так, ICN обеспечивает конфиденциальность происхождения данных и конфиденциальность пользователя, чего в хост-ориентированной архитектуре достичь достаточно сложно [1].

Основная идея информационно-ориентированной сети заключается в том, что данные более важны, чем узел, предоставляющий доступ к ним. Это произошло из-за изменения характера использования Интернета, который сейчас более

ориентирован на контент, чем на то, кто предоставляет доступ к данным. Это, например, совместное использование файлов, социальные сети или поиск агрегированных данных. Первоначально концепция ICN была предложена в рамках проекта Стэнфордского университета TRIAD. В рамках данного проекта предлагалось использовать адресацию на основе имени. С тех пор исследователи предложили несколько архитектур (рис. 1). Так, в 2007 году был разработан проект сетевой архитектуры DONA (UC Berkeley), которая улучшила безопасность и архитектуру, предложенную в проекте TRIAD. Архитектура Publish Subscribe Internet Technology (PURSUIT), является продолжением архитектуры Publish Subscribe Internet Routing Paradigm

(PSIRP), оба из которых финансируются программой EU Framework 7 (FP7). Для реализации данных архитектур предложили стек протокола публикации/подписки (publish/subscribe), который должен в дальнейшем заменить стек протокола IP. Ван Якобсон, научный сотрудник PARC, предложил архитектуру Content-Centric Network (CCN). В настоящее время ведется работа по оптимизации архитектуры CCN, называемой Named-Data-Networks (NDN) [1, 2].

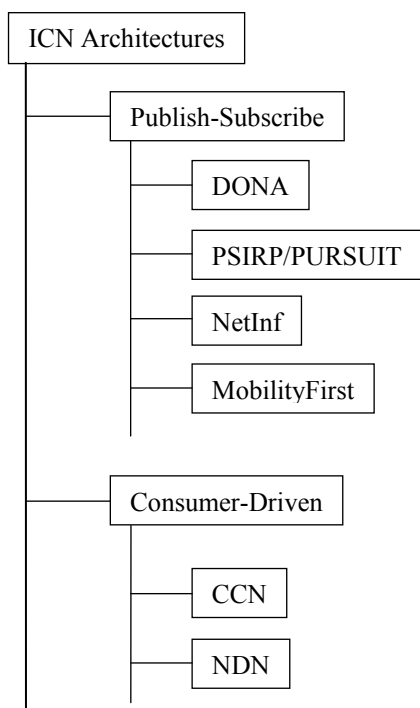


Рис. 1. Архитектуры информационно-ориентированных сетей

Существующие подходы к информационно-ориентированным сетям отличаются с точки зрения реализации, но они имеют одинаковую цель – улучшить производительность и обеспечить более удобный доступ к данным.

ICN уже длительное время остается исследовательским проектом по созданию сетей нового поколения из-за нерешенных проблем, связанных с именованнием и маршрутизацией объектов передачи, безопасностью, мобильностью и кэшированием данных. Таким образом, для полного перехода на ICN нужно решить ряд проблем, связанных с безопасностью и конфиденциальностью, именованнием объектов, мобильностью и кэшированием. В настоящей статье предлагается программная модель ICN и анализируются политики кэширования данных.

**Основная часть.** Для того чтобы увеличить производительность в ICN используется внутрисетевое хранилище данных, эффективность которого зависит от политики кэширования и стратегии замены данных в кэше.

Кэш представляет собой аппаратный или программный компонент, способный хранить данные, которые могут быть запрошены с большей вероятностью. Доступ к данным в кэше осуществляется быстрее, чем выборка исходных данных из более медленной памяти или удаленного источника, однако объем кэша значительно ограничен по сравнению с хранилищем исходных данных. Данные, хранящиеся в кэше, могут быть результатом более раннего вычисления или дублирования данных, хранящихся в другом месте. Чем больше данных можно забрать из кэша, тем быстрее работает система. Обычно размер кэша относительно невелик, чтобы быть экономически выгодным и обеспечить эффективное использование данных.

**Принцип работы кэша.** Кэш состоит из набора записей. Каждая запись хранит данные, которые являются копией данных из удаленного хранилища. Также каждая запись имеет тег, который указывает на оригинал данных из хранилища. Когда пользователь запрашивает данные, система обработки запроса сначала проверяет кэш. Если в кэше найдена запись с тегом запрашиваемых данных, то система вернет данные из кэша. Ситуация, когда запрашиваемые данные найдены в кэше, называется попаданием кэша. Обратная ситуация, когда происходит обращение к кэшу и кэш не содержит запрашиваемых данных, называется промахом кэша. В случае промаха в кэше данные получаются из удаленного хранилища записываются в кэш, и будут возвращены при следующем запросе. При поступлении данных в кэш система обычно удаляет определенные записи, чтобы освободить место для новых данных. Эвристика, используемая для выбора удаляемой записи, называется политикой замещения. Для эффективности кэша используют политики замещения в зависимости от размера хранимого содержимого, а также задержек и пропускной способности как для кэша, так и для удаленного хранилища. Рассмотрим основные политики [3, 4] кэширования, которые будут реализованы в программной модели сети.

**Политика кэширования Leave Copy Everywhere (LCE).** При использовании политики кэширования Leave Copy Everywhere данные будут сохранены в каждом узле на пути от источника данных к пользователю. Пример работы политики кэширования представлен на рис. 2.

Пользователь отправляет запрос, роутер  $R_0$  проверяет свой кэш на наличие запрашиваемых данных, если происходит промах кэша, роутер передает запрос дальше по сети до тех пор, пока не произойдет попадание кэша. Например,

попадание кэша происходит в роутере  $R_2$ . Роутер возвращает запрашиваемые данные и по пути от роутера  $R_2$  к пользователю данные будут сохранены в роутерах  $R_1$  и  $R_0$ . При следующем же запросе данные будут получены из  $R_0$ .

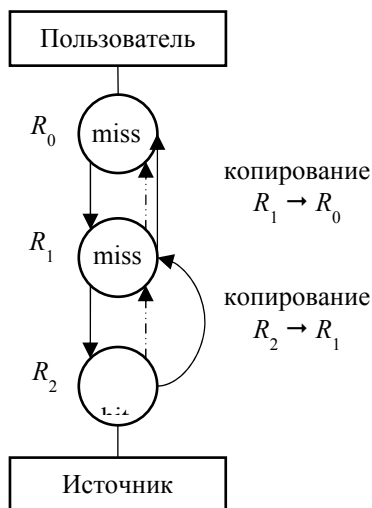


Рис. 2. Схема работы политики кэширования LCE

*Политика кэширования Leave Copy Down (LCD).* При использовании данной политики кэширования данные будут сохранены только в соседнем узле от узла-источника, на пути от источника данных к пользователю. Схема работы политики кэширования представлен на рис. 3.

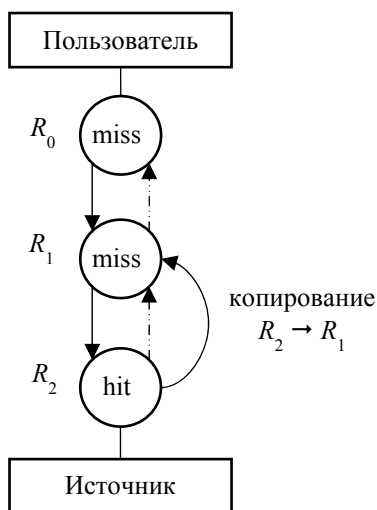


Рис. 3. Схема работы политики кэширования LCD

После попадания кэша в роутер  $R_2$  данные будут сохранены в роутере  $R_1$ , так как данный роутер является прямым соседом  $R_2$ . При последующем запросе данные будут получены из  $R_1$  и сохранены в  $R_0$ . Таким образом, с каждым запросом данные будут кэшироваться ближе к пользователю.

*Политика кэширования Copy with Probability (Prob).* При использовании политики кэширования Copy With Probability данные будут сохраняться в каждом узле на пути от источника к пользователю с заданной вероятностью  $p$ . Схема работы данного алгоритма представлен на рис. 4.

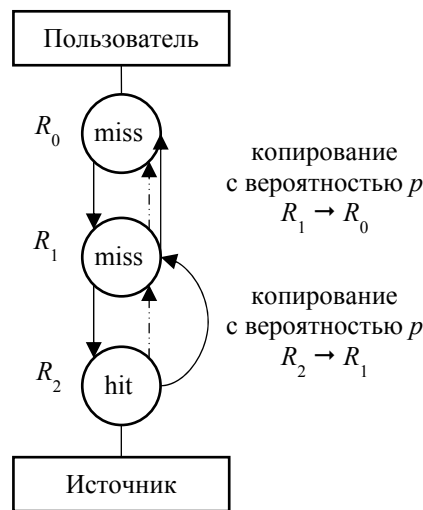


Рис. 4. Схема работы политики кэширования Prob

При заданной вероятности  $p = 1$ , эта политика кэширования будет работать как LCE.

*Политика кэширования Probabilistic Cache (ProbCache).* При Probabilistic Cache данные будут сохранены в каждом узле на пути от источника к пользователю, но с определенной вероятностью  $p$ , которая рассчитывается на основании расстояния между пользователем и источником данных. Вероятность, с которой данные будут кэшированы в узле, определяется отношением количества хопов от источника данных к пользователю к количеству хопов от пользователя к источнику данных.

**Стратегии замещения данных в кэше.** Размер кэша не позволяет хранить данные долго. Основное различие между кэшем и основным хранилищем – время, которое данные могут находиться в памяти. В настоящее время изучены и предложены несколько политик замещения в ICN.

*Семантическая замена.* Семантическая замена – это стратегия замены данных в кэше, основанная на определенном синтаксисе и правилах. В данной стратегии администратор кэша определяет теги, поля, состояния, по которым будет проходить отбор данных на замещение. В семантической замене основным недостатком является строгий набор правил, по которым происходит отбор, так, при добавлении нового типа данных потребуются полная реорганизация установленных правил [3, 5].

*Замена случайной выборкой.* В этом случае замена происходит на основе равномерного распределения. Как правило, именно эту политику замены оспаривают, поскольку иногда замещаются наиболее важные данные.

*Замена Least Recently Used (LRU).* Стратегия LRU является наиболее эффективной политикой замены данных в кэше. При нехватке памяти будут замещены те данные, к которым обращались меньше всего.

*Анализ характеристик политик кэширования.* Эффективность политики кэширования можно оценить по тому, как часто данные берутся из кэша. Так, чем больше данных можно вернуть из кэша, тем эффективнее реализованная политика кэширования [5]. Эффективность политики кэширования определяется по формуле [5, 6]

$$\text{CacheHit} = \frac{\sum_{i=1}^N \text{hits}_i}{\left(\sum_{i=1}^N \text{hits}_i\right) + \left(\sum_{i=1}^N \text{miss}_i\right)}, \quad (1)$$

где  $N$  – это количество узлов в сети;  $\text{hits}_i$  – количество попаданий в кэш в узле  $i$ ;  $\text{miss}_i$  – количество промахов в кэше в узле  $i$ .

Еще одна характеристика – «протяженность». Ее можно рассматривать как процент пройденного пути для получения данных. Чем меньше пройденный путь, тем эффективнее политика кэширования. Протяженность определяется по формуле [5, 6]:

$$\text{Stretch} = \frac{\sum_{i=1}^R \text{hops\_walked}_i}{\sum_{i=1}^R \text{total\_hops}_i}, \quad (2)$$

где  $R$  – это количество запросов;  $\text{hops\_walked}_i$  – количество хопов от пользователя до узла, предоставляющего данные;  $\text{total\_hops}_i$  – количество хопов от пользователя до узла с оригинальными данными [6].

При анализе характеристик политик кэширования должны учитываться такие параметры, как топология сети, количество запросов (пользователей), размер каталога, размер кэша. Поэтому была разработана упрощенная программная модель на языке программирования высокого уровня контент-ориентированной сети с возможностью настройки размеров кэша и каталога, политики кэширования. В качестве стратегии замены кэша была установлена *Least Recently Used (LRU)*, согласно статье [4]. Количество пользователей для ускорения полного цикла моделирования было снижено (до семи активных пользователей). В связи с этим были установлены размеры кэша и размеры каталога 100 и 10 000 соответственно. Остальные параметры варьировались в диапазонах, указанных далее в таблице.

Параметры ICN

Параметр	Значение
Размер каталога, Мб	$10^4$
Размер кэша, Мб	$10^2$
Количество запросов от пользователя, ед.	$10^5, 10^4, 10^3, 10^2$
Количество пользователей, ед.	7
Анализируемые политики кэширования	LCE, LCD, Prob ( $p = 0,25$ ), ProbCache
Политика замены в кэше	LRU

На рис. 5 и 6 представлены соответственно зависимость вероятности попадания в кэш (CacheHit) в зависимости от количества запросов и протяженности (Stretch).

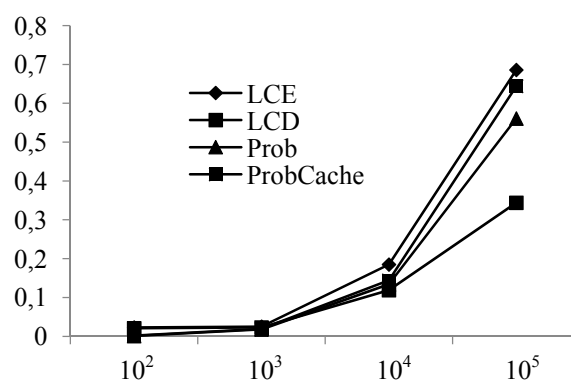


Рис. 5. Вероятности попадания в кэш в зависимости от количества запросов

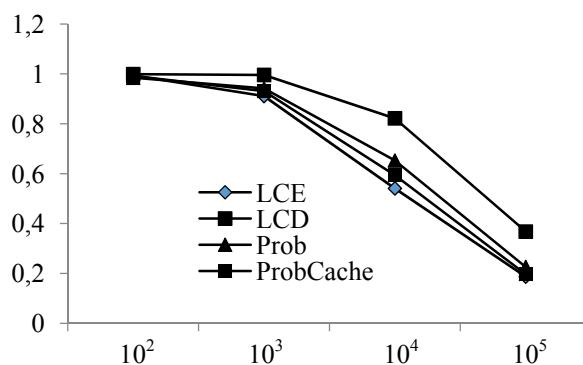


Рис. 6. Зависимость «протяженности» от количества запросов

**Заключение.** В настоящей работе были исследованы новые особенности организации кэша ICN.

Как видно из графиков, реализация политики LCE показывает лучший результат, но в этом случае будет большая избыточность данных, так как данные будут сохраняться на всем пути, и нет гарантии, что они потребуются повторно. Стратегия кэширования ProbCache обес-

печивает почти такой же результат, как и LCE, но обладает рядом преимуществ. Использование данной стратегии кэширования позволит хранить данные в ближайшем узле, сохраняя место в нисходящих узлах для более востребованного контента.

Политика кэширования определяет эффективность работы всей ICN сети, и выбрать одну определенную довольно сложно, требуется учитывать достаточно много факторов, которые пока не учитывались. Исходя из результа-

тов анализа полученных зависимостей, можно сказать, что политики кэширования LCE и ProbCache подходят для организации ICN больше всего, обеспечивая вероятность попадания в кэш на 7–30% выше, а минимальный путь для извлечения данных на 5–25% короче по сравнению с остальными.

Исследование ICN кэширования все еще находится на ранней стадии. Существует много нерешенных как теоретических, так и технических вопросов.

### Литература

1. Xylomenos G., Ververidis C. N., Siris V. A. A Survey of Information-Centric Networking Research // *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. 2014. Vol. 16. P. 204–215.
2. Jaber G., Patsei N. V. Information Centric Networking for web-based content distribution and manipulation // *Proceedings of BSTU. Series 3, Physics and mathematics. Informatics*. 2017. No. 2. P. 88–91.
3. Psaras I., Chai W. K., Pavlou G. Probabilistic in-network caching for information-centric networks // *ACM SIGCOMM Workshop ICN*, 2012. P. 345–351.
4. Zhang G., Li Y., Lin T. Caching in information centric networking: A survey // *Computer Networks*. 2013. Vol. 57, no. 16. P. 3128–3141.
5. Rossini G., Rossi D. A dive into the caching performance of content centric networking // *CAMAD. IEEE*. 2012. P. 105–109.
6. Abdullahi I., Arif S., Hassan S. Survey on caching approaches in information centric networking // *Journal of Network and Computer Applications*. 2015. Vol. 56. P. 48–59.

### References

1. Xylomenos G., Ververidis C. N., Siris V. A. A Survey of Information-Centric Networking Research. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2014, vol. 16, pp. 204–215.
2. Jaber G., Patsei N. V. Information Centric Networking for web-based content distribution and manipulation. *Proceedings of BSTU, series 3, Physics and mathematics. Informatics*, 2017, no. 2, pp. 88–91.
3. Psaras I., Chai W. K., Pavlou G. Probabilistic in-network caching for information-centric networks. *ACM SIGCOMM Workshop ICN*, 2012, pp. 345–351.
4. Zhang G., Li Y., Lin T. Caching in information centric networking: A survey. *Computer Networks*, 2013, vol. 57, no. 16, pp. 3128–3141.
5. Rossini G., Rossi D. A dive into the caching performance of content centric networking. *CAMAD. IEEE*, 2012, pp. 105–109.
6. Abdullahi I., Arif S., Hassan S. Survey on caching approaches in information centric networking. *Journal of Network and Computer Applications*, 2015, vol. 56, pp. 48–59.

### Информация об авторах

**Навроцкий Ярослав Юрьевич** – магистрант. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yaroslav.navrotskiy.yn@gmail.com

**Пацей Наталья Владимировна** – кандидат технических наук, исполняющая обязанности заведующего кафедрой программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: n.patsei@belstu.by

### Information about the authors

**Navrotskiy Yaroslav Yur'yevich** – Master's degree student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yaroslav.navrotskiy.yn@gmail.com

**Patsei Nataliya Vladimirovna** – PhD (Engineering), Acting Head of the Department of Programming engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: n.patsei@belstu.by

Поступила 28.11.2017



УДК 003.26

**Е. А. Блинова, П. П. Урбанович**

Белорусский государственный технологический университет

**СТЕГАНОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД НА ОСНОВЕ ВСТРАИВАНИЯ  
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КООРДИНАТ  
В ИЗОБРАЖЕНИЯ ФОРМАТА SVG**

Приведено формальное описание метода и алгоритма встраивания цифрового водяного знака в файлы векторных изображений формата SVG на основе использования дополнительных параметров в описании путей элементов файла. Рассмотрены стеганографические методы, которые могут быть адаптированы для векторных изображений формата SVG. При этом учитываются форматы файлов (как подмножество формата XML), особенности формирования векторного изображения на основе описания путей элементов, описания текста и цветовых параметров элементов. Рассмотрены возможные ключевые последовательности для описания цифрового водяного знака, предназначенного для защиты права интеллектуальной собственности от незаконного копирования и распространения изображения. Осаждение скрытой информации предусматривает добавление точек, распределенных по элементам файла векторного изображения в соответствии со значениями цифровой ключевой последовательности с учетом минимального увеличения исходного файла векторного изображения. Рассмотрен алгоритм обратного стеганографического преобразования для доказательства подлинности и целостности цифрового векторного изображения. Проанализирована возможность совместного применения различных стеганографических методов с целью формирования многоключевой стеганографической системы, предназначенной для идентификации копии цифрового векторного изображения. Произведена оценка возможности встраивания ключевой последовательности в файл цифрового векторного изображения.

**Ключевые слова:** стеганография, векторное изображение, SVG, авторское право, описание координат.

**E. A. Blinova, P. P. Urbanovich**

Belarusian State Technological University

**A STEGANOGRAPHIC METHOD BASED ON THE EMBEDDING  
OF ADDITIONAL COORDINATES INTO IMAGES OF SVG FORMAT**

A formal description of the algorithm for embedding the digital watermark in vector SVG image files is presented, based on the addition of additional elements to the description of the paths of the file elements. Steganographic methods are considered that are applicable for vector images of SVG format, due to the capabilities of the file format, both subsets of XML, and features of vector image format, such as description of element paths, text description and color parameters of elements. Possible key sequences for describing the digital watermark are considered. The embedding of hidden information involves adding additional points distributed over the elements of the vector image file in accordance with the values of the digital key sequence, taking into account the minimum increase in the original vector image file. An algorithm of reverse steganographic transformation for proving the authenticity and integrity of a digital vector image is considered. The possibility of combined application of various steganographic methods for the purpose of forming a multi-key steganographic system designed to identify a copy of a digital vector image is considered. An estimation of the possibility of embedding this key sequence in a file of a digital vector image was made. The digital watermark is designed to protect the right of intellectual property from illegal copying and distribution.

**Key words:** steganography, vector graphics, SVG, copyright, path description.

**Введение.** Цифровые технологии не только дают возможность хранить и передавать различные типы данных (изображения, тексты, звук и др.), но и являются способом их создания. Но преимущества, которые дают цифровые технологии, легко переносятся на реализацию различных деструктивных действий: незаконное копирование, распространение, использование или даже уничтожение информации.

В связи с этим все более острой является проблема разработки и использования методов и инструментальных средств защиты информации, в том числе защиты прав интеллектуальной собственности [1–3].

Одним из направлений решения проблемы являются технологии цифрового водяного знака.

Особый интерес представляет защита графической информации (файлов графических

форматов), как одного из самых востребованных в настоящее время видов продукции. Особенности защиты является сравнительно большой объем, необходимый для хранения такого рода информации, и как следствие – широкие возможности встраивания (осаждения) различных невидимых меток.

В основном исследовании сосредотачиваются на растровых форматах изображений, таких как bmp, jpg и др., для которых разработано большое число методов защиты, в том числе и стеганографических. Однако в связи с набирающим популярность использованием векторных изображений интерес представляет исследование нового класса стеганографических методов для обеспечения целостности таких изображений и защиты прав интеллектуальной собственности.

В данной работе предлагается новый стеганографический метод для файлов векторных изображений в формате SVG и описывается алгоритм его реализации.

**Основная часть.** Файлы SVG (Scalable Vector Graphics) – векторные графические файлы, предназначенные для описания двумерной векторной и смешанной векторной и растровой графики в формате XML. Они часто используются для создания анимированных изображений торговых марок, инфографики, экспорта различных чертежей, выполненных в САПР для отображения в сторонних приложениях, деталей сайтов – иконок, фонов, кнопок, иногда довольно сложных и детализированных. Особенности данного формата являются небольшой размер файлов, масштабируемость, интеграция с HTML документами, возможность встраивания растровой графики, возможность редактирования в текстовых редакторах и поддержка в большинстве современных браузеров, таких как Google Chrome, Internet Explorer, Mozilla Firefox и Safari. Редактировать SVG файлы можно в большинстве графических редакторов (в данной статье использовались редакторы CorelDraw 10 и Inkscape). В пакет Microsoft Office 2016 была добавлена поддержка прямого импорта таких файлов.

Файл SVG включает в себя три типа объектов: фигуры, изображения и текст, причем для них всех может быть задана анимация. При описании геометрических фигур используется плоская координатная модель, на которой можно задать координатами вершин точки, линии, многоугольники, основные геометрические фигуры и кривые Безье.

Поскольку SVG файлы являются подмножеством файлов формата XML, то к ним могут быть применены классические методы текстовой стеганографии, такие как метод конечных

пробелов и табуляций, а также методы, характерные для файлов разметки, такие как метод замены регистра тегов, методы подмены и перестановки атрибутов. Кроме того, при описании геометрических фигур используется цветовая модель RGB, что позволяет внедрять скрытую информацию в незначительном изменении параметров цвета, используя, например, стеганографический метод LSB.

Отметим также, что особенности формата позволяют использовать и другие методы осаждения скрытой информации. Формат тегов описания геометрических фигур, таких как точки, линии, полиномы и др., позволяет размещать скрытую информацию в добавлении дополнительных элементов в геометрических фигурах.

Рассмотрим текст, продемонстрированный на рис. 1. Он формирует исходные полигоны в файле векторного изображения. На рис. 2 – отображение этого текста в SVG для браузера Google Chrome.

```
viewBox="0 0 21000 29700" xmlns:xlink="http://www.w3.org/1999/xlink">
<g id="Слой_x0020_1">
  <metadata id="CorelCorpID_0Corel-Layer"/>
  <polygon id="Poly-1" stroke="black" stroke-width="19" fill="white"
    points="100 100 1500 100 1500 1500 100 1500">
  </polygon>
  <polygon id="Poly-2" stroke="blue" stroke-width="30" fill="white"
    points="1700 100 3500 100 3500 2500 1700 2500">
  </polygon>
</g>
</svg>
```

Рис. 1. Часть текста файла SVG с исходными полигонами

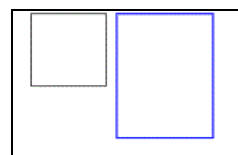


Рис. 2. Файл SVG с исходными полигонами

Рассмотрим также на рис. 3 и 4 соответственно – текст, формирующий полигоны с установленными дополнительными точками, и отображение этого текста в браузере Google Chrome.

```
<g id="Слой_x0020_1">
  <metadata id="0-Layer"/>
  <polygon id="Poly-1" stroke="black" stroke-width="19" fill="white"
    points="100 100 1000 100 1500 100 1500 1500 100 1500">
  </polygon>
  <polygon id="Poly-2" stroke="blue" stroke-width="30" fill="white"
    points="1700 100 2500 100 3500 100 3500 2500 1700 2500">
  </polygon>
</g>
</svg>
```

Рис. 3. Часть текста файла SVG с полигонами с установленными дополнительными точками

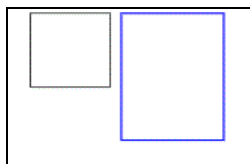


Рис. 4. Файл SVG с полигонами с установленными дополнительными точками

Дополнительные точки, установленные на отрезке, не отображаются. Поэтому можно установить любое количество дополнительных точек на любом отрезке геометрической фигуры и разместить в особенности их расположение авторскую информацию.

Текст в SVG-файлах также может быть описан как текст или конвертирован в кривые. При конвертировании в кривые скрытые данные могут быть осажены в дополнительные точки на кривых, что отображено на рис. 5.

```
<path class="fil0" d="M2115 3600150 -5c3,21 8,37 17,50 9,13 22 11,-23 11,-35 0,-13 -4,-24 -11,-33 -7,-9 -19,-17 -36,-24 -11,-4 -15,-32 -15,-51 0,-20 6,-39 18,-57 11,-18 28,-31 51,-41 22,-9 46 3,-25 -12,-44 -28,-57 -16,-13 -39,-20 -70,-20 -33,0 -56,6 -71,18 23,11 40,25 52,41 11,17 16,36 16,58 0,21 -6,41 -18,60 -12,19 -30 58,-48 -14,-21 -21,-45 -22,-72z"/>
<path id="1" class="fil0" d="M2624 37301-156 -405 58 0 105 294
<path id="2" class="fil0" d="M3075 357110 -47 171 0 0 149c-26, 57,-42 -73,-74 -17,-32 -25,-68 -25,-108 0,-39 8,-76 25,-110 16,- 14,17 24,39 31,671-49 13c-6,-21 -13,-37 -22,-49 -9,-12 -22,-21 - 11,12 -19,25 -25,40 -10,25 -16,52 -16,81 0,37 7,67 19,91 12,24 3 -118 0z"/>
```

Рис. 5. Часть текста файла SVG с преобразованным в кривые текстом

Возможность осажения скрытой информации в SVG-изображениях исследуется в многочисленных работах.

В частности, в работах [4–5] рассматривается механизм внедрения скрытой информации в SVG-изображения, который основан на модификации дробных частей координат вершин геометрических фигур, что аналогично методу LSB для растровых изображений. Недостатком таких методов является хоть и незначительное, но изменение форм элементов изображения, что может сказаться на его точности, особенно это касается импортированных из САПР чертежей. В источнике [6] предлагается устанавливать дополнительные точки в ребрах геометрических фигур таким образом, чтобы для сообщения, состоящего из нулей и единиц, для элемента {0} устанавливать дополнительную точку на согласованном расстоянии, а для элемента {1} – на удвоенном.

Недостатком данного метода является внедрение большого числа точек даже для сравнительно небольшого скрытого сообщения, что

резко увеличивает размер файла изображения, повышая, таким образом, вероятность обнаружения наличия скрытой информации.

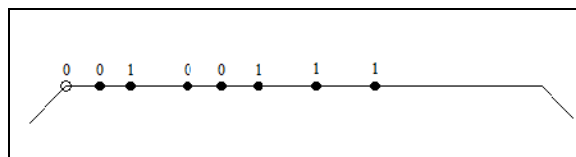


Рис. 6. Алгоритм внедрения дополнительных точек в SVG файл

В статьях [7–8] обосновывается возможность использования внедрения дополнительных вершин в описание геометрических фигур в файле SVG для осажения уникального цифрового водяного знака (Digital Fingerprint) для подтверждения авторства изображения. В качестве такого знака должна быть выбрана числовая последовательность, которая, не раскрывая каких-либо личных сведений об авторе, позволит, тем не менее, однозначно его идентифицировать. Для генерации такой числовой последовательности предлагается использовать цепочку 16-значных числовых последовательностей номеров кредитных/дебетовых карт, выданных автору, плюс 4 знака даты срока действия карты. Такая последовательность позволяет автору точно идентифицировать себя предъявлением своих договоров на банковские карты, однако не раскрывает его персональных данных. При наличии у автора документа нескольких карт предлагается включать их в цепочку цифрового водяного знака и исключать их из цепочки, как только срок действия карты закончился. Таким образом, при извлечении водяного знака можно сделать вывод о периоде, в который данный цифровой водяной знак был внесен. Для предлагаемого стеганографического метода цифровая последовательность может выбираться и по другому принципу. Предъявляемое к ней требование – она должна состоять из конечного числа цифр и служить доказательством авторства.

Алгоритм внедрения дополнительных вершин может быть представлен в виде следующей последовательности шагов.

*Шаг 1.* Подсчет количества геометрических объектов  $N$  в файле изображения.

*Шаг 2.* Подсчет количества вершин геометрических объектов и помещение его в массив:

$$\left(n_i\right)_{i=1}^N. \quad (1)$$

*Шаг 3.* Подсчет общего количества вершин  $M$  в файле:

$$M = \sum_{i=1}^N n_i. \quad (2)$$

*Шаг 4.* Помещение координат вершин в набор массивов  $C$ :

$$\begin{aligned} &((x_{11}, y_{11}), (x_{12}, y_{12}), \dots (x_{1n_1}, y_{1n_1})), \\ &((x_{21}, y_{21}), (x_{22}, y_{22}), \dots (x_{2n_2}, y_{2n_2})), \dots \\ &((x_{N1}, y_{N1}), (x_{N2}, y_{N2}), \dots (x_{Nn_N}, y_{Nn_N})). \end{aligned} \quad (3)$$

*Шаг 5.* Подсчет количества знаков  $L$  в цепочке ключевой цифровой последовательности водяного знака, где  $l_j - j$ -й элемент ключевой последовательности:

$$(l_j)_{j=1}^L. \quad (4)$$

*Шаг 6.* Подсчет отношения  $P$ , где

$$P = \frac{M}{L}. \quad (5)$$

Из данного соотношения можно сделать вывод о возможности наложения цифрового знака на изображение. Хотя из реализации метода следует, что такое встраивание возможно при  $L \leq M$ , но при реальном использовании метода желательно не превышать отношения как минимум вдвое.

*Шаг 7.* Количество дополнительных вершин в полигоне  $P_i, i \in [1; N]$  определяется следующим соотношением:

$$P_i = \frac{n_i L}{M}. \quad (6)$$

При этом  $P_i$  округляются вниз до ближайшего целого, за исключением максимального значения количества дополнительных вершин на полигон  $P_{\max}$ , которое вычисляется следующим образом:

$$P_{\max} = L - \sum_i P_i, \quad (7)$$

где  $i \in [1; N], i \neq i_{\max}$ .

*Шаг 8.* Отношение  $Q_i$  исходного количества вершин  $i$ -го полигона  $n_i$  к количеству встраиваемых вершин  $P_i$  определяется следующим соотношением:

$$Q_i = \frac{n_i}{P_i}. \quad (8)$$

При этом  $Q_i$  округляются вниз до ближайшего целого.

*Шаг 9.* Разбиение цепочки ключевой последовательности на отрезки по два цифровых символа:

$$([a_k, b_k])_{k=1}^L. \quad (9)$$

Причем, если значение очередного цифрового символа равно нулю, то оно заменяется значением 10.

*Шаг 10.* Начиная с первой вершины первого полинома, отступить  $(Q_1 - 1)$  вершин и поставить дополнительную вершину в отношении  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{a_1}{b_1} \quad (10)$$

в точке со следующими координатами:

$$X = \frac{x_t + \lambda x_{t+1}}{1 + \lambda}, \quad (11)$$

$$Y = \frac{y_t + \lambda y_{t+1}}{1 + \lambda}. \quad (12)$$

*Шаг 11.* Повторение шага 10, с использованием в качестве стартовой вершины  $(x_{t+1}, y_{t+1}), t \in [1; P_i]$ , и переходя к следующему полиному, как только количество дополнительных вершин достигнет  $P_i, i \in [1; N]$ , до завершения цепочки символов.

Алгоритм доказательства авторства состоит в следующем.

*Шаг 1.* Подсчет количества геометрических объектов  $N$  в файле изображения.

*Шаг 2.* Подсчет количества вершин  $R$  геометрических объектов  $r_i, i \in [1; N]$ , в файле изображения:

$$R = \sum_{i=1}^N r_i. \quad (13)$$

*Шаг 3.* Подсчет количества знаков  $L$  в цепочке водяного знака.

*Шаг 4.* Подсчет знаков в исходном файле:

$$M = R - L. \quad (14)$$

*Шаг 5.* Помещение координат вершин в набор массивов  $C$ :

$$\begin{aligned} &((x_{11}, y_{11}), (x_{12}, y_{12}), \dots (x_{1r_1}, y_{1r_1})), \\ &((x_{21}, y_{21}), (x_{22}, y_{22}), \dots (x_{2r_2}, y_{2r_2})), \dots \\ &((x_{Nr_1}, y_{Nr_1}), (x_{Nr_2}, y_{Nr_2}), \dots (x_{Nr_{r_N}}, y_{Nr_{r_N}})). \end{aligned} \quad (15)$$

*Шаг 6.* Начиная с первой вершины первого полинома выбрать три последовательных вершины с координатами  $(x_t, y_t), (x_{t+1}, y_{t+1})$  и  $(x_{t+2}, y_{t+2})$ . Если для этих трех вершин выполняется соотношение

$$\begin{aligned} &(x_t - x_{t+1})^2 + (y_t - y_{t+1})^2 + \\ &+ (x_{t+1} - x_{t+2})^2 + (y_{t+1} - y_{t+2})^2 = \\ &= (x_t - x_{t+2})^2 + (y_t - y_{t+2})^2, \end{aligned} \quad (16)$$

то удалить вершину с координатами  $(x_{t+1}, y_{t+1})$  и сформировать массив  $Z$ , состоящий из следующих элементов:

$$Z = \{n_k, t_k, (x_k, y_k)\}, \quad (17)$$

где  $n_k$  – номер текущего полинома,  $t_k$  – номер текущей вершины в данном полиноме,  $(x_k, y_k)$  – координаты удаляемой вершины.

**Шаг 7.** Подсчет количества элементов массива  $Z$ . Если  $Z = L$ , произвести внедрение элементов числовой последовательности в модифицированный файл по описанному ранее алгоритму, используя элементы массива  $Z$  для определения позиции внедрения дополнительных элементов.

**Шаг 8.** При совпадении исходного и полученного файла можно сделать вывод о соответствии цифровой метки исходной цепочки, и, следовательно, доказательстве авторства.

**Заключение.** Описанный метод и алгоритм его реализации позволяют минимизировать увеличение размера исходного файла, что дает возможность использования метода и для передачи скрытых сообщений. Кроме того, наше предложение позволяет распределить внедрен-

ную информацию по всем фигурам, что при некотором искажении исходного изображения (контейнера) не приводит к потере осажденной информации.

Наиболее подходящими, с точки зрения встраивания скрытой информации, являются изображения, содержащие большое число различных геометрических элементов, либо конвертированные из растровых изображений.

Одновременное применение нескольких стеганографических методов позволяет решить две задачи. С одной стороны, различные методы могут быть использованы для передачи конфиденциальной информации нескольким абонентам. С другой стороны, комбинирование методов может помочь контролировать целостность осаждаемой информации, что может быть использовано, например, при решении задачи защиты права интеллектуальной собственности на изображения.

### Литература

1. Text steganography application for protection and transfer of the information / P. P. Urbanovich [et al.] // New Electrical and Electronic Technologies and their Industrial Implementation: proc. of the 6-th Intern. Conf., Zakopane, Poland, 23–26.06.2009 / Lublin University of Technology; Media Patronage “Przegląd Elektrotechniczny”. Lublin. 2009. P. 60–61.
2. Shutko N., Blinova E. The use of aprosh and kerning in text steganography // New Electrical and Electronic Technologies and their Industrial Implementation; proc. of the 9-th Intern. Conf., Zakopane, Poland, 23–26.06.2015 / Lublin University of Technology; Media Patronage “Przegląd Elektrotechniczny”. Lublin. 2015. P. 77.
3. Урбанович П. П. Защита информации методами криптографии, стеганографии и обфускации. Минск: БГТУ, 2016. 220 с.
4. Zhou X., Pan X. Watermark-Based Scheme to Protect Copyright of SVG Data // ICCIAS. 2006. Vol. 2. P. 1199–1202.
5. Topology-Preserving Watermarking of Vector Graphics / S. Huber [et al.] // International Journal of Computational Geometry & Applications. 2014. Vol. 1. P. 61–86.
6. Steganographic Algorithm For Information Hiding Using Scalable Vector Graphics Images / B. Madoš [et al.] // Acta Electrotechnica et Informatica. 2014. Vol. 14, no. 4. P. 42–45.
7. Blinova E., Shutko N. The use of steganographic methods in SVG format graphic files // New Electrical and Electronic Technologies and their Industrial Implementation; proc. of the 10-th Intern. Conf., Zakopane, Poland, 23–26.06.2017 / Lublin University of Technology; Media Patronage “Przegląd Elektrotechniczny”. Lublin. 2017. P. 45.
8. Блинова Е. А. Применение стеганографических методов при хранении картографической информации в экспертной системе прогнозирования последствий пролива нефтепродуктов // Сахаровские чтения 2017 года: Экологические проблемы XXI века: материалы 17-й МНК, 18–19 мая 2017 / Международный государственный экологический институт им. Д. А. Сахарова Белорусского государственного университета. Минск. 2017. С. 223–224.

### References

1. Urbanovich P. P., Chourikov K. V., Rimarev A. V., Urbanovich N. P. Text steganography application for protection and transfer of the information. Proc. of the 6th Intern. Conf. (New Electrical and Electronic Technologies and their Industrial Implementation). Lublin, 2009, pp. 60–61.
2. Shutko N., Blinova E. The use of aprosh and kerning in text steganography. Proc. of the 9th Intern. Conf. (New Electrical and Electronic Technologies and their Industrial Implementation). Lublin, 2015, p. 77.
3. Urbanovich P. P. *Zashchita informatsii metodami kriptografii, steganografii i obfuskatsii* [The protection of information based on the methods by cryptography steganography and obfuscation]. Minsk, BGTU Publ., 2017. 220 p.

4. Zhou X., Pan X. Watermark-Based Scheme to Protect Copyright of SVG Data. *ICCIAS*, 2006, vol. 2, pp. 1199–1202.
5. Huber S., Held M., Kwitt R., Meerwald P. Topology-Preserving Watermarking of Vector Graphics. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 2014, vol. 1, pp. 61–86.
6. Madoš V., Hurtuk J., Čopjak M., Hamaš P., Ennert M. Steganographic Algorithm For Information Hiding Using Scalable Vector Graphics Images. *Acta Electrotechnica et Informatica*, 2014, vol. 14, no. 4, pp. 42–45.
7. Blinova E., Shutko N. The use of steganographic methods in SVG format graphic files. Proc. of the 10th Intern. Conf. (New Electrical and Electronic Technologies and their Industrial Implementation). Lublin, 2015, p. 45.
8. Blinova E. A., Smelov V. V. [An application of the steganographic methods in the storage of cartographic information in the expert forecast system of the consequences of petroleum products spillage]. *Materialy 17 Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii (Sakharovskiye chteniya 2017 "Ekologicheskiye problemy XXI veka")* [Materials of the International Scientific Conference (Sakharov Readings 2017: "Environmental Problems of the XXI century")]. Minsk, 2017, pp. 223–224 (In Russian).

#### Информация об авторах

**Блинова Евгения Александровна** – аспирант, старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [evgenia.blinova@belstu.by](mailto:evgenia.blinova@belstu.by)

**Урбанович Павел Павлович** – доктор технических наук, профессор кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [pav.urb@yandex.by](mailto:pav.urb@yandex.by)

#### Information about the authors

**Blinova Evgeniya Aleksandrovna** – PhD student, Senior Teacher, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [evgenia.blinova@belstu.by](mailto:evgenia.blinova@belstu.by)

**Urbanovich Pavel Pavlovich** – DSc (Engineering), Professor, Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [pav.urb@yandex.by](mailto:pav.urb@yandex.by)

Поступила 27.11.2017

# СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ОБУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ

---

УДК 004.942

**И. Г. Дутова, В. А. Мохов**

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)  
им. М. И. Платова (г. Новочеркасск, Российская Федерация)

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА И МЕТАОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ПОПУЛЯЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ

В работе рассматривается постановка задачи исследования роевых популяционных метаэвристик, их модификация и сравнение со стандартными алгоритмами. Представлены: классификация метаэвристик, их назначение; задачи, для решения которых используют данные алгоритмов; описан метод модификации одного из известных алгоритмов, план проведения экспериментов; предполагаемый результат. В настоящее время информационные технологии очень стремительно развиваются, но существующие алгоритмы оптимизации при решении задач дискретной оптимизации не всегда могут найти точное решение или требуют неоправданно значительного времени работы для поиска эффективного решения. Актуальность исследования возникла в связи с появлением новых верификаций алгоритмов и задач. Исходя из этого появилась необходимость разработки новых методик, направлений, алгоритмов для решения задач указанного класса. Предполагаемым результатом работы являются модификации роевых алгоритмов, которые позволят сократить время поиска решений в задачах большой размерности, и в то же время повысить качество получаемых решений. Предполагается, что предлагаемый подход возможно распространить на весь спектр известных популяционных/роевых метаэвристик.

**Ключевые слова:** метаэвристики, алгоритмы оптимизации, популяционные роевые алгоритмы.

**I. G. Dutova, V. A. Mokhov**

South-Russian State Technical University (Novocherkassk, Russian Federation)

## STATEMENT OF THE SYSTEM ANALYSIS PROBLEM AND METAOPTIMIZATION OF PARAMETERS POPULATION ALGORITHMS

The paper deals with the formulation of the problem of studying the population metaheuristics, their modification and comparison with standard algorithms. Classification of metaheuristics, their purpose; tasks for the solution of which use the data of algorithms; a method of modification of one of the known algorithms, a plan for carrying out experiments; the intended result are presented. At present, information technologies are developing very rapidly, but existing optimization algorithms for solving discrete optimization problems can not always find an exact solution or require unjustifiably significant time to find an effective solution. The relevance of the research arose in connection with the emergence of new verification algorithms and tasks. Proceeding from this, it became necessary to develop new methods, directions, algorithms for solving the problems of this class. The expected result of the work is modification of the roving algorithms, which will reduce the time for finding solutions in large-scale problems, and at the same time improve the quality of the solutions obtained. It is assumed that the proposed approach can be extended to the full range of known population/roving metaheuristics.

**Key words:** metaheuristics, optimization algorithms, swarm population algorithms.

**Введение.** В последнее время интерес ученых стремительно стало вызывать такое направление в исследованиях искусственного интеллекта, как метаэвристики. Эвристика (от греч. «εὕρισκο» означает – отыскивать, открывать) является алгоритмом, который можно назвать творческим: полная правильность его для всех возможных вариантов решения не доказа-

на, но с уверенностью можно сказать, что для большинства случаев решение будет хорошее. С помощью эвристик решаются сложные задачи оптимизации, так как этот инструмент практически всегда позволяет за допустимое время находить субоптимальное решение, пускай и не всегда наилучшее. Слово «метаэвристика» появилось впервые в работах Гловера в 1986 г.

«Мета» означает «за пределами», техника настройки или выбора настраиваемых параметров. То есть, метаэвристики позволяют еще больше расширить возможности эвристик, используя способ комбинирования. Метаэвристики разделяются на популяционные и непопуляционные. В данной работе будут рассматриваться популяционные роевые метаэвристики, основанные на результатах анализа коллективного поведения децентрализованных, самоорганизующихся природных или искусственных систем.

Наиболее распространенное применение метаэвристик – решение задач оптимизации. Математическая модель принятия решения в задаче оптимизации выглядит следующим образом [Андронов А. С. Методы оптимального проектирования. СПб.: ГУАП, 2001. 169 с.]:

$$\min F(x), X \in D. \quad (1.1)$$

Выражение (1.1) является сокращенной записью модели принятия оптимального решения.

Найти значение оптимизируемых параметров  $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , обеспечивающих минимальное значение оптимальности:

$$F(x) = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (1.2)$$

при выполнении ограничений:

$$G_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq 0$$

для

$$i = 1, 2, \dots, m \quad (1.3)$$

$$x_j^- \leq x_j \leq x_j^+, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.4)$$

где  $x_j^-$ ,  $x_j^+$  – нижнее и верхнее предельное значение для  $j$ -го оптимизируемого параметра, характеризующие диапазон возможных значений изменений.

Таким образом, решение задачи сводится к выбору оптимизируемых параметров  $X$ , принадлежащих области  $D$  и обеспечивающих экстремальное значение критерия оптимальности  $F(x)$ . Оптимальным решением задачи является вектор  $X^*$ , удовлетворяющий системе неравенств (1.3)–(1.4) и обеспечивающий минимальное значение критерия оптимальности (1.2).

Наиболее актуальные задачи и предметные области данной темы:

1. Логистика. Решение транспортно-логистических задач.
2. Голосовое управление.
3. Задача классификации.
4. Кластерный анализ.
5. Локальный поиск.
6. Машинный перевод.
7. Распознавание (оптическое распознавание символов, распознавание речи, распознавание рукописного ввода).
8. Игровой искусственный интеллект.

**Основная часть.** Примем во внимание тот факт, что у каждого популяционного алгоритма есть ряд свободных параметров, значения и изменения которых оказывают существенное влияние как на скорость нахождения решений, так и на их качество [1, 2]. В рамках исследования ставится задача динамического поиска оптимального сочетания этих параметров в ходе выполнения популяционного алгоритма (при решении конкретной задачи оптимизации). Поставленную задачу возможно отнести к категории задач метаоптимизации (оптимизация свободных параметров алгоритма, решающего задачу оптимизации).

Рассмотрим такую метаоптимизацию (оптимизацию свободных параметров) на примере классического алгоритма роя частиц. Для наглядности продемонстрируем решение задачи в отношении только одного свободного параметра данного алгоритма – скорости движения частиц (на примере решения задачи поиска экстремума некоторой функции).

Предлагаемая идея метаоптимизации опирается на способ модификации свободных параметров алгоритма на основе дробного исчисления, с использованием ряда допущений. Данный подход был частично описан в работе [3]. Также эта тема затрагивалась в следующих зарубежных публикациях [4, 5].

Рассмотрим процесс преобразования формулы скорости. Данная тема была предложена авторами в публикации [6]. В качестве оптимизационной составляющей классического роевого алгоритма авторы предлагают использовать дробные производные. Существуют различные способы улучшения классического алгоритма роя частиц:

1. Создание оптимизационного метода, который состоит из соединения нескольких алгоритмов роя частиц.
2. Разовая настройка характеристик движения частиц, посредством которого можно влиять на вероятность преждевременной сходимости.
3. Оптимизация с динамическим изменением параметров алгоритма.

Ограничение скорости – один из методов повышения эффективности PSO (Particle Swarm Optimization). Для данного метода используется уравнение изменения скорости. Это уравнение содержит три слагаемых, которые регулируют величину и направление изменения скорости частицы. В начальных исследованиях было замечено, что скорость частиц может резко увеличиваться, что является характерным для частиц далеких от лучших глобальных и локальных позиций. В итоге частицы выходят за интересующую границу поиска, то есть расходятся. Во избежание таких ситуаций вводится ограничение скорости:



$V_{\max i}$  – максимально допустимая скорость в  $i$ -й компоненте. Скорость частицы можно регулировать следующим образом:

$$v_i(t+1) = \begin{cases} v'_i(t+1), & \text{если } v'_i(t+1) < V_{\max i}, \\ V_{\max}, & \text{если } v'_i(t+1) \geq V_{\max i}. \end{cases} \quad (2)$$

данный подход имеет преимущество в том, что сдерживает резкое увеличение скорости. Ограничение скорости влияет не только на шаг изменения, но и на направление движения частицы [7].

В данной модификации PSO можно отметить следующий важный момент.

При удерживании скорости в определенном диапазоне не ограничивается позиция частицы и из этого следует, что изменяется только скорость.

Обратим внимание на скорость частицы, которая выражена формулой

$$v_i \leftarrow \omega v_i + \phi_b(b_i - x_i) + \phi_g(g - x_i). \quad (3)$$

Если рассматривать  $v_i$  как мгновенную скорость неравномерно движущегося тела (в данный момент времени, в данной точке траектории), можно записать:

$$v_{i+1} = \omega v_i + \phi_b(b_i - x_i) + \phi_g(g - x_i). \quad (4)$$

Перепишем формулу для скорости частицы в алгоритме при значении  $\omega = 1$ :

$$v_{i+1} = v_i + \phi_b(b - x_i) + \phi_g(g - x_i). \quad (5)$$

Перенесем  $v_i$  в левую часть, получаем

$$v_{i+1} - v_i = \phi_b(b - x_i) + \phi_g(g - x_i). \quad (6)$$

Левую часть можно интерпретировать как разностную аппроксимацию первой производной, то есть

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_{i+1} - v_i}{T}, \quad (7)$$

где  $T = 1$ .

Подставим (7) в выражение (6)

$$\frac{dv}{dt} = \phi_b(b - x_i) + \phi_g(g - x_i) + (\omega - 1)v. \quad (8)$$

Ввиду нелинейности функции рой может допустить самоорганизацию, которая обеспечивает достижение общих целей роя на основе низкоуровневого взаимодействия. Из этого можно сделать вывод, о том, что формулам (5) и (6) присуще свойство нелокальности.

Нелокальность – это понятие, которое можно определить, как наличие полной информации о всей системе и ее элементах в каждой отдельной точке системы [8].

В правой части (7) член, содержащий  $v_i$ , можно интерпретировать как память частицы о ее предыдущем состоянии.

Построение схемы, учитывающей информацию о предыдущих значениях координат частиц  $x_i$  и скоростей  $v_i$ , может способствовать повышению качества оптимизации целевой функции и улучшению сходимости алгоритма роя частиц.

Однако наличие производной  $\frac{dv}{dt}$  в (8) в

полной мере не позволяет построить нелокальную модель изменения  $v$ , так как не учитывает возможные значения  $v$  в более ранние моменты, чем  $t$ . Выходом из этого состояния является поиск дифференциального оператора, позволяющего учесть приведенное выше обстоятельство.

Вышеперечисленным требованиям удовлетворяет производная нецелого порядка.

Производная нецелого порядка (или производная дробного порядка) является обобщением математического понятия производной.

Производная дробного порядка – это нелокальная характеристика функции: она зависит не только от поведения функции в окрестности рассматриваемой точки  $x$ , но и от принимаемых ею значений на всем интервале  $(a, b)$ . Изменение плотности потока частиц зависит не только от ее значений в окрестности рассматриваемой точки, но и от ее значений в удаленных точках пространства. Понятие дробной производной можно интерпретировать в терминах случайных процессов следующим образом. Случайный процесс, скорость изменения плотности которого зависит от значений плотности в предшествующие моменты времени, принято называть эрдитарным. Такие процессы удобно описывать уравнениями, содержащими дробную производную по времени. Порядок производной по времени определяется величиной  $\alpha$  [9,10].

Для функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[a, b]$ , каждое из выражений:

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \quad (9)$$

$$D_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}, \quad (10)$$

называется дробной производной порядка  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , соответственно левосторонней и правосторонней. Дробные производные в приведенном виде называют производными Римана – Лиувилля.

Альтернативный подход, основанный на определении производной дробного порядка в

терминах предельного перехода, сформулирован на ее определении через формулу Грюнвальда – Летникова [8]:

$$D^\alpha[x(t)] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1) x(t-kh)}{\Gamma(k+1) \Gamma(\alpha-k+1)} \right]. \quad (11)$$

Для численных расчетов можно использовать конечную аппроксимацию (11):

$$D^\alpha[x(t)] \approx \frac{1}{T^\alpha} \sum_{k=0}^r \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1) x(t-kT)}{\Gamma(k+1) \Gamma(\alpha-k+1)}. \quad (12)$$

Запишем формулу (8), учитывая выражение (9)–(12):

$$D^\alpha[v_i] = \varphi_b(b - x_i) + \varphi_g(g - x_i). \quad (13)$$

Формула (13) позволяет наблюдать учет предыдущих значений  $v_i$ ,  $v_{i+1}$  и т. д.

Аппроксимируя (13) с учетом предыдущих значений, принимаемых за один шаг, обозначим шаг – буквой « $r$ » и примем  $r = 4$ , получим:

$$\begin{aligned} v_{i+1} - \alpha v_i - \frac{1}{2} \alpha v_{i-1} - \frac{1}{6} \alpha(1-\alpha)v_{i-2} = \\ = \varphi_b(b - x_i) + \varphi_g(g - x_i), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} v_{i+1} = \alpha v_i + \frac{1}{2} \alpha v_{i-1} + \frac{1}{6} \alpha(1-\alpha)v_{i-2} + \\ + \varphi_b(b - x_i) + \varphi_g(g - x_i). \end{aligned} \quad (15)$$

Для проведения экспериментов предлагается сравнить работу стандартных оптимизационных алгоритмов, немодифицированных и модифицированных популяционных. Алгорит-

мы будут реализованы с визуализацией процесса метаоптимизации (формированием графиков изменения свободных параметров алгоритмов в ходе выполнения) и искомым решением. Сравнение результатов работы алгоритмов предполагается выполнить на примерах известных тестовых функций. По итогам будут представлены графики зависимости лучшего результата от номера итерации. Ниже приведены отдельные фрагменты готового листинга программы, демонстрирующие элементы метаоптимизации параметра скорости для алгоритма роя частиц.

Эволюция параметров происходит следующим образом:

1. На каждой итерации текущая скорость становится предыдущей, то есть учитывается память частицы о ее предыдущем состоянии.

2. Пересчитываем текущую скорость по заданной формуле. Для первых моментов времени предыдущие скорости нулевые.

Результатом работы рассматриваемого алгоритма является нахождение экстремумов функции. Для каждого эксперимента представляется графический результат и отображается кривая движения частиц. В дальнейшем предполагается исследование эффективности работы алгоритма на примерах задач глобальной оптимизации.

**Закключение.** В работе проведена постановка задачи исследования, показан пример, демонстрирующий суть предложенного способа метаоптимизации популяционных алгоритмов. В перспективе предполагается исследование возможности распространения данного подхода применительно к большинству иных известных алгоритмов данного класса.

## Литература

1. Мохов В. А., Бородулина Е. Н. К вопросу о параметрической оптимизации роевых алгоритмов // Изв. ЮФУ. Техн. науки. 2014. № 4 (153). С. 230–234.
2. Кубил В. Н., Мохов В. А. К вопросу о применении роевого интеллекта в решении задач транспортной логистики // Проблемы модернизации инженерного образования в России: сб. науч. статей по проблемам высшей школы / Юж.-Рос. гос. политехн. ун-т (НПИ). Новочеркасск: ЮРГПУ (НПИ). С. 140–144.
3. Particle swarm optimization with fractional-order velocity / Pires E. J. S. [et al.] // Journal on Non-linear Dynamics. 2010. No. 61 (1–2). P. 295–301.
4. Fractional WKB approximation / Rabei E. M. [et al.]. 2009. No. 57 (1–2). P. 171–175.
5. den Bergh F. V., Engelbrecht A. P. A study of particle swarm optimization particle trajectories // Inf. Sci. 2006. No. 176 (8). P. 937–971.
6. Метаоптимизация роя частиц на основе метода дробного исчисления / Дутова И. Г. [и др.] // Современные проблемы науки и образования 2015. № 2–1. URL: <https://www.science-education.ru/article/view?id=20817> (дата обращения: 27.11.2017).
7. Карпенко А. П., Свианадзе З. О. Метод мета-оптимизации поисковых алгоритмов оптимизации // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2011. № 017. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/164546.html> (дата обращения: 27.11.2017).
8. Труды Северо-кавказского филиала Московского технического университета связи и информатики. Ростов н/Д: ПЦ «Университет» СКФ МТУСИ. 2012. 431 с.

9. Карпенко А. П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой: учеб. пособие. М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2014. 446 с.

10. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

### References

1. Mokhov V. A., Borodulina E. N. On the problem of parametric optimization of swarm algorithms. *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskoye nauki* [News SFU. Technical science], 2014, no. 4 (153), pp. 230–234 (In Russian).

2. Kubil V. N., Mokhov V. A. To the question of the use of swarm intelligence in solving the problems of transport logistics. *Problemy modernizatsii inzhenerenogo obrazovaniya v Rossii: sbornik nauchnykh statey po problemam vysshey shkoly* [The problems of modernization of engineering education in Russia: collection of articles on problems of higher education]. Novocherkassk, YuRGPU (NPI) Publ., 2014. Pp. 140–144.

3. Pires E. J. S., Machado J. A. T., Oliveira P. B. M., Cunha J. B., Mendes L. Particle swarm optimization with fractional-order velocity. *Journal on Nonlinear Dynamics*, 2010. no. 61 (1–2), pp. 295–301.

4. Rabei E. M., Altarazi I. M. A., Muslih S. I., Baleanu D. Fractional WKB approximation. *Nonlinear Dynamics*, 2009, no. 57 (1–2), pp. 171–175.

5. den Bergh F. V., Engelbrecht A. P. A study of particle swarm optimization particle trajectories. *Inf. Sci.*, 2006, no. 176 (8), pp. 937–971.

6. Dutova I. G., Mokhov V. A., Kuznetsova A. V., Yesaulov V. A. Metaoptimization of a swarm particles based on the fractional calculus method. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya* [Journal of Contemporary Problems of Science and Education], 2015, no. 2–1. Available at: <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=20817> (accessed 27.11.2017).

7. Karpenko A. P., Sviaadze Z. O. Method metaoptimization algorithms. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N. E. Baumana* [Education and science: scientific publication MSTU N. E. Bauma], 2014. Available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/164546.html> (accessed 27.11.2017).

8. *Trudy Severo-Kavkazskogo filiala Moskovskogo tekhnicheskogo universiteta svyazi i informatiki* [Proceedings of the North Caucasian branch of the Moscow Technical University of Communications and Informatics]. Rostov-on-Don, PTs “Universitet” SKF MTUSI Publ., 2012. 431 p.

9. Karpenko A. P. *Sovremennyye algoritmy optimizatsii. Algoritmy, vdokhnovlennyye prirodoy: uchebnoye posobiye* [Modern search optimization algorithms. Algorithms inspired by nature: a tutorial]. Moscow, Izdatel'stvo MGTU im. N. E. Baumana Publ., 2014. 446 p.

10. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya* [Integrals and fractional manufacturing order and some of their applications]. Minsk, Nauka i Tekhnika Publ., 1987. 688 p.

### Информация об авторах

**Дутова Инна Геннадиевна** – соискатель кафедры программного обеспечения и вычислительной техники. Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М. И. Платова (346428, Ростовская обл., г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132, Российская Федерация). E-mail: lonks@rambler.ru

**Мохов Василий Александрович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения и вычислительной техники, заместитель декана по научной работе. Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М. И. Платова (346428, Ростовская обл., г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132, Российская Федерация). E-mail: mokhov\_v@mail.ru

### Information about the authors

**Dutova Inna Gennadievna** – external doctorate student, the Department of Software and Computer Engineering. The South-Russian State Polytechnic University (NPI) named after M. I. Platova (132, Prosveshcheniya str., 346428, Novocherkassk, Russian Federation). E-mail: lonks@rambler.ru

**Mokhov Vasily Aleksandrovich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software and Computer Engineering, Deputy Dean for Research. The South-Russian State Polytechnic University (NPI) named after M. I. Platov (132, Prosveshcheniya str., 346428, Novocherkassk, Russian Federation). E-mail: mokhov\_v@mail.ru

Поступила 16.11.2017

УДК 004.031.43–044.962

**А. С. Кобайло**

Белорусский государственный технологический университет

**ОСОБЕННОСТИ АРХИТЕКТУРНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ.  
ПАРАЛЛЕЛЬНО-КОНВЕЙЕРНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛИ**

Проведен анализ ограничений применения классических архитектурных решений задачи повышения производительности вычислительных систем – конвейеризации и параллелизма. Рассмотрен один из архитектурных подходов к решению задачи обеспечения режима реального времени для высокопроизводительных вычислительных систем. Предложенный метод основан на сочетании параллелизма и конвейеризации с помощью так называемых параллельно-конвейерных и конвейерно-параллельных вычислителей. Приводятся расчетные соотношения для определения эффективности вычислительных систем, организованных на основе предложенных методов. Рассмотрены примеры использования соответствующих архитектур вычислительных систем для решения конкретных типовых задач, в частности векторных операций.

Применение параллельно-конвейерных вычислителей окажется целесообразным при построении вычислительных систем в условиях отсутствия в распоряжении проектировщика функциональных устройств с временем выполнения операций алгоритма, не превышающим длительности цикла обработки данных, требуемой в соответствии с заданными условиями реального времени.

**Ключевые слова:** производительность, вычислительная система, параллелизм, конвейеризация, реальное время, цикл конвейера, параллельно-конвейерный вычислитель.

**A. S. Kobaylo**

Belarusian State Technological University

**PECULIARITIES OF ARCHITECTURAL ORGANIZATION  
OF COMPUTER SYSTEMS OF REAL TIME.  
PARALLEL-CONVEYOR COMPUTERS**

The analysis of the limitations of the application of classical architectural solutions to the problem of increasing the performance of computational systems – pipelining and concurrency is carried out. One of the architectural approaches to solving the problem of providing real-time mode for high-performance computing systems is considered. The proposed method is based on a combination of parallelism and pipelining with the help of so-called parallel-conveyor and pipeline-parallel calculators. The calculated relationships are used to determine the efficiency of computer systems organized on the basis of the proposed methods. Examples of the use of the corresponding architectures of computer systems for solving specific typical problems, in particular vector operations, are considered.

The use of parallel-conveyor computers will prove to be useful in the construction of computing systems in the absence of a functional device at the designer's disposal with an algorithm execution time that does not exceed the processing cycle time required in accordance with specified real-time conditions.

**Key words:** performance, computational system, parallelism, pipelining, real time, conveyor cycle, parallel-conveyor computer.

**Введение.** Достижение требуемой производительности вычислительных систем (ВС) при ограниченных предельных возможностях элементной базы обеспечивается использованием архитектурных подходов к проектированию, основанных на совмещении операций или фрагментов алгоритма во времени и пространстве – конвейеризации и параллелизма.

Конвейеризация – это такой метод организации вычислительного процесса, в результате применения которого в вычислительной системе обеспечивается совмещение разных дейст-

вий по выполнению базовых функций путем их разбиения на подфункции. При этом традиционно считается, что конвейеризация позволяет повысить производительность ВС по сравнению с последовательной системой примерно в  $r$  раз, т. е. на величину, равную количеству ступеней конвейера (глубине конвейера) [1]. Однако по ряду причин и в первую очередь в силу возможного значительного различия во времени выполнения операций конвейеризируемого алгоритма реальное ускорение конвейерной ВС может оказаться кроме этого

(при необходимости получения данных с частотой, превышающей частоту формирования выходных данных конвейера, в частности при построении некоторых типов систем реального времени (РВ)) скорость конвейера может оказаться недостаточной.

Второй альтернативный подход к развитию вычислительных архитектур с целью увеличения их быстродействия – параллелизм – предусматривает одновременное выполнение независимых операций задачи разными блоками ВС или одновременную обработку разных данных по однотипным алгоритмам. При этом архитектура, имеющая  $N$  параллельных каналов, дает преимущество в быстродействии в сравнении с последовательной обработкой в  $N$  раз.

Применение параллелизма требует одновременного наличия данных для всех параллельных ветвей, что существенно лимитирует область использования данного метода.

Таким образом, два классических подхода к решению задачи построения высокопроизводительных вычислительных систем имеют очевидные ограничения, так как первый из них может не обеспечить выполнения требований по производительности, в том числе по обеспечению РВ, второй может оказаться принципиально непригодным при последовательном поступлении данных.

Вышесказанное обуславливает следующие рекомендации по применению рассмотренных классических методов повышения производительности.

Конвейеризация может быть использована в случаях, когда требуемая скорость обработки потока данных удовлетворяет условию:

$$\Delta t = \tau_{\max},$$

где  $\Delta t$  – требуемый период получения данных на выходе структуры;  $\tau_{\max}$  – время выполнения самой длинной операции в цепочке вычислений техническими средствами, на которые ориентируется разработчик.

Параллелизм целесообразно применять при возможности накопления или одновременного поступления массива входных данных.

Из вышесказанного следует необходимость разработки принципиально новых подходов к решению проблемы обеспечения высокой производительности проектируемых ВС.

**Основная часть.** Принцип реализации конвейера на интегрированном конвейерном вычислителе, основанный на возможности объединения на одном уровне ряда последовательно выполняемых подфункций с учетом их реализации в реальном времени, позволяющий максимально загрузить ступени конвейера и приблизить реальное повышение производитель-

ности конвейера по отношению к последовательной вычислительной системе к теоретической, равной глубине конвейера, рассмотрен в статье [2]. В настоящей работе разберем один из подходов к решению поставленной задачи, основанный на совмещении двух вышеуказанных основополагающих принципов создания высокопроизводительных систем.

В тех случаях, когда для реализации некоторых операций алгоритма отсутствуют функциональные устройства (ФУ) с временем выполнения соответствующих операций не большим, чем требуемый цикл обработки данных, построение архитектур реального времени становится невозможным. Для решения данной проблемы предлагается введение в проектируемые системы параллельно-конвейерных вычислителей (ПКВ).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Параллельно-конвейерным вычислителем называется вычислитель, содержащий  $\rho$  параллельных ступеней, выполняющих последовательность однотипных операций с одинаковым временным сдвигом, равным периоду формирования очередных результатов на выходе ПКВ [3].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Циклом ПКВ называется интервал времени, равный периоду формирования очередных результатов на выходе ПКВ.

Диаграмма работы ПКВ представлена на рис. 1. На данном рисунке  $\mu$  – номер ступени ПКВ,  $\rho$  – количество ступеней (глубина ПКВ).

Рассмотрим основные особенности проектирования вычислительных структур с использованием ПКВ.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** Длительность цикла ПКВ имеет вид

$$\tau_{\text{ц}} = \frac{t_{\text{п}}}{\rho},$$

где  $t_{\text{п}}$  – время выполнения последовательности операций набором простых ФУ;  $\tau_{\text{ц}}$  – цикл ПКВ;  $\rho$  – количество ступеней ПКВ.

Действительно, при циклической организации вычислительного процесса интервал  $t_{\text{п}}$  складывается из  $\rho$  интервалов длительностью  $\tau_{\text{ц}}$ , или  $t_{\text{п}} = \rho \tau_{\text{ц}}$ . Каждый очередной отсчет переменных на выходе, в соответствии с определением ПКВ, формируется со смещением  $\tau_{\text{ц}}$  соответствующей ступенью ПКВ, т. е.:  $\tau = \tau_{\text{ц}} \rightarrow \rho = t_{\text{п}} / \tau_{\text{ц}}$ , из чего следует справедливость утверждения.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.** Применение ПКВ для обработки последовательности операций позволяет ускорить процесс этой обработки в  $\rho$  раз по сравнению с реализацией тех же действий на простых ФУ, реализованных на той же элементной базе, что и ПКВ.

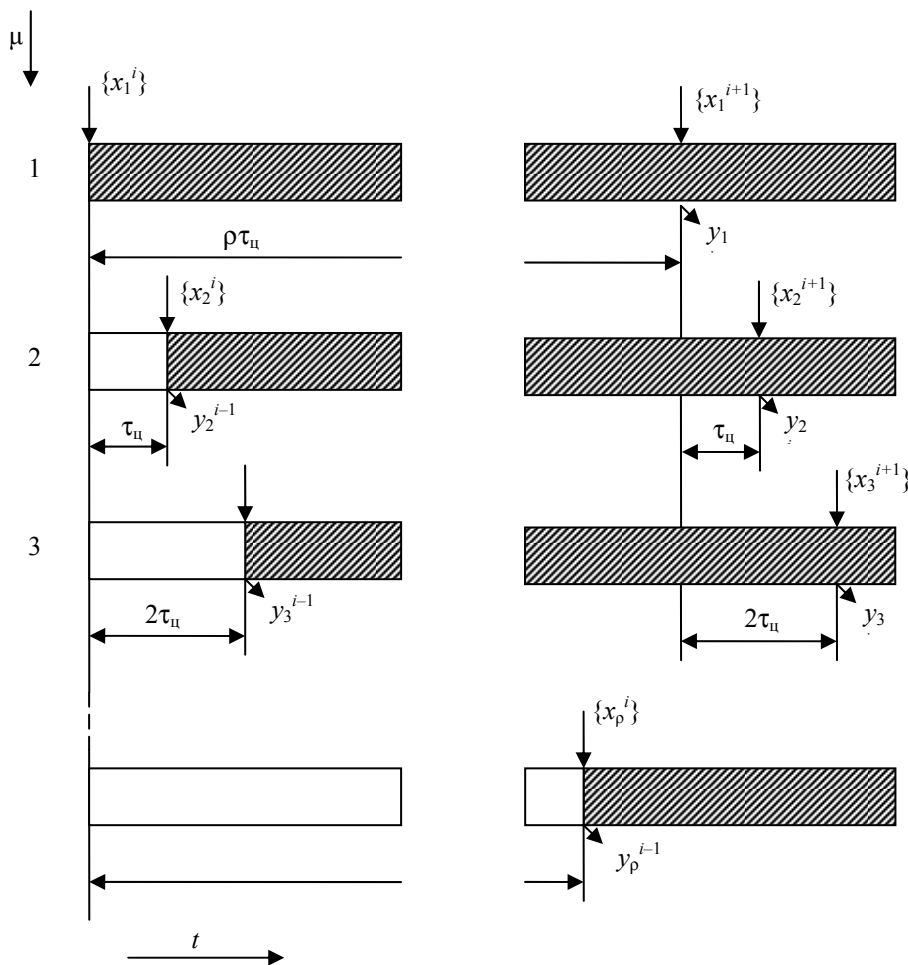


Рис. 1. Диаграмма загрузки ПКВ:  
 $\{x_\mu^i\}, \{y_\mu^i\}, \mu = 1, \dots, \rho$  – входные и выходные соответственно данные  $\mu$ -й ступени  $i$ -го цикла

Действительно, пусть некоторая последовательность действий по обработке данных последовательно простых функциональных устройств выполняется за интервал времени  $t$ . Каждый следующий отсчет выходных данных в этом случае может быть получен через интервал  $t$  после предыдущего. Тогда  $N$ -кратное прохождение цикла выполняется за время  $T_{пр} = Nt$ .

Используя для этой цели ПКВ, реализованный на той же элементной базе, что и простое ФУ, получим на выходе результат также через время  $t$  после начала обработки входных данных, но каждый следующий отсчет данных на выходе вычислителя будет получен через  $\tau_{ц} = t / \rho$  после предыдущего. Тогда время выполнения  $N$  циклов ПКВ будет равно  $T_{пр} = t + (N - 1) \tau_{ц} \approx \tau_{ц} N = tN / \rho$ , или  $T_{пр} / \tau_{ц} = \rho$ , что и требовалось доказать.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 3.** Максимально возможная скорость обработки данных ПКВ определяется быстродействием элементной базы и равняется  $1/\tau_{ц}$  слов в единицу времени, где  $\tau_{ц}$  – такт вычислительной структуры.

Действительно, включение соседней ступени ПКВ возможно через интервал времени, равный  $\tau_{ц}$ , после включения предыдущей, или

$$t_1^{(i+1)} = t_1^{(i)} + \tau^{(i)},$$

где  $t_1^{(i)}$  и  $t_1^{(i+1)}$  – моменты начала обработки данных  $i$ -й и  $(i + 1)$ -й ступенями. Тогда моменты завершения  $t_2^{(i)}$  и  $t_2^{(i+1)}$  обработки данных этими ступенями определяются как

$$t_2^{(i)} = t_1^{(i)} + \tau^{(i)}, t_2^{(i+1)} = t_1^{(i+1)} + \tau^{(i+1)},$$

где  $\tau^{(i)}$  и  $\tau^{(i+1)}$  – время обработки данных  $i$ -й и  $(i + 1)$ -й ступенями соответственно. Тогда минимальный период получения данных на выходе ПКВ имеет вид

$$\tau_{\min} = t_2^{(i+1)} - t_2^{(i)} = \tau_{ц},$$

что и требовалось доказать.

Введение ПКВ, как следует из его определения, предусматривает преобразование графа алгоритма в результате реализации его пути,

отображенного на ПКВ,  $p$  параллельными каналами. Преобразование графа вычислительного алгоритма при отображении его пути на ПКВ осуществляется в два этапа, соответствующие введению собственного ПКВ и его ступеней. На первом этапе происходит преобразование, представленное на рис. 2.

В соответствии с данным преобразованием над каждой из дуг  $e_l$  выходной относительно последовательности вершин  $\{v_i\}$ , отображаемых на ПКВ, выполняется операция добавления вершины  $v'_j$ , отождествляемой с операцией мультиплексирования, при этом дуга  $e_l$  заменяется парой дуг  $e'_l$  и  $e'_{\text{ВЫХ}}$ .

Второй этап преобразования графа вычислительного алгоритма при отображении его путей на ПКВ базируется на следующем положении.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 4.** Расширенный подграф, соответствующий пути графа вычислительного алгоритма  $\{v_1, v_2, \dots, v_j\}$ , отображенного на ПКВ, формируется как пересечение подграфов

$$G = G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_i,$$

где  $G_i, i = \overline{1, I}$  –  $i$ -й подграф, изоморфный подграфу, соответствующему пути  $\{v_1, v_2, \dots, v_j\}$ .

Действительно, согласно определению, реализация пути  $L$  графа вычислительного алгоритма параллельно-конвейерным вычислителем осуществляет обработку данных по  $p$  идентичным параллельным каналам (ступеням), при этом каждому  $\mu$ -му,  $\mu = \overline{1, p}$  каналу соответствует подграф  $G_\mu$ , изоморфный подграфу пути  $L$ . Каждый из этих подграфов получает данные от общей вершины  $v'_{\text{ВХ}}$ , которая является образом вершины  $v_{\text{ВХ}}$  графа алгоритма;  $v_{\text{ВХ}}: \exists e_{\text{ВХ}} = (v_{\text{ВХ}}, v_1)$ . Тогда  $\forall i, \mu: v_{i,\mu}$  является образом  $v'_i, e'_{i,\mu}$  – образом  $e'_i$ . Кроме того,  $t_{i,\mu}^k = t_{i,\mu-1}^k + \tau_{\text{ц}}$  в соответствии с определением ПКВ, где  $t_{i,\mu-1}^k, t_{i,\mu}^k$  – время окончания выполнения операций  $k$ -го цикла вершинами  $v'_{i,\mu-1}$  и  $v'_{i,\mu}$  соответственно. Тогда над вершинами  $v'_{i,\mu}$  может быть выполнена операция простого элементарного гомоморфизма, таким образом, граф ПКВ получается пересечением подграфов путей, изоморфных подграфу, полученному на первом этапе преобразования, с общей конечной вершиной каждого из подпутей (рис. 3).

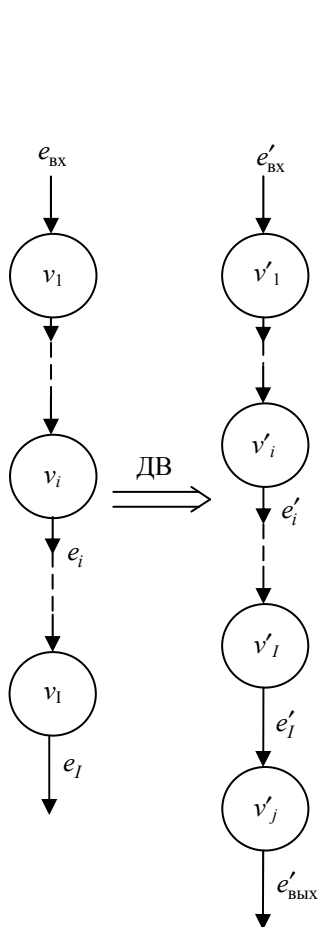


Рис. 2. Первый этап преобразования подграфа при отображении пути на ПКВ: ДВ – добавление вершины

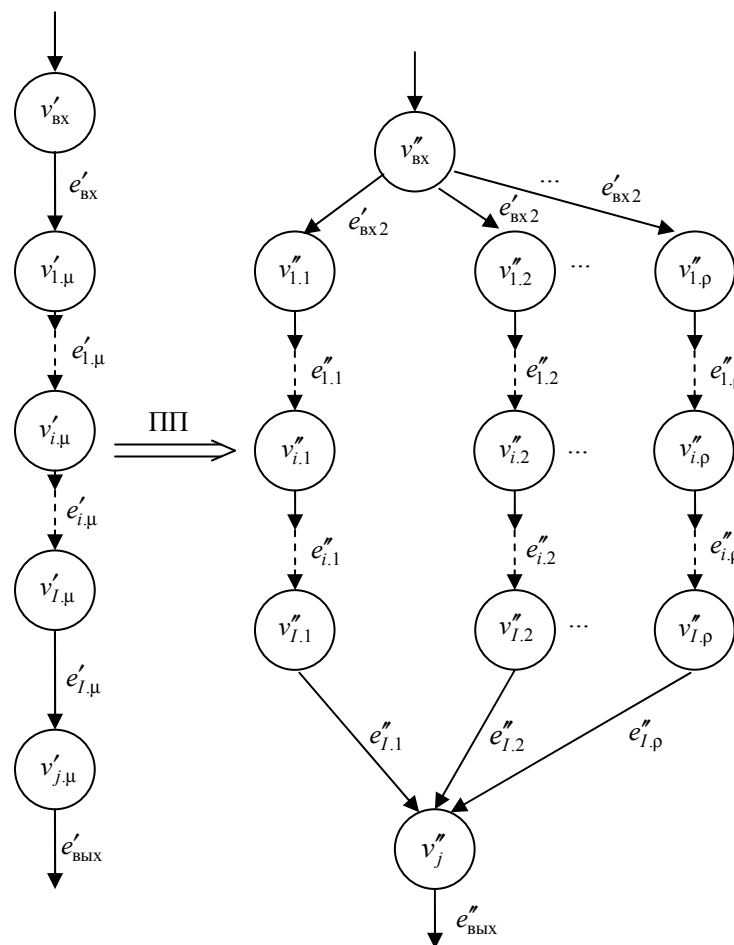


Рис. 3. Второй этап преобразования подграфа при отображении пути на ПКВ: ПП – пересечение подграфов

СЛЕДСТВИЕ. Скорость обработки данных с помощью ПКВ определяется скоростью мультиплексора

$$f = \frac{1}{\tau_{зп}(Mx)} k,$$

где  $f$  – частота поступления данных на вход мультиплексора,  $\tau_{зп}(Mx)$  – время задержки распространения мультиплексора,  $k = 2-4$ .

**Заключение.** Предложенный принцип параллельно-конвейерной обработки данных позволяет:

- организовать параллельную обработку данных при их последовательном поступлении на вход системы в условиях отсутствия возможности их накопления;

- достигнуть быстродействия обработки потока данных, определяемого только частотой переключения элементной базы (например, так-

товая частота для микросхем линии Хеоп составляет 3,3 ГГц);

- увеличить быстродействие по сравнению с последовательной системой в число раз, равное количеству параллельных каналов, и по сравнению с конвейерной системой – пропорционально отношению длительности цикла конвейера к длительности цикла ПКВ.

Особенно эффективным окажется применение параллельно-конвейерной обработки информации в автоматизированных системах управления производственным оборудованием и технологическими процессами, системах автоматизации научного эксперимента, цифровой обработки сигналов, при решении задач линейной алгебры.

Особенности применения ПКВ для решения ряда типовых задач требуют особого рассмотрения.

### Литература

1. Коуги П. Архитектура конвейерных ЭВМ. М.: Радио и связь, 1985. 567 с.
2. Кобайло А. С. Особенности архитектурной организации вычислительных систем реального времени. Интегрированные конвейерные вычислители // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 129–132.
3. Кобайло А. С. Основы теории синтеза вычислительных структур реального времени. Минск: БГУИР, 2001. 202 с.
4. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. СПб.: Издательство БХВ-Петербург, 2002. 609 с.

### References

1. Kougi P. *Arkhitektura konveyyernykh EVM* [The architecture of conveyor computers]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1985. 567 p.
2. Kobaylo A. S. The peculiarities of architectural organization of computer systems of real time. Integrated conveyor calculators. *Trudy BGTU* [Processings of BSTU], series 3, Physics and mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 129–132 (In Russian).
3. Kobaylo A. S. *Osnovy teorii sinteza vychislitel'nykh struktur real'nogo vremeni* [Fundamentals of the theory of synthesis of computational structures of real time]. Minsk, BGUIR Publ., 2001. 202 p.
4. Voevodin V. V., Voevodin Vl. V. *Parallel'nye vychisleniya* [Parallel computing]. St. Petersburg, Izdatel'stvo BKhV-Peterburg Publ., 2002. 609 p.

### Информация об авторе

**Кобайло Александр Серафимович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: kas151153@gmail.com

### Information about the author

**Kobaylo Alexandr Serafimovich** – PhD (Engineering), Assistant Professor, Associate Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kas151153@gmail.com

Поступила 28.11.2017



УДК 004.031.43–044.962

**А. С. Кобайло**

Белорусский государственный технологический университет

**ПРИМЕНЕНИЕ ГИБРИДНЫХ МЕТОДОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ**

Рассмотрены примеры использования гибридных методов организации вычислительного процесса, основанных на сочетании классических подходов к построению высокопроизводительных систем – конвейеризации и параллелизма. Проведены исследования эффективности применения параллельно-конвейерных вычислителей для решения задач, сводящихся к векторным операциям, по различным показателям, в первую очередь таким, как производительность и технико-экономические характеристики. Предложен новый архитектурный подход к решению задачи обеспечения режима реального времени для высокопроизводительных вычислительных систем, также основанный на гибридном методе проектирования вычислительных систем, сочетающем конвейеризацию и параллелизм – организация вычислительного процесса с помощью так называемых конвейерно-параллельных вычислителей. Приводятся расчетные соотношения для определения эффективности вычислительных систем, организованных на основе предложенного метода.

Конвейерно-параллельные вычислители могут быть использованы при обработке массивов данных большой размерности по единому алгоритму, если параллельная вычислительная система не позволяет обеспечить реальный масштаб времени или требуемую скорость обработки данных.

**Ключевые слова:** производительность, вычислительная система, параллелизм, конвейеризация, реальное время, цикл конвейера, параллельно-конвейерный вычислитель, конвейерно-параллельный вычислитель.

**A. S. Kobaylo**

Belarusian State Technological University

**THE USE OF HYBRID DESIGN METHODS  
OF COMPUTING REAL-TIME SYSTEMS**

The examples of application of hybrid methods of organization of computing process based on a combination of classical approaches to building high-performance systems – pipelining and concurrency are considered. Study of the effectiveness of the use of parallel-conveyor calculators for solving problems that can be reduced to vector operations, using various indicators, especially such as productivity and techno-economic characteristics is conducted. The proposed new architectural approach to solving the problem of providing real-time high-performance computing systems, also based on a hybrid method of designing computing systems that combines pipelining and parallelism – organization of the computing process with the aid of the so-called conveyor-parallel calculators. The calculated ratios to determine the effectiveness of computing systems, organized on the basis of the proposed method are given/presented.

The conveyor-parallel solvers can be used to process data sets of large dimension by a single algorithm, parallel computing if the system does not allow for real-time or the desired processing speed.

**Key words:** performance, computational system, parallelism, pipelining, real time, conveyor cycle, parallel-pipelined computer, a pipelined-parallel evaluator.

**Введение.** Построение систем реального времени, как правило, связано с решением задачи проектирования высокопроизводительных систем. В случаях когда не только совершенствование технологических основ элементной базы для высокопроизводительных вычислительных систем (ВС), но и применение классических архитектурных методов создания таких систем (параллелизм и конвейеризация), а также предложенная автором настоящей работы методика проектирования ВС на основе интегральных конвейерных вычислителей [1]) не позволяют достичь требуемого быстродействия

системы, в частности не обеспечивают реальный масштаб времени, целесообразно использовать гибридные методы проектирования ВС, основанные на сочетании двух указанных архитектурных подходов к повышению производительности вычислительных систем.

**Основная часть.** Одним из методов, основанных на совмещении конвейеризации [2] и параллелизма [3], является метод параллельно-конвейерных вычислений, реализуемый на так называемых параллельно-конвейерных вычислителях (ПКВ). Метод предполагает организацию вычислительного процесса по нескольким

параллельным каналам, причем начало выполнения очередной цепочки вычислений каждым из каналов задерживается относительно начала вычислений на постоянную величину, называемую циклом конвейера, в качестве которого может выступать такт вычислительной структуры, равный периоду следования тактовых импульсов системы [4]. Рассмотрим примеры использования ПКВ для решения некоторых типовых задач.

Одним из классов таких задач являются задачи, которые сводятся к векторным операциям, например, нахождение вектора  $Y_i$  как произведение матрицы  $A_{kj}$  на вектор  $\bar{X}_j$ :

$$y_i = \sum_{j=1}^J a_{ij} \cdot x_j.$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** ПКВ для выполнения векторных операций позволяет повысить производительность по сравнению с конвейеризацией в  $K_k = \tau(*) / \lceil \tau(+) + \tau(Mx) \rceil$  раз, где  $\tau(*)$ ,  $\tau(+)$  и  $\tau(Mx)$  – время умножения, сложения и мультиплексирования соответственно,  $\lceil \cdot \rceil$  – операция взятия целого числа, большего чем  $(\cdot)$ , при реализации ПКВ и КВ на одной и той же элементной базе при одновременном повышении параметра  $\xi$  в  $\rho$  раз, где  $\xi$  – технический параметр канала, реализующего операцию  $Ax + B$ .

Период получения выходных данных для ПКВ и КВ равняется длительности циклов этих вычислителей.

Для конвейера

$$\tau_{ц}^k = \max \{ \tau_{вв}, \tau(\times), \tau(+), \tau_{выв} \},$$

где  $\tau_{вв}$ ,  $\tau(\times)$ ,  $\tau(+)$ ,  $\tau_{выв}$  – длительность операций ввода, умножения, сложения и вывода данных соответственно. Для цикла ПКВ имеем

$$\tau_{ц}^{пкв} \leq \frac{1}{f} = \tau_{зр}(Mx)k,$$

где  $f$  – частота генератора тактовых импульсов системы,  $\tau_{зр}(Mx)$  – время задержки распространения мультиплексора,  $k = 2-4$ .

С выхода ПКВ данные поступают на вход накапливающего сумматора с периодом, равным времени реализации операции сложения  $\tau(+)$ .

Тогда повышение производительности при использовании ПКВ по сравнению с КВ определяется следующим образом:

$$K'_k = \frac{\tau_{ц}^k}{\tau_{ц}^{пкв} + \tau(+)} = \left\lceil \frac{\tau(*)}{\tau_{зр}(Mx) + \tau(+)} \right\rceil,$$

$$\tau_{зр}(Mx)k = \tau(Mx).$$

Диаграмма загрузки ПКВ для рассмотренного случая представлена на рис. 1.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.** Применение ПКВ для реализации векторных операций позволяет по сравнению с распараллеливанием получить экономический эффект благодаря снижению параметров  $\xi$  (стоимость, потребляемая мощность, масса, габариты и т. п.) в  $K_p$  раз:

$$K_p = \frac{n \cdot \xi_1 + (n-1) \cdot \xi_2 + 2n \cdot \xi_3}{n \cdot \xi_1 + \xi_2 + \xi_4},$$

где  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  – технический или экономический параметр из числа вышеперечисленных, по которому осуществляется оценка эффективности, для операций умножения, сложения, хранения данных и мультиплексирования соответственно,  $n$  – размерность вектора при повышении производительности в  $K'$  раз:

$$K' = \frac{\tau(*) + n \cdot (\tau(+) + \tau(Mx))}{\tau_{чт} + \tau(*) + \lceil \log_2 n \rceil \cdot \tau(+) + \tau_{зап}},$$

где  $\tau_{чт}$  и  $\tau_{зап}$  – цикл чтения и записи соответственно.

Параллельный вычислитель для реализации операции  $\sum_{j=1}^J a_{ij} \cdot x_j$  содержит  $J$  умножителей,  $J-1$  сумматор, по  $J$  входных и выходных регистров. ПКВ –  $J$  умножителей, один сумматор и один мультиплексор, из чего следует справедливость утверждения.

Выполнение операций по вычислению вектора, как следует из диаграммы на рис. 1, требует лимита времени

$$\tau(\times) + n \cdot \tau_{ц} = \tau(\times) + \tau(Mx).$$

При параллельном вычислении требуется один ярус, вершинам которого соответствует операция умножения,  $\lceil \log_2 n \rceil$  ярусов, на которых выполняется суммирование, два яруса обращения к регистрам (чтение и запись), из чего следует справедливость утверждения.

Заметим, что по причине  $\tau(\cdot) \gg \tau(+)$  до определенной степени  $J$  снижение производительности от использования ПКВ в рассмотренном случае является незначительным.

В приведенных рассуждениях считалось, что  $\rho = J = N$ , где  $N$  – количество каналов параллельного вычислителя.

Еще одним примером целесообразности использования ПКВ является случай, когда параметры  $\xi$  или один из параметров  $\{\xi\}$  ФУ с разным быстродействием существенно отличаются.

Тогда последовательная цепь операций, реализованная быстродействующими ФУ, может быть отображена на ПКВ; эффективность замены можно оценить выражением

$$K_1 = \frac{\xi_S}{\rho \cdot \xi_{пкв} + \xi_{Mx}},$$

где  $\xi_s$ ,  $\xi_{ПКВ}$ ,  $\xi_{Mx}$  – контролируемый технический параметр цепи быстродействующих элементов, канала ПКВ и мультиплексора соответственно.

В том случае когда необходима обработка массива данных размерностью по единому алгоритму (например, вычисление вектора), и нет возможности создать или использовать параллельный  $n$ -канальный вычислитель, может быть использован *конвейерно-параллельный вычислитель* (КПВ) [5].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Конвейерно-параллельным вычислителем будем называть вычислитель, содержащий  $m$  идентичных каналов, вычислительный процесс каждого из которых реализован по конвейерному принципу параллельной ВС (ПВС).

**УТВЕРЖДЕНИЕ 3.** Замена параллельной вычислительной системы (ПВС) на КПВ с таким же числом каналов, каждый из которых состоит из  $\rho$  ступеней, позволяет увеличить скорость обработки данных в  $\rho$  раз.

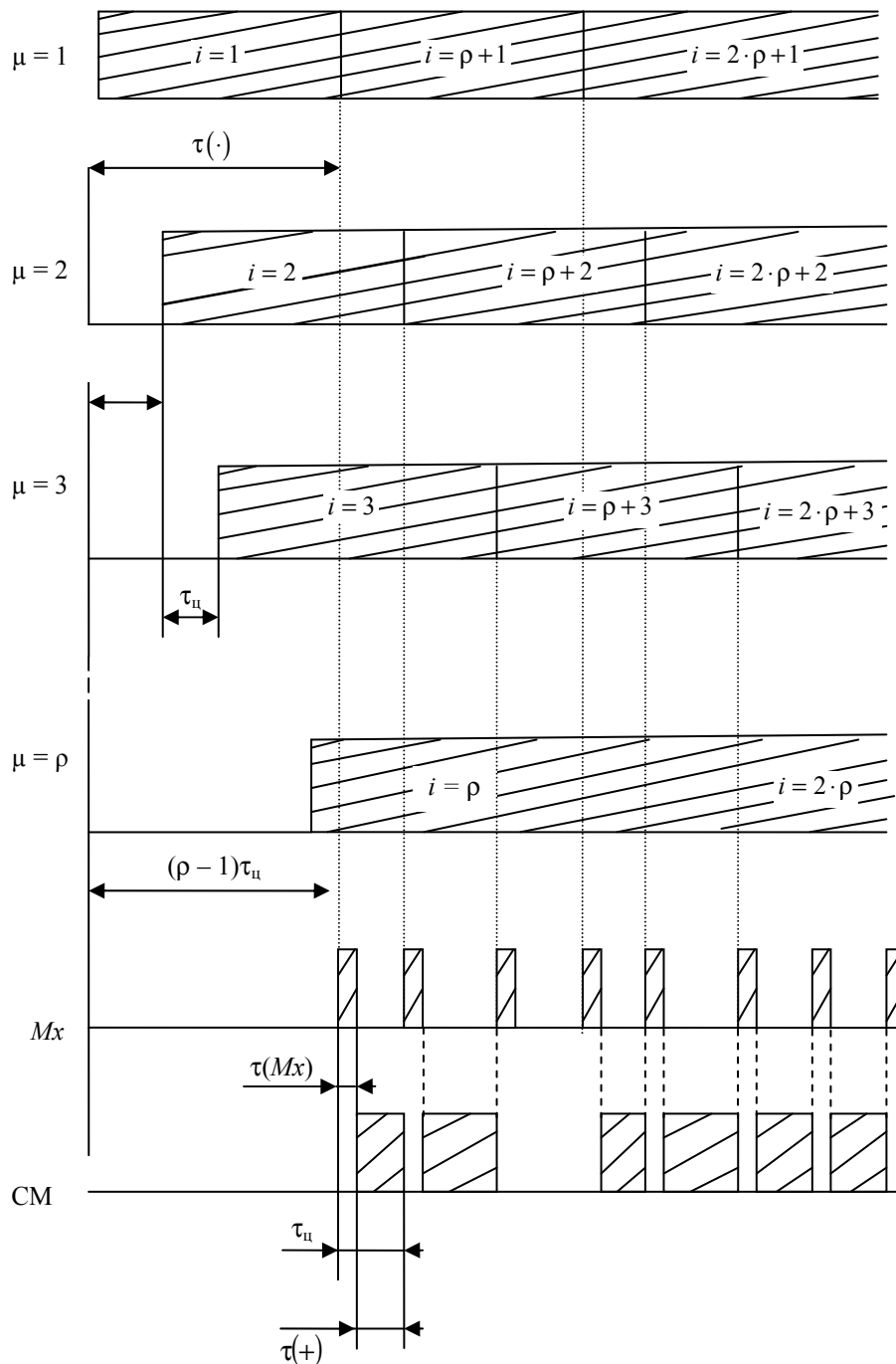


Рис. 1. Диаграмма загрузки функциональных устройств ПКВ при выполнении векторных операций:  
 Mx – мультиплексор; Cm – сумматор

Действительно, пусть время выполнения одним каналом ПВС работы по требуемой обработке данных равна  $\tau$ . Тогда время реализации алгоритма обработки массива размерностью  $n$   $m$ -канальной ПВС

$$T_p = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \cdot \tau.$$

Реализация вычислительного процесса таким же каналом, но по конвейерному принципу, при  $\rho$  ступенях предполагает наличие цикла длительностью  $\tau / \rho$ , тогда тот же алгоритм реализуется за время

$$T_{\text{кпв}} = \tau + \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \cdot \frac{\tau}{\rho} \approx \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \cdot \frac{\tau}{\rho},$$

( $\tau \ll T_{\text{кпв}}$ ), откуда коэффициент ускорения

$$T_{\text{пкв}} = \frac{T_{\text{п}}}{T_{\text{кпв}}}.$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 4.** Организация циклично-го вычислительного процесса на базе КПВ с  $m$  каналами и циклом  $\tau_{\text{ц}}$  позволяет ускорить реализацию алгоритма по сравнению с КВ с таким же циклом в  $m$  раз.

Реализация алгоритма по обработке массива размерностью  $m$  конвейерным вычислителем с циклом  $\tau_{\text{ц}}$  осуществится за время:

$$K' = \frac{\tau(*) + n(\tau(+) + \tau(Mx))}{\tau_{\text{цт}} + \tau(*) + \lceil \log_2 n \rceil \cdot \tau(+) + \tau_{\text{зап}}},$$

$$T_{\text{к}} = \tau_{\text{к}} \cdot (n - 1) + \tau_{\text{п}},$$

где  $\tau_{\text{п}}$  – длительность одного цикла обработки данных последовательной цепью КВ.

Тот же алгоритм выполняется КПВ с  $m$  каналами и таким же циклом и количеством ступеней канала за время:

$$T_{\text{кпв}} = \left( \frac{n}{m} - 1 \right) \cdot \tau_{\text{ц}} + \tau_{\text{п}}.$$

Тогда ускорение будет иметь вид

$$K_{\text{кпв}} = \frac{T_{\text{к}}}{T_{\text{кпв}}} \approx m$$

вследствие того, что  $\tau_{\text{п}} \ll T_{\text{к}}$  и  $\tau \ll T_{\text{кпв}}$ .

В качестве еще одного гибридного метода проектирования высокопроизводительных систем может быть использован метод, основанный на сочетании двух уровней конвейеризации – конвейеризации с использованием конвейерных функциональных устройств (конвейеризация первого уровня) в составе конвейерных вычислителей (КВ), обеспечивающих конвейеризацию второго уровня.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Конвейерно-конвейерным вычислителем (ККВ) называется КВ, использующий в своем составе конвейерные функциональные устройства.

Оценим эффективность такого подхода на примере операции умножения матрицы на вектор.

При конвейерной реализации данной операции цикл конвейера будет равняться длительности самой длинной операции умножения:

$$\tau_{\text{ц}}^{(\text{кв})} = \tau(\times) = m(\tau(+) + \tau(\leftarrow)),$$

где  $\tau(\times)$ ,  $\tau(+)$ ,  $\tau(\leftarrow)$  – длительности операций умножения, сложения и сдвига соответственно,  $m$  – разрядность операндов.

Конвейерный умножитель формирует очередной результат за время, равное времени сложения независимо от разрядности [2]:  $\tau_{\text{ц}}^{(\text{кфу})} = \tau(+).$  Здесь  $\tau_{\text{ц}}^{(\text{кфу})}$  – цикл конвейерного ФУ. Таким образом, ускорение ККВ по отношению к КВ будет определяться как  $\tau_{\text{ц}}^{(\text{кв})} / \tau_{\text{ц}}^{(\text{кфу})} = 2m.$

**Заключение.** Использование параллельно-конвейерных вычислителей предоставляет возможность при выполнении векторных операций получить выигрыш по совокупности технических параметров по сравнению с параллелизмом практически при том же быстродействии.

Предложенный принцип организации вычислительных архитектур на базе конвейерно-параллельных вычислителей (см. определение 1) дает возможность увеличить быстродействие по сравнению с параллельными вычислителями в  $\rho$  раз при тех же аппаратных затратах (утверждение 3), по сравнению с конвейером – в  $m$  раз (утверждение 4), где  $\rho$  – количество ступеней конвейерной цепи КПВ,  $m$  – количество каналов КПВ.

### Литература

1. Кобайло А. С. Особенности архитектурной организации вычислительных систем реального времени. Интегрированные конвейерные вычислители // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 129–132.
2. Коуги П. Архитектура конвейерных ЭВМ. М.: Радио и связь, 1985. 567 с.
3. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. СПб.: Издательство БХВ-Петербург, 2002. 609 с.

4. Кобайло А. С. Особенности архитектурной организации вычислительных систем реального времени. Параллельно-конвейерные вычислители // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 1. С. 120–124.

### References

1. Kobaylo A. S. The peculiarities of architectural organization of computer systems of real time. Integrated conveyor calculators. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 129–132 (In Russian).

2. Kougi P. *Arkhitektura konveyyernykh EVM* [The architecture of conveyor computers]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1985. 567 p.

3. Voevodin V. V., Voevodin V. V. *Parallel'nyye vychisleniya* [Parallel computing]. St. Petersburg, Izdatel'stvo BKhV-Peterburg Publ., 2002. 609 p.

4. Kobaylo A. S. The peculiarities of architectural organization of computer systems of real time. Integrated conveyor calculators. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and mathematics. Informatics, 2018, no. 1, pp. 120–124 (In Russian).

### Информация об авторе

**Кобайло Александр Серафимович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: kas151153@gmail.com

### Information about the author

**Kobaylo Alexandr Serafimovich** – PhD (Engineering), Assistant Professor, Associate Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kas151153@gmail.com

*Поступила 28.11.2017*

# АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

---

УДК 665.7:502.51:504.5

**Н. Н. Буснюк, А. В. Бурмакова, В. В. Смелов**

Белорусский государственный технологический университет

## **ЭВРИСТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФОРМЫ ПЯТНА ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ НЕФТЕПРОДУКТОМ**

Статья посвящена описанию эвристического алгоритма расчета формы наземного пятна вследствие аварийного пролива нефтепродуктов из неподвижного резервуара. Исходными данными для вычисления формы наземного пятна загрязнения являются координаты и высота над уровнем моря центра пролива нефтепродукта и точек окрестности, а также количество пролитого нефтепродукта, выраженное через величину занимаемой площади. Фактор проникновения жидкости в грунт не учитывается, поэтому площадь наземного пятна в модели считается величиной постоянной и может менять лишь форму. Все вычисления в математической модели производятся в прямоугольной системе координат. Для аппроксимации точек границы поверхности через числовые характеристики (координаты, высоту) известных точек применяется линейная модель. Результатом моделирования является многоугольник, соединив вершины которого плавной линией, получим предполагаемую форму пятна. Для получения многоугольника используется окружность заданной площади с центром в точке пролива. По известным точкам окрестности аппроксимируются точки на окружности. Затем по найденным точкам окружности аппроксимируются дополнительные точки на окружности с целью получения многоугольника с количеством вершин, достаточным для построения плавной границы искомого пятна. Для аппроксимации вершин многоугольника по найденным точкам окружности используется третья числовая характеристика – высота. Пропорционально разности высот в точках на окружности и ее центре рассчитываются длины векторов с началом в центре окружности. Концы этих векторов задают вершины некоторого многоугольника, геометрически подобного искомому. Путем растяжения (сжатия) из него получается искомый многоугольник заданной площади. В дальнейшем эта модель применяется при расчете концентрации нефтепродукта в грунте и грунтовых водах. При практической необходимости увеличить точность эвристического алгоритма для расчета координат вершин многоугольника может быть использована полиномиальная, тригонометрическая или смешанная модель.

**Ключевые слова:** эвристический алгоритм, математическая модель, многоугольник, прогнозирование, экология, нефтепродукты, границы пятна, точность.

**N. N. Busnyuk, A. V. Burmakova, V. V. Smelov**

Belarusian State Technological University

## **HEURISTIC ALGORITHM FOR COMPUTATING THE GROUND POLLUTION SPOT FORM BY OIL PRODUCT**

The article is devoted to the description of a heuristic algorithm for computing the shape of a ground spot due to an accidental spillage of petroleum products from a stationary reservoir. The initial data for calculating the shape of the ground pollution spot are the coordinates and height above the sea level of the center of the oil product spill and the points of the vicinity, as well as the amount of oil spilled, expressed in terms of the area occupied. The factor of penetration of liquid into the ground is not taken into account, therefore the area of the ground spot in the model is considered to be a constant and can only change the shape. All calculations in the mathematical model are carried out in a rectangular coordinate system. To approximate the points of the surface boundary through the numerical characteristics (coordinates, height) of known points, a linear model is applied. The result of the simulation is a polygon, connecting the vertices of which with a smooth line, we get the supposed shape of the spot. To obtain a polygon, we use a circle of a given area centered at the point of the strait. By known points of the neighborhood, points on the circle are approximated. Then, on the found points of the circle, additional points on the circle are approximated in order to obtain a polygon with

the number of vertices sufficient for constructing the smooth boundary of the spot sought. To approximate the vertices of a polygon, the third numerical characteristic, height, is used for the found points of the circle. Proportional to the height difference at the points on the circle and its center, the lengths of the vectors with the origin at the center of the circle are calculated. The endpoints of these vectors define vertices of a polygon geometrically similar to the desired one. By stretching (squeezing) the desired polygon of the given area is obtained from it. In the future, this model is used to calculate the concentration of oil in the ground and groundwater. With practical need to increase the accuracy of the heuristic algorithm for calculating the coordinates of the vertices of a polygon, a polynomial, trigonometric or mixed model can be used.

**Key words:** heuristic algorithm, mathematical model, polygon, forecasting, ecology, oil products, spot boundaries, accuracy.

**Введение.** Оценить масштабы и последствия нефтяного загрязнения можно при помощи математических моделей. В настоящее время разработано большое количество соответствующих моделей, состоящих из нескольких блоков. Однако даже в самых известных из них редко можно встретить наличие всех составляющих, позволяющих рассчитывать эволюцию нефтяного пятна на водной поверхности, суше и в местах их контакта в береговой зоне [1].

Специфика подобных аварий заключается в том, что поведение растекающейся жидкости наряду с ее свойствами и действием закона тяготения обуславливается как условиями местности (рельефом, наличием различных естественных и искусственных сооружений и преград, растительности и т. п.), так и характеристиками окружающей среды (погодой, климатом, составом грунтов).

Ландшафтное моделирование позволяет определить такие параметры аварийного разлива (кроме его конфигурации), как скорость распространения потока жидкости, количество нефти или нефтепродукта, аккумулированного рельефом (собранного неровностями поверхности), испарившегося с поверхности пролива, впитавшегося в грунт [2]. Кроме того, появляется возможность прогнозирования загрязнения водных объектов с определением количества попавшего в них опасного вещества и оценкой экологического риска.

В большинстве своем модели ориентированы на водную поверхность [3, 4].

Другая популярная группа задач рассматривает ситуации аварийного пролива нефтепродуктов в местах его транспортировки [3, 4]. Соответствующие модели учитывают пористость грунта и, как следствие, тот факт, что количество продукта на поверхности – величина переменная.

В данной статье рассматривается задача расчета формы наземного пятна вследствие аварийного пролива нефтепродуктов из неподвижного резервуара. Она возникла в РУП «Научно-производственный центр по геологии» при создании экспертной системы по реабили-

тации геологической среды, загрязненной нефтепродуктами. При проливах таких жидкостей, для которых прогнозируемый радиус кругового наземного пятна загрязнения превышает 10 м, необходимо учитывать реальную геометрическую форму этого пятна на основе данных о рельефе окрестности пролива.

**Основная часть.** Исходными данными для вычисления формы наземного пятна загрязнения являются:

1) координаты и высота над уровнем моря  $(x_0, y_0, z_0)$  точки  $O$  – центра пролива нефтепродукта;

2) площадь наземного пятна пролива  $S$ ;

3) координаты и высота над уровнем моря  $(x_i, y_i, z_i)$  точек  $M_i$  окрестности центра пролива. С учетом вязкости пролитой жидкой массы делается предположение о том, что площадь пятна пролива  $S$  постоянна, не зависит от перепадов высот в точках поверхности.

Результатом вычислений является множество пар  $(x_j, y_j)$  координат границ пятна.

Для моделирования границ пятна вводится окружность  $N$  с центром в точке  $O$  радиуса  $R$ .

Вычисление радиуса происходит по следующей формуле:

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}. \quad (1)$$

Вычисления границ пятна осуществляются в три этапа.

На первом этапе по координатам известных точек  $M_i$  аппроксимируются координаты точек  $N_j$  на окружности.

При этом придерживаемся следующих трех правил:

1) линейности поверхности;

2) значения высот, которые не могут быть вычислены аппроксимацией, предполагаются равными значению в центре пролива (на рис. 1 это значение 175);

3) при аппроксимации соединять хордой возможно только те точки, угол сектора между которыми не превышает  $90^\circ$ . Суть этих правил станет понятна при построении точек  $N_j$ . На рис. 1 продемонстрировано применение этих правил.

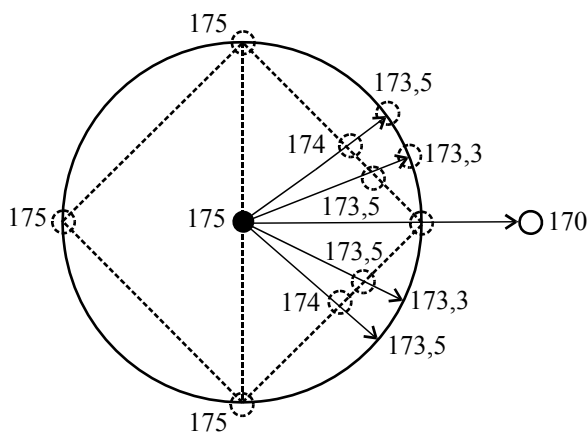


Рис. 1. Предварительные геометрические построения

С помощью линейной аппроксимации на окружности построены пять точек и вычислены значения высот в них. Кроме того, в трех точках предполагается высота, совпадающая с высотой в точке пролива (175). В этих точках значение одной из координат совпадает с соответствующим значением координаты центра окружности, а значение другой координаты отличается на величину  $|R|$ , где  $R$  – радиус окружности.

Для точек  $M_i$  с известными числовыми характеристиками  $(x_i, y_i, z_i)$  вычисляем разности высот:  $\Delta h_i = h_0 - h_i$ .

Их будем использовать для нахождения координат аппроксимируемых точек.

Пусть прямая  $OM_i$  пересекается с окружностью в точке  $N_i$ . Разность высот в точках  $O$  и  $N_i$  обозначим через  $\Delta g_i$ . Аппроксимация  $\Delta g_i$  для точки  $N_i$  на окружности находится через значение  $\Delta h_i$  точки  $M_i$  по формуле

$$\Delta g_i = \Delta h_i \frac{R}{d_i}, \tag{2}$$

где расстояние  $d_i$  между точками  $O$  и  $M_i$  вычисляется по формуле

$$d_i = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}. \tag{3}$$

Координаты  $(m_i, n_i)$  точки  $N_i$  находятся по формулам

$$m_i = x_0 + (x_i - x_0) \frac{R}{d_i}, \tag{4}$$

$$n_i = y_0 + (y_i - y_0) \frac{R}{d_i}. \tag{5}$$

Аппроксимация других точек на окружности выполняется путем деления хорды  $AB$ , соединяющей близлежащие на окружности уже известные точки пополам (рис. 2).

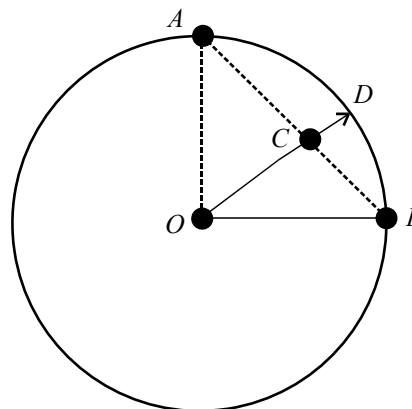


Рис. 2. Аппроксимация точки  $D$  по известным точкам  $A$  и  $B$

Вычисление координат таких точек производится следующим образом. Обозначим числовые характеристики концов хорды  $A$  и  $B$  через  $(x_1, y_1, h_1)$  и  $(x_2, y_2, h_2)$ . Координаты середины хорды  $(x_3, y_3)$  (точка  $C$ ) находятся по формулам:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \tag{6}$$

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{7}$$

Полагаем, что

$$\Delta h_3 = \frac{\Delta h_1 + \Delta h_2}{2}. \tag{8}$$

Соответствующая точка  $D$  на окружности – это пересечение вектора  $OC$  с окружностью.

На **втором этапе** по найденным точкам из множества  $N$  нужно получить координаты вершин многоугольника, задающего фигуру пятна. Для этого выбираем минимальное значение среди вычисленных разностей высот и соответствующей точке окружности  $N_k$  ставим в соответствие вектор единичной длины  $l_k$ :

$$\min_j \Delta g_j = \Delta g_k, \tag{9}$$

при этом полагаем, что  $l_k = 1$ .

Остальным аппроксимированным точкам окружности ставятся в соответствие векторы, длина которых вычисляется по формуле

$$l_j = 1 + (\Delta g_j - \Delta g_k). \tag{10}$$

Полученные значения принимаем за длины векторов, исходящих из центра пролива (длины векторов от точки  $O$  в направлении точек  $N_j$ ). Соединенные прямой линией концы построенных векторов образуют контур, координаты которого примем за первоначальные координаты границ пятна (многоугольник  $P$ ) (рис. 3).



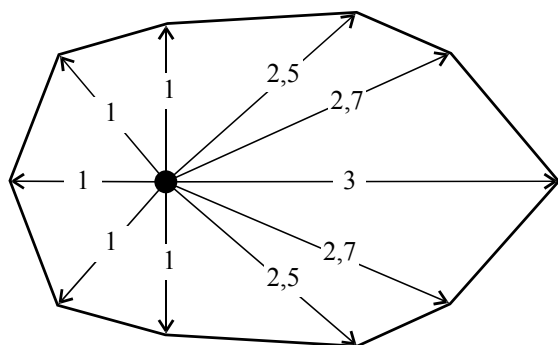


Рис. 3. Геометрическая интерпретация результатов второго этапа вычислений

**Третий этап** вычислений заключается в подборе коэффициента  $t$ , на который следует умножить длину каждого вектора, задающего многоугольник  $P$ , так, чтобы площадь полученной фигуры была равной  $S$ .

Для этого находим площадь  $T$  многоугольника  $P$ , суммируя площади треугольников, образованные векторами и хордами. Площадь  $G$  треугольника находим по формуле Герона:

$$G = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad (11)$$

где  $p$  – полупериметр треугольника;  $a, b, c$  – длины сторон треугольника.

Координаты концов векторов  $(x_j, y_j)$  (вершин треугольников) находим по формулам:

$$x_j = x_0 + (m_j - x_0) \frac{l_j}{R}, \quad (12)$$

$$y_j = y_0 + (n_j - y_0) \frac{l_j}{R}. \quad (13)$$

Коэффициент сжатия (растяжения)  $t$  многоугольника  $P$  до площади размера  $S$  находим по формуле

$$t = \sqrt{\frac{S}{T}}. \quad (14)$$

Растянув (увеличив) длину каждого вектора пропорционально в  $t$  раз, получим многоугольник площади  $S$ .

Саппроксимировав достаточное количество вершин многоугольника и соединив их плавной кривой, получим искомую форму пятна растекания жидкости.

**Заключение.** Форма многоугольника, рассчитанного по приведенной модели, будет использована в РУП «Научно-производственный центр по геологии» при расчете концентрации нефтепродукта, впитавшегося в грунт и проникшего в грунтовые воды. В зависимости от точности соответствия формы, рассчитанной по приведенному алгоритму, реальной форме, полученной по натурным экспериментам, можно усложнять математическую модель: применить полиномиальную, тригонометрическую либо комбинированную модель [5, 6]. Также можно использовать комбинацию линейных функций, зависящих от угла наклона поверхности пролива. При этом алгоритм будет оставаться эвристическим.

### Литература

1. Актуальные проблемы предотвращения, ликвидации разливов нефти в Арктике и методы оценки экологического ущерба прибрежным территориям / Павленко В. И. [и др.] // Арктика: экология и экономика. 2015. № 3 (19). С. 4–11.
2. Зацепя С. Н., Ивченко А. А., Овсиенко С. Н. О параметризации растекания нефти по горизонтальной пористой поверхности // Труды государственного океанографического института. 2009. № 212. С. 218–225.
3. Сакович Н. Е. Методы и средства ликвидации последствий разливов нефти и нефтепродуктов: монография. Брянск: Изд-во Брянской государственной сельскохозяйственной академии, 2012. 198 с.
4. Липский В. К., Лиштван И. И. Технические средства защиты водных объектов при аварийных разливах нефти: монография. Новополюк: ПГУ, 2009. 303 с.
5. Методика прогнозирования объема экологического загрязнения грунтов и грунтовых вод при проливе экологически вредных веществ / А. В. Вагнер [и др.] // ИСБ: Экологический вестник России. 2004. № 5. С. 45–51.
6. Экологическая гидрогеология: учеб. для вузов / А. П. Белоусова [и др.]. М.: ИКЦ Академкнига, 2006. 397 с.

### References

1. Pavlenko V. I., Muangu Zh., Korobov V. B., Lokhov A. S. Actual problems of prevention, liquidation of oil spills in the Arctic and methods for assessing ecological damage to coastal territories. *Arktika: ekologiya i ekonomika* [Arktika: ecology and economics], 2015, no. 3 (19), pp. 4–11 (In Russian).
2. Zatsepa S. N., Ivchenko A. A., Ovsienko S. N. On parametrization of oil spreading along a horizontal porous surface. *Trudy gosudarstvennogo okeanograficheskogo instituta* [Proceedings of the State Oceanographic Institute], 2009, no. 212, pp. 218–225 (In Russian).

3. Sakovich N. Ye. *Metody i sredstva likvidatsii posledstviy razlivov nefiti i nefteproduktov: monografiya* [Methods and means of liquidating the consequences of oil spills and oil products. Monograph]. Bryansk, Izdatel'stvo Bryanskoy gosudarstvennoy sel'skokhozyaystvennoy akademii Publ., 2012, 198 p.

4. Lipskiy V. K., Lishtvan I. I. *Tekhnicheskiye sredstva zashchity vodnykh ob'yektov pri avariynykh razlivakh nefiti: monografiya* [Technical means of protection of water objects during emergency oil spills. Monograph]. Novopolotsk, PGU Publ., 2009, 303 p.

5. Vagner A. V., Bukharin S. K., Kochemasov S. G., Priymak V. M. A technique for predicting the volume of environmental contamination of soils and groundwater in the strait of environmentally hazardous substances. *Ekologicheskiy vestnik Rossii* [Ecological Bulletin of Russia], 2004, no. 5, pp. 45–51 (In Russian).

6. Belousova A. P., Gavich I. K., Lisenkov A. B., Popov Ye. V. *Ekologicheskaya gidrogeologiya: uchebnik dlya vuzov* [Ecological hydrogeology: A textbook for high schools]. Moscow, Academkniga Publ., 2006, 397 p.

#### Информация об авторах

**Буснюк Николай Николаевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: busnnn@belstu.by

**Бурмакова Анастасия Владимировна** – магистрант. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: burmakova@belstu.by

**Смелов Владимир Владиславович** – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: smw@belstu.by

#### Information about the authors

**Busnyuk Nikolay Nikolaevich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technology. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: busnnn@belstu.by

**Burmakova Anastasiya Vladimirovna** – Master's degree student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str, 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: burmakova@belstu.by

**Smelov Vladimir Vladislavovich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str, 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: smw@belstu.by

Поступила 13.12.2017

УДК 378.146:004.5

**Н. Н. Буснюк<sup>1</sup>, В. А. Новиков<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет<sup>2</sup>Белорусский государственный университет**КОМПЬЮТЕРНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ ЗНАНИЙ  
С ПОЗИЦИЙ МЕТОДОЛОГИИ OLTP**

В связи с интенсивным развитием технологий компьютерного обеспечения учебного процесса появилась задача создания компьютерного теста с учетом альтернативных вариантов простоты и сервисных возможностей. В работе приводится методика компьютерного тестирования в среде Internet. Предлагается в оболочке теста практически не использовать сервер, что позволяет создавать программный продукт легко переносимый с компьютера на компьютер. Средства динамического HTML позволяют создавать программы с зашифрованным набором данных и фрагментов программного кода. Настройку теста предлагается осуществлять на языке высокого уровня C#. Рассмотрены также аспекты оценивания результатов тестирования с учетом сложности вопроса.

**Ключевые слова:** дистанционное обучение, тестирование, методология OLTP, вопросы, ответы, программирование, язык HTML, язык C#, язык JavaScript, среднее значение, среднеквадратичное отклонение.

**N. N. Busnyuk<sup>1</sup>, V. A. Novikov<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Belarusian State Technological University<sup>2</sup>Belarusian State University**COMPUTER TESTING FROM OLTP METHODOLOGY POSITIONS**

In connection with the intensive development of computer technology for the educational process, the task is to create a computer test, taking into account alternative options for simplicity and service capabilities. The paper proposes a technique for computer testing in the Internet environment. It is offered in the shell of the test practically not to use the server, which allows you to create a software product that is easily portable from computer to computer. Dynamic HTML tools allow you to create programs with an encrypted set of data and code snippets. The test setting is suggested in the high-level language C#. The aspects of evaluation of testing results are also considered taking into account the complexity of the issue.

**Key words:** distance learning, testing, OLTP methodology, questions, answers, programming, HTML language, C# language, JavaScript language, mean value, standard deviation.

**Введение.** Дистанционное обучение как традиционная и перспективная форма преподавания получает все большее развитие в системе современного образования. Неотъемлемой частью дистанционного обучения являются компьютерные тесты. Компьютерное тестирование – это основная составляющая не только дистанционного обучения, но и необходимый элемент традиционной формы обучения [1].

Процесс активного внедрения компьютерных тестов в учебный процесс сопровождается не только организационными проблемами, но и чисто техническими. Последнее связано с непростым процессом подготовки теста и дальнейшего его обновления.

**Основная часть.** При разработке программной оболочки теста необходимо учитывать современные тенденции и рекомендации. Таким базовым руководством может быть активно пропагандируемая в настоящее время методология OLTP (Online Transaction Processing). Применительно к информационным системам OLTP-системы предназначены для ввода, струк-

турированного хранения и обработки информации (операций, документов) в режиме реального времени. Основными компонентами OLTP являются механизмы:

- транзакционного обслуживания клиентов;
- сбора статистической информации;
- подготовки и обновления базы данных.

Механизмы транзакционного обслуживания применительно к компьютерному тестированию предусматривают отсутствие задержек в процессе тестирования и простую и понятную систему интерфейсного обеспечения.

С позиций сбора статистической информации нужно учитывать только самые необходимые для ведения учебного процесса данные и не усложнять программную оболочку чрезмерным ее администрированием. На наш взгляд, сбор статистической информации можно ограничить для каждого вопроса теста количеством его появлений и числом правильных ответов на этот вопрос. Такая статистика позволяет преподавателю периодически делать коррекцию весового коэффициента вопроса. Если учитывать

программную оболочку теста, как независимую составляющую, то нет смысла вести статистику по фамилиям студентов как при обучении, так и при тестировании. Подобная статистика привлекательна, но слишком усложняет администрирование и в связи с этим обновление теста.

Самым существенным механизмом организации компьютерного теста является механизм подготовки теста и его оперативное обновление. Наиболее полно методология OLTP обеспечивается комплексным использованием технологии Internet с применением в качестве связующего элемента языков высокого уровня (например, C#).

При создании компьютерного теста надо учитывать возможность применения в нем помимо текста еще и формул, диаграмм и картинок. Наиболее полно эта возможность обеспечивается средствами Word. Оптимальным вариантом разметки является использование таблиц для формирования каждого вопроса. Необходимо предусмотреть три категории вопросов: вопрос-перебор, вопрос-эталон и вопрос-список.

Для вопроса-перебора табличка представляется, как это показано в табл. 1.

Таблица 1

**Вопрос-перебор**

+	3.5
-	6
-	2
-	4
\$	Чему равно значение интеграла $\int_1^2 (x + 2) dx$ ?
@	Вес=1; Категория=2; Колонки_ответов=4;

Символом «@» обозначается строка параметров: весовой коэффициент вопроса, категория сложности вопроса и число колонок при выводе ответов. Символом «\$» обозначается строка вопроса. Строки ответов вопроса-перебора идентифицируются символом «+» для правильного ответа и символом «-» для неправильного ответа. В вопросе, как и в ответах, может быть любой текст, кроме таблиц (в приведенном примере это формула). В компьютерном тесте вопрос-перебор выглядит так, как это представлено на рис. 1.

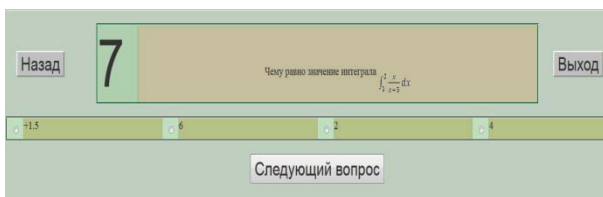


Рис. 1. Отображение вопроса-перебора в тесте

Для вопроса-эталона табличка Word и ее отображение представлены в табл. 2 и на рис. 2.

Таблица 2

**Вопрос-эталон**

@	Вес=1; Категория=1; Колонки_ответов=1;
\$	Кто открыл теорию относительности
*	Эйнштейн
*	Альберт Эйнштейн
*	Эйнштейн Альберт

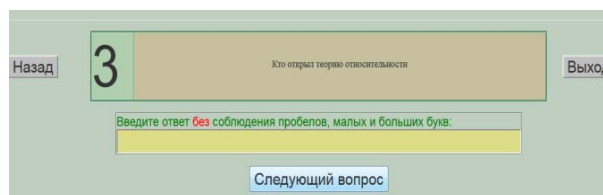


Рис. 2. Отображение вопроса-эталона в тесте

Как видно, признак вопроса-эталона определяется по вариантам правильных ответов, идентифицируемых символом «\*».

Для вопроса-списка табличка Word и ее отображение представлены в табл. 3 и на рис. 3.

Таблица 3

**Вопрос-список**

\$	Расположите в хронологическом порядке по дате рождения писателей
1	Нарезный
2	Лев Толстой
3	Есенин
4	Булгаков

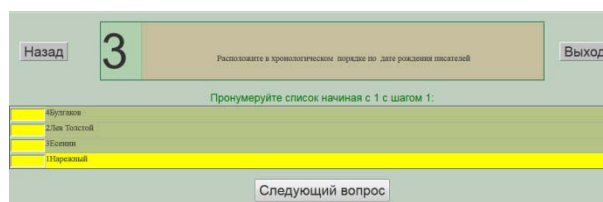


Рис. 3. Отображение вопроса-списка в тесте

Признак вопроса-списка определяется по вариантам правильного ответа в виде нумерации, начиная с цифры 1.

Для дальнейшей обработки размеченного документа его необходимо конвертировать из Word в формат HTML с фильтрацией. Дальнейшая обработка документа HTML зависит от средств организации интерфейсной части программной оболочки.

С позиций доступности компьютерного теста и обеспечения транзакционного обслуживания клиентов наиболее подходят средства организации интерактивных оболочек в Internet. Они позволяют организовывать доступный и

понятный интерфейс средствами HTML и JavaScript. С другой стороны, программирование на стороне сервера позволяет обеспечить сбор статистических данных любой сложности.

С позиций методологии OLTP компьютерный тест должен в отсутствие статистики работать на любом локальном компьютере, чем обеспечивается принцип доступности теста. Таким образом, программная оболочка теста должна обслуживаться только средствами обработки на клиентской стороне с полным исключением из этого процесса серверной обработки данных.

Изложенная концепция компьютерного теста частично реализована в статье [2]. Тест предусматривает два режима: тестирование и обучение. Режим обучения отличается от тестирования только возможностью вывода после регламентированного числа попыток правильной комбинации ответов. В режиме обучения в качестве ответа засчитывается первая попытка. Кроме режима обучения тест предусматривает два уровня тестирования: уровень 1 облегченного варианта и уровень 2 полной версии.

В конце тестирования выводится стандартный протокол тестирования (рис. 4).

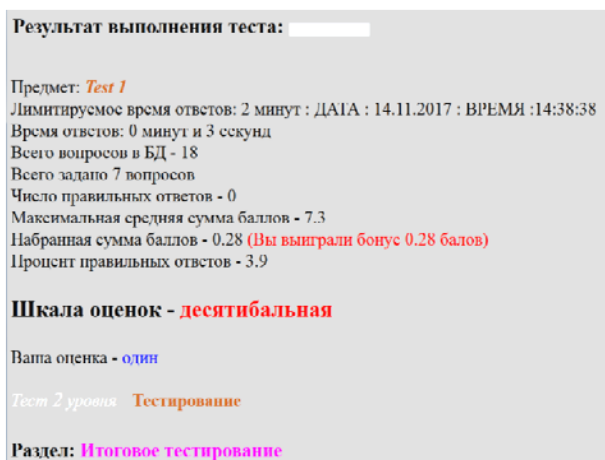


Рис. 4. Протокол тестирования

В режиме сбора статистики протокол тестирования сопровождается фиксацией заданных вопросов и правильных ответов на них. Структурировано тест предусматривает наличие нескольких разделов по предмету с возможностью тестирования по каждому разделу. Каждый раздел может содержать несколько тем с возможностью обучения по каждой теме. При тестировании по разделу число вопросов берется равномерным по каждой теме. Итоговое тестирование сводится к равномерному выбору числа вопросов по разделу, а внутри раздела – и по темам.

Обеспечение сервиса и настройку теста наиболее оптимально организовывать на языке

высокого уровня, которым является Visual Studio C#. В первую очередь необходимо конвертировать документ HTML каждой темы, полученный при подготовке теста в Word, в спецификацию данных на JavaScript. Для вопросов и ответов данные хранятся в ступенчатом массиве JavaScript. Строкового типа элемент массива представляет собой HTML-фрагмент, который и отображается в окне браузера.

Кроме конвертации на языке C# несложно создать и настройку теста с использованием механизма создания на C# соответствующих фрагментов JavaScript-кода. В этот сервис входят фиксация разделов, привязка темы к разделу, формирование критериев выставления оценок и необходимых режимов типа проверки теста или режима вывода зависимых переключателей для ответов.

Непростой задачей при тестировании является определение критериев оценивания по каждому вопросу и затем по всем вопросам [3]. Анализ имеющихся точек зрения показал, что наиболее подходящим является зачет правильного ответа на вопрос, если выставлены правильно все флажки ответов. Для учета комбинаторной сложности ответов в вопросе-переборе предлагается, например, для числа вариантов  $s = C_8^4$  удваивать вес вопроса ( $k = 2$ ). Вес вопроса – это количество баллов, засчитываемое за правильный ответ. Для меньших комбинаций  $C_n^m$  при  $m < 4$  и  $n < 8$  вес  $\chi$  берется прямо пропорционально между значением  $C_2^1 = 2$  и  $s$ :

$$\chi = \frac{s - 2k + C_n^m}{s - k}.$$

Другой задачей оценивания результатов при случайном выборе вопросов темы является учет возможности появления комбинации легких вопросов, с одной стороны, или тяжелых вопросов, с другой стороны. Можно с позиций объективности оценивания знаний предложить следующий алгоритм учета этой ситуации. Предположим, тест содержит  $N$  вопросов, а выводятся случайно  $K$  вопросов. Отметка выставляется по десятибалльной шкале, исходя из процентного отношения суммы баллов правильных ответов  $S$  к суммарному числу баллов по выводимым вопросам  $KW_*$ , где  $W_*$  – средний вес вопроса среди  $K$  штук. Например, при проценте правильных ответов  $100S / KW_* = 65\%$  выставляется отметка 6 (шесть). Фиксируется среди  $N$  вопросов среднеарифметический вес вопроса  $W_0$ , а при отображении – среднеарифметический вес  $W_k$  вопроса по числу  $K$  выводимых вопросов. Если для тестирования выведены вопросы с  $W_k < W_0$ , то берется  $W_* = W_k$ . Если выведены сложные вопросы с  $W_k > W_0$ , то берется  $W_* = W_0$ .

С другой стороны, можно предложить алгоритм тестирования при заданном количестве баллов и с плавающим числом вопросов.

Прежде всего, вычисляется среднее арифметическое значение  $W_0$  среди всех вопросов теста по формуле

$$W_0 = \frac{1}{N} \sum_i w_i,$$

где  $w_i$  – весовой коэффициент вопроса.

Далее вычисляется среднее квадратичное отклонение  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i (w_i - W_0)^2}.$$

По заданному преподавателем числу выводимых для тестирования вопросов  $K$  вычисляется среднее значение суммы баллов  $\Sigma$ , которую тестируемый должен набрать:

$$\Sigma = KW_0.$$

Теперь при тестировании число задаваемых вопросов  $K_0$  оказывается плавающим и определяется величиной  $\Sigma$ . При выводимых легких вопросах величина  $K_0$  будет больше  $K$ , а при тяжелых вопросах  $K_0$  будет меньше  $K$ . Но если ограничиться только этим алгоритмом, то могут быть ситуации задания слишком малого  $K = K_{\min}$  или слишком большого  $K = K_{\max}$  числа вопросов. В связи с этим величины  $K_{\min}$  и  $K_{\max}$  ограничиваются по значению  $\sigma$ :

$$K_{\min} = \frac{\Sigma}{W_0 + \sigma}; \quad K_{\max} = \frac{\Sigma}{W_0 - \sigma}.$$

Таким образом, при тестировании число задаваемых вопросов зависит от величины  $\Sigma$ , но не может быть меньше  $K_{\min}$  и больше  $K_{\max}$ . Так алгоритм позволяет исключить необъективность оценивания при случайном выборе сложных вопросов.

Предлагаемая методология организации программной оболочки теста позволяет полно-

стью автоматизировать процесс его подготовки. Кроме этого, самая сложная задача разметки теста сводится к набору текста в Word с простой системой разметки вопросов и ответов. Применение в качестве буфера программной оболочки на C# позволяет выполнять предварительную настройку теста и его сервиса любой сложности. Средства Internet используются только для организации удобного интерфейса и сбора необходимой статистики.

С позиций организации всего комплекса дистанционного обучения тест легко интегрируется в систему выдачи дидактического материала. Более того, при создании на основе предлагаемой методологии электронных учебников тест несложно монтируется в систему обеспечения сервиса таких документов. Он из электронного учебника позволяет войти в оболочку, минуя систему обычного доступа к теме. Также он дает возможность выдавать на сервер через элементы формы фамилию тестируемого и его отметку, причем фамилия поступает на тест из электронного учебника через командную строку. Подобный механизм обеспечивает синхронизацию многопользовательского режима при обслуживании электронного учебника.

**Заключение.** Учет рекомендаций, основанных на методологии OLTP, дает возможность избежать слишком запутанной системы навигации по интерфейсу программной оболочки и обеспечить простую технологию наполнения базы данных вопросами и ответами теста. Учитывая, что компьютерный тест – тоже специфическая база данных, использование прогрессивной технологии структурирования данных дает возможность создания самой простой процедуры подготовки теста средствами, непосредственно предназначенными для такого структурирования и отображения [4]. Средства динамического HTML позволяют шифровать данные и фрагменты программного кода JavaScript с использованием языка высокого уровня типа C#.

### Литература

1. Никифоров О. Ю., Кокшарова Е. И. Комплекс признаков классификации систем компьютерного тестирования // *Современные научные исследования и инновации*. 2013. № 6. С. 31–36.
2. Новиков В. А., Шипулина Л. Г. Универсальный тест на базе Internet // *Образовательно-инновационные технологии: теория и практика*. Кн. 9. Воронеж, 2009. С. 43–54.
3. Звонников В. И., Челышкова М. Б. *Современные средства оценивания результатов обучения: учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений*. М.: Академия, 2007. 224 с.
4. Сиренко С. Н. Компьютерное тестирование в вузе: преимущества, особенности, опыт внедрения // *Педагогические измерения*. 2007. № 4. С. 67–74.

### References

1. Nikiforov O. Yu., Koksharova E. I. Complex of signs classification of computer testing systems. *Sovremennyye nauchnye issledovaniya i innovatsii* [Modern scientific research and innovation], 2013, no. 6, pp. 31–36 (In Russian).

2. Novikov V. A., Shipulina L. G. Universal test on the basis of the Internet. *Obrazovatel'no-innovatsionnye tekhnologii: teoriya i praktika* [Educational-innovative technologies: theory and practice, Book 9]. Voronezh, 2009. Pp. 43–54.

3. Zvonnikov V. I., Chelyshkova M. B. *Sovremennye sredstva otsenivaniya rezul'tatov obucheniya: uchebnoye posobiye dlya studentov vysshikh uchebnykh zavedeniy* [Modern means of assessing learning outcomes: Textbook allowance for students supreme training institutions]. Moscow, Akademiya Publ., 2007. 224 p.

4. Sirenko S. N. Computer testing in the university: advantages, features, experience of implementation. *Pedagogicheskiye izmereniya* [Pedagogical measurements], 2007, no. 4, pp. 67–74 (In Russian).

#### **Информация об авторах**

**Буснюк Николай Николаевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: busnnn@belstu.by

**Новиков Василий Алексеевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры экономической информатики. Белорусский государственный университет (220004, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: vanovikov@tut.by

#### **Information about the authors**

**Busnyuk Nikolay Nikolaevich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technology. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: busnnn@belstu.by

**Novikov Vasily Alekseevich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Economical Informatics. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220004, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vanovikov@tut.by

*Поступила 28.11.2017*

УДК 004.912

**Е. В. Малышев, В. В. Смелов**

Белорусский государственный технологический университет

**АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ ПЛАГИАТОВ КОДОВ ПРОГРАММ**

В данной статье рассмотрен алгоритм распознавания плагиатов кодов программ. Предлагаемый алгоритм позволяет оценить схожесть программных текстов и построить соответствующие кластеры. Описан подход к разработке программного обеспечения, реализующего данный алгоритм, сформулированы задачи, решаемые таким программным обеспечением. Основой алгоритма распознавания плагиатов является алгоритм жадного строкового замощения, который дает хорошие результаты сравнения текстов. Кластеризация осуществляется над графом, в котором каждой вершине сопоставляется исследуемый код программы, а кластер представляет собой подмножество вершин, соответствующее подмножеству схожих программ. Граф является взвешенным: каждому ребру ставится в соответствие число от 0 до 1, выражающее степень схожести двух программ. Областью применения программного обеспечения, разработанного на основе подходов, описанных в статье, являются системы автоматизированного тестирования, применяемые при проведении соревнований по спортивному программированию.

**Ключевые слова:** хэш, плагиат, токенизация, копирайт, кластеризация, теория алгоритмов.

**Ye. V. Malyshev, V. V. Smelov**

Belarusian State Technological University

**PLAGIARISM DETECTING ALGORITHMS FOR SOFTWARE CODE**

In this article the algorithm for recognizing plagiarism of program codes is considered. The proposed algorithm makes it possible to evaluate the similarity of program texts and construct the corresponding clusters. The approach to the development of software that implements this algorithm is described and problems which such software is able to solve are formulated. The basis of the algorithm for recognizing plagiarism is the algorithm of greedy string tiling, which gives good results for comparing texts. The process of clustering is performed over a graph in which each vertex is associated with the studied program code, and a cluster is a subset of vertices corresponding to a subset of similar programs. The graph is weighted: each edge is associated with number from 0 to 1, expressing the degree of similarity of two programs. The application of the software based on the article's approaches is automated test systems for sport programming competitions.

**Key words:** hash, plagiarism, tokenization, copyright, clustering, theory of algorithms.

**Введение.** Плагиат в программировании – умышленное присвоение авторства чужого фрагмента кода программы. Под кодом программы подразумевается текст, написанный на каком либо языке программирования или языке разметки. Для определения плагиата в исходных кодах программ используются алгоритмы, основывающиеся на различных факторах [1], таких как количество определенных операторов, стилистика написания кода, структура программы и др. В связи со спецификой учебного процесса [2] появляется острая необходимость разработки программной системы, позволяющей легко обнаружить факт заимствования или упростить исследование большого набора данных для обнаружения плагиата.

На данный момент не существует хорошего программного обеспечения для распознавания плагиата и поэтому данная тема все еще остается актуальной. Подход с кластеризацией, на основе схожести программ, поможет значительно упростить этот процесс поиска и позво-

лит быстрее [3] распознавать факт заимствования. Так как каждый кластер в большинстве случаев представляет собой небольшую подгруппу программ, то это позволяет сфокусироваться на небольшом количестве данных и гораздо точнее и быстрее их проанализировать.

**Основная часть.** Большое количество программ неудобно для исследования на факт заимствования [3]. Для упрощения задачи будет целесообразным разбить весь набор исходных кодов на небольшие подгруппы. Каждая подгруппа должна содержать исходные коды, которые заимствовали части друг друга. Процесс разбиения группы исходных кодов на подгруппы называется кластеризацией. А сама подгруппа – кластером.

Процесс кластеризации производится над графом, вершинами которого являются программы. Каждому ребру задан вес от 0 до 1. Вес выражает степень схожести двух программ. Процесс построения ребер основывается на попарном сравнении программ. Ребро включается



в граф, если является значимым. Значимыми называются ребра, вес которых превышает заданный нижний порог. Для определения веса ребра применяется алгоритм жадного строкового замощения [4]. Используя токенизированное представление [5] каждой программы, можно улучшить точность веса ребра. Для улучшения временной оценки применяется алгоритм Карпа – Рабина [6].

Для формирования кластеров постепенно повышается нижний весовой порог, тем самым уменьшается количество значимых ребер. При повторении процесса увеличивается количество связанных компонент и уменьшается размер каждой. По достижению требуемого размера связанных компонент процесс останавливается. В дальнейшем над каждой группой вершин производятся дополнительные исследования.

*Подходы оценки близости.* В исходном коде программы сохраняются характеристики [2], свойственные автору (наименования, переменные, стиль исходного кода, комментарии и другие особенности). На основе особенностей можно выделить различные подходы для определения схожести двух исходных кодов (расстояние Левенштейна, атрибутный, структурированный, трансляторный, поведенческий, комбинированный). Предлагается использовать подход, основанный на алгоритме жадного строкового замощения [4], позволяющий просто определять степень схожести двух программ.

*Модели представления исходных кодов программ. Токенизация.* Для приведения исходного кода к общему виду, производится преобразование текста к набору токенов (токен – значащая часть исходного кода, как операторы, строки и т. д.). Процесс можно упростить, применив пакет Java Compiler Compiler (JavaCC).

Для работы с пакетом JavaCC создается файл с грамматическим описанием языка, а затем запускается на выполнение встроенный плагин [5]. В результате будет получен пакет классов, позволяющий работать с входным потоком по заданным правилам и преобразовывать его в набор токенов. Принципы описания грамматики в JavaCC во многом сходны с EBNF (расширенной формой Бакуса Наура), которая используется для описания формальных контекстно-свободных грамматик.

Ниже представлен JavaCC-код программы, удаляющей комментарии.

*Алгоритм жадного строкового замощения и его улучшение.* Для определения веса ребра между вершинами графа воспользуемся алгоритмом жадного строкового замощения (The Greedy String Tiling). Для этого сначала преобразуем программы в наборы токенов. В результате алгоритм выдаст набор общих непересекающихся

подстрок. Подстроки, входящие в этот набор, называются тайлами (*tiles*). Обозначим исходные коды двух программ как  $P$  и  $T$ , введем следующие понятия:

- *MinMatchLen* – минимальная длина наибольшего общего префикса  $P_p$  и  $T_t$ ;
- *MaxMatch* – длина самого большого из пока найденных префиксов;
- *Matches* – множество, содержащее кандидатов на попадание в набор тайлов;
- *Tiles* – набор тайлов.

```
SKIP : {
    // Однострочный комментарий
    < "/" (~["r", "n"])* >
    // Начало многострочного
    // комментария
    | < "/*" > : ML_COMMENT_STATE
}
// Игнорируем все, пока не найдем
// конец комментария
< ML_COMMENT_STATE > SKIP : {
    < "*/" > : DEFAULT
    | < ~[] >
}
```

Процесс поиска состоит из двух повторяющихся фаз. В первой фазе осуществляется поиск наибольших общих подстрок  $P$  и  $T$ , состоящих только из свободных элементов (изначально все элементы свободны). Для этого используются три вложенных цикла: первый из которых пробегает по всем возможным значениям  $P_p$ , второй цикл по всем  $T_t$ , а третий цикл находит наибольший общий префикс (НОП)  $P_p$  и  $T_t$ . В итоге будет найден набор всех префиксов с максимальной длиной, состоящих из свободных элементов. Вторая фаза проходит по списку найденных НОП. Если текущий элемент списка – подстрока из свободных элементов, то помещаем ее в выходной набор *tiles* и помечаем все ее элементы. Таким образом она не учитывается в дальнейшем. Если найденная максимальная длина все еще больше *MinMatchLen*, то переходим к первой фазе. Ниже приведем псевдокод данного алгоритма.

```
Greedy-String-Tiling (P, T) {
    tiles = {};
    do {
        maxmatch = MinMatchLen;
        For unmarked tokens Pp in P, Tt in T {
            j = 0;
            while (Pp + j == Tt + j) &&
                unmarked(Pp + j) &&
                unmarked(Tt + j) j++;
            if (j == maxmatch) {
                matches ∪ = match(p,t,j);
            }
        }
    }
}
```

```

    } else if (j > maxmatch) {
        matches = {match(p,t,j)};
        maxmatch = j;
    }
}
For match(p,t,maxmatch) ∈ matches {
    if (not occluded) {
        for j = 0...(maxmatch-1) {
            mark(Pp + j), mark(Tt + j);
        }
        tiles ∪ = matches(a,b, maxmatch);
    }
}
} while (maxmatch > MinMatchLen);
return tiles;
}
    
```

Константа *MinMatchLen* вводится, чтобы не учитывать слишком маленькие префиксы, которые негативно влияют на определение веса ребра.

Проверку на то, что вся подстрока свободна (фаза 2) можно производить за время  $O(1)$ , так как достаточно проверить конечные элементы, и тогда временная сложность алгоритма  $O(n^3)$ . Оценку можно улучшить, используя алгоритм Карпа – Рабина [6] поиска подстроки в строке, применив подход по использованию хэшей. Будем вычислять значение хэш-функций для всех подстрок длины  $L$  в  $P$  и  $T$ , где  $L$  – параметр, больший или равный *MinMatchLen*. Это можно сделать за  $O(|P| + |T|)$ , используя полиномиальную хэш-функцию. Каждое хэш значение от подстроки  $P$  сравнивается с каждым значением от подстроки  $T$ . Если два значения одинаковы, то возможно равенство соответ-

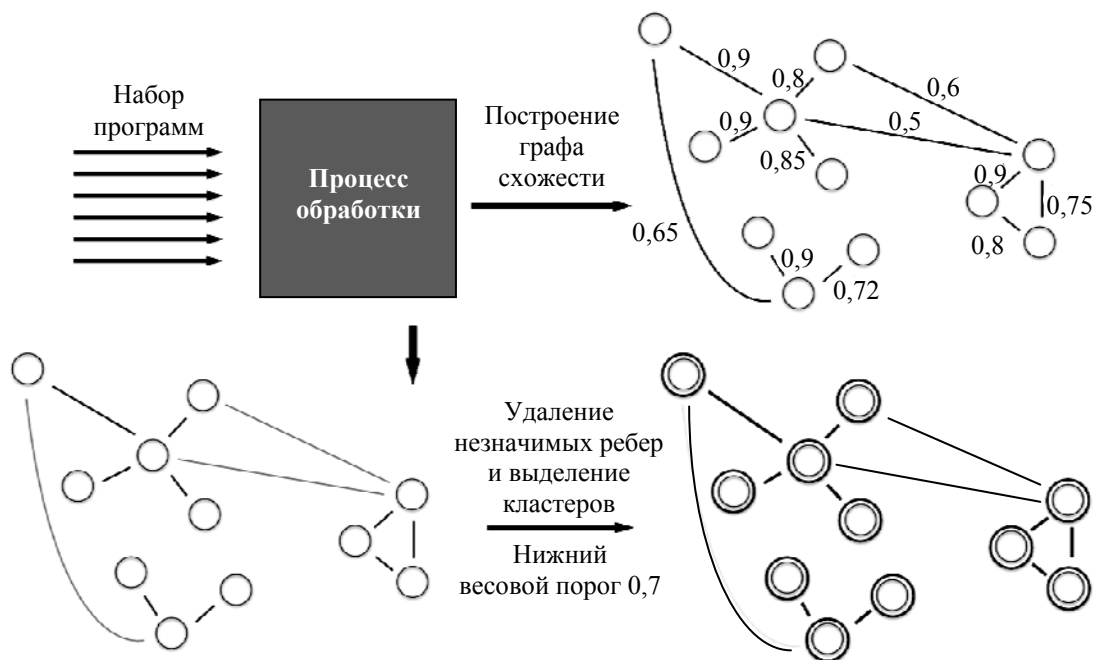
ствующих подстрок, которое можно проверить посимвольно. Если происходит совпадение, то предпринимается попытка продления на длину большую, чем  $L$ , то есть ищется НОП соответствующих подстрок. Далее алгоритм выполняет оригинальные шаги. Асимптотика худшего случая после этой модификации составляет  $O(n^3)$ , но на практике она значительно ниже  $O(n^2)$ . После того как найден набор тайлов, вес ребра можно определить следующим образом:

$$\text{sim}(P, T) = \frac{2 | \text{tiles} |}{|P| + |T|},$$

где  $| \text{tiles} |$  – длина всех найденных непересекающихся общих подстрок, каждая из которых длиной не меньше *MinMatchLen*, а  $|P|$  и  $|T|$  – длина программ  $P$  и  $T$  соответственно.

*Кластеризация на основе схожести программ.* Подход по выделению кластеров состоит из следующих шагов (рисунок):

1. На вход получаем набор программ.
2. Представляем каждую программу в виде набора токенов, получившихся на основе исходного кода.
3. Производим попарное сравнение, чтобы определить вес ребер и оставить только значимые из них.
4. Постепенно поднимаем нижний весовой порог, пока размер каждой компоненты связности не будет удовлетворять нашим некоторым критериям.
5. Выделяем компоненты связности, каждую из которых считаем отдельным кластером для дальнейшего исследования.



Процесс кластеризации кодов программ на основе степени схожести

**Заключение.** В разработанном программном обеспечении для поиска плагиата в наборе программ применяется алгоритм жадного строкового замощения. В качестве его улучшения используется подход *Карна – Рабина*. Для выделения групп применяется алгоритм кластеризации на основе схожести программ. Практиче-

ской полезностью разработанного программного обеспечения является автоматизация процесса проверки набора кодов программ. Разработанное программное обеспечение можно использовать в учреждениях образования, автоматических системах тестирования для проверки различных данных.

### Литература

1. Chen X., Francia B., Li M., McKinnon B., Seker A. Shared Information and Program Plagiarism Detection // *IEEE Trans. Information Theory*. July 2004. P. 1545–1550.
2. Faidhi. J. A. W., Robinson. S. K. An Empirical Approach for Detecting Program Similarity within a University Programming Environment. *Computers and Education*. 1987. No. 11 (1). P. 1119.
3. Manber U. Finding similar files in a large file system // *Proceedings of the USENIX Winter 1994 Technical Conference*, San Francisco, CA, USA, 1994. P. 1–10.
4. Khurram Z., Tabassam N., Sami D., Ali J. Efficient Source Code Plagiarism Identification Based on GST // *IJCSNS*. December 2010. Vol. 10. No. 12. P. 204–210.
5. Copeland T. *Generating Parsers with JavaCC*. Alexandria: Centennial Books, 2007.
6. Cormen H., Charles E., Ronald L., Stein C. *The Rabin–Karp algorithm*. Introduction to Algorithms. Cambridge, Massachusetts: Mit Press, 1990.

### References

1. Chen X., Francia B., Li M., McKinnon B., Seker A. Shared Information and Program Plagiarism Detection. *IEEE Trans. Information Theory*, July 2004, pp. 1545–1550.
2. Faidhi. J. A. W., Robinson. S. K. An Empirical Approach for Detecting Program Similarity within a University Programming Environment. *Computers and Education*, 1987, no. 11 (1), pp. 1119.
3. Manber U. Finding similar files in a large file system. *Proceedings of the USENIX Winter 1994 Technical Conference*, San Francisco, CA, USA, 1994, pp. 1–10.
4. Khurram Z., Tabassam N., Sami D., Ali J. Efficient Source Code Plagiarism Identification Based on GST. *IJCSNS*. December 2010, vol. 10, no. 12, pp. 204–210.
5. Copeland T. *Generating Parsers with JavaCC*. Alexandria, Centennial Books, 2007.
6. Cormen H., Charles E., Ronald L., Stein C. *The Rabin–Karp algorithm*. Introduction to Algorithms. Cambridge, Massachusetts, Mit Press, 1990.

### Информация об авторах

**Малышев Егор Вадимович** – магистрант. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: wsemirz@gmail.com

**Смелов Владимир Владиславович** – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: smw60@mail.ru

### Information about the authors

**Malyshev Yegor Vadimovich** – Master’s degree student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: wsemirz@gmail.com

**Smelov Vladimir Vladislavovich** – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: smw60@mail.ru

Поступила 18.12.2017

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ.....</b>	<b>5</b>
<b>МАТЕМАТИКА.....</b>	<b>5</b>
<b>Якименко А. А.</b> Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае при кратных корнях.....	5
<b>Шагова Т. Г.</b> Об асимптотических разложениях рациональных мнемофункций.....	9
<b>Архипенко О. А.</b> Краевые задачи для разностных уравнений.....	12
<b>Можей Н. П.</b> Трехмерные симметрические пространства, допускающие неканонические связности.....	19
<b>МЕХАНИКА .....</b>	<b>24</b>
<b>Грода Я. Г., Бильданов Э. Э., Гапанюк Д. В.</b> Критический параметр решеточного флюида с SALR-потенциалом на плоской квадратной решетке.....	24
<b>Бокун Г. С., Головкин М. Ф., Вихренко В. С.</b> Распределение потенциала в твердом электролите между плоскими электродами.....	29
<b>ФИЗИКА .....</b>	<b>36</b>
<b>Крук Н. Н., Кленицкий Д. В., Маес В.</b> Квантово-химическое исследование молекулярной структуры алкилированных корролов.....	36
<b>Кленицкий Д. В., Крук Н. Н.</b> Изучение временного профиля флуоресценции красителя при возбуждении прямоугольными световыми импульсами.....	43
<b>ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ.....</b>	<b>49</b>
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ .....</b>	<b>49</b>
<b>Шумский А. Н., Карпович Д. С.</b> Настройка параметров закона управления для стабилизации высоты беспилотного летательного аппарата.....	49
<b>Подобед М. Ю., Карпович Д. С.</b> Особенности управления калориферными установками в системах кондиционирования воздуха.....	55
<b>Подобед М. Ю., Карпович Д. С.</b> Блок нечеткой селекции сигналов обратных связей.....	60
<b>Подобед М. Ю., Сарока В. В.</b> Адаптивное управление системой кондиционирования воздуха по обобщающему критерию температурного режима.....	67
<b>Овцов С. А., Сарока В. В.</b> Повышение быстродействия работы автооператора портального типа гальванической линии методом динамического программирования Беллмана.....	72
<b>Пекарь С. А., Смелов В. В.</b> Математическая модель интеллектуального поведения 3D-объекта.....	78
<b>Бурмакова А. В., Смелов В. В., Захаров А. А.</b> Реализация математической модели прогнозирования последствий аварийного разлива нефтепродуктов.....	82
<b>ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ .....</b>	<b>88</b>
<b>Романенко Д. М., Пацей Н. В., Драко А. М.</b> Особенности декодирования линейных блочных кодов с использованием рекуррентных и радиально-базисных нейронных сетей.....	88
<b>Вахаб А., Романенко Д. М.</b> Методы цифровой стеганографии на основе модификации цветных параметров изображения.....	94

<b>Навроцкий Я. Ю., Пацей Н. В.</b> Реализация политик кэширования в информационно-ориентированных сетях.....	99
<b>Блинова Е. А., Урбанович П. П.</b> Стеганографический метод на основе встраивания дополнительных значений координат в изображении формата SVG.....	104
<b>СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ОБУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ.....</b>	<b>110</b>
<b>Дутова И. Г., Мохов В. А.</b> Постановка задачи системного анализа и метаоптимизации параметров популяционных алгоритмов.....	110
<b>Кобайло А. С.</b> Особенности архитектурной организации вычислительных систем реального времени. Параллельно-конвейерные вычислители.....	115
<b>Кобайло А. С.</b> Применение гибридных методов проектирования вычислительных систем реального времени.....	120
<b>АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ .....</b>	<b>125</b>
<b>Буснюк Н. Н., Бурмакова А. В., Смелов В. В.</b> Эвристический алгоритм вычисления формы пятна загрязнения поверхности земли нефтепродуктом.....	125
<b>Буснюк Н. Н., Новиков В. А.</b> Компьютерное тестирование знаний с позиций методологии OLTP.....	130
<b>Малышев Е. В., Смелов В. В.</b> Алгоритм распознавания плагиатов кодов программ.....	135

# CONTENTS

.....

<b>PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES.....</b>	<b>5</b>
<b>MATHEMATICS.....</b>	<b>5</b>
<b>Yakimenka A. A.</b> Modal control for one neutral type system in general cyclic case with double roots	5
<b>Shahava T. R.</b> Of the asymptotic expansions of rational mnemofunctions.....	9
<b>Arkhipenko O. A.</b> Boundary value problems for difference equations.....	12
<b>Mozhey N. P.</b> Three-dimensional symmetric spaces, admits uncanonical connections .....	19
<b>MECHANICS .....</b>	<b>24</b>
<b>Groda Ya. G., Bildanau E. E., Gapanjuk D. V.</b> Critical parameter of the lattice fluid with SALR-potential on the simple square lattice .....	24
<b>Bokun G. S., Holovko M. F., Vikhrenko V. S.</b> Potential distribution in solid electrolyte between flat electrodes .....	29
<b>PHYSICS.....</b>	<b>36</b>
<b>Kruk M. M., Klenitsky D. V., Maes W.</b> Quantum-chemical study of the molecular structure of alkylated corroles.....	36
<b>Klenitsky D. V., Kruk M. M.</b> Study of temporal profile of dye fluorescence upon excitation with rectangular light pulses .....	43
<b>COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING SCIENCES .....</b>	<b>49</b>
<b>MODELLING OF PROCESSES AND MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS .....</b>	<b>49</b>
<b>Shumski A. N., Karpovich D. S.</b> Setting the parameters of control law for stabilizing height of unmanned aerial vehicles .....	49
<b>Podobed M. Yu., Karpovich D. S.</b> Features of control of air heater units in air conditioning systems .....	55
<b>Podobed M. Yu., Karpovich D. S.</b> Block of fuzzy recovery signals.....	60
<b>Podobed M. Yu., Saroka V. V.</b> Adaptive management of air conditioning system by generalized temperature mode criteria .....	67
<b>Ovtsov S. A., Saroka V. V.</b> Increase in the speed of operation of the portal operator of the galvanic line type by the dynamic programming of Bellman.....	72
<b>Pekar' S. A., Smelov V. V.</b> Mathematical model of intelligent behavior of 3D-object .....	78
<b>Burmakova A. V., Smelov V. V., Zakharov A. A.</b> The implementation of the mathematical model for predicting the consequences of the emergency exercise of oil products.....	82
<b>PROCESSING AND TRANSMISSION OF INFORMATION.....</b>	<b>88</b>
<b>Romanenko D. M., Patsei N. V., Drako A. M.</b> Features of linear block codes decoding with use of recurrent and radial-basis neural networks .....	88
<b>Wahab A., Romanenko D. M.</b> Methods of digital steganography based on the modification of color image parameters .....	94
<b>Navrotskiy Ya. Yu., Patsei N. V.</b> Caching policies implementation in information-centric networks	99
<b>Blinova E. A., Urbanovich P. P.</b> A steganographic method based on the embedding of additional coordinates into images of SVG format.....	104

---

<b>SYSTEM ANALYSIS AND TRAINING SYSTEMS .....</b>	<b>110</b>
<b>Dutova I. G., Mokhov V. A.</b> Statement of the system analysis problem and metaoptimization of parameters population algorithms .....	110
<b>Kobaylo A. S.</b> Peculiarities of architectural organization of computer systems of real time. Parallel-conveyor computers .....	115
<b>Kobaylo A. S.</b> The use of hybrid design methods of computing real-time systems .....	120
<b>ALGORITHMIC AND PROGRAMMING .....</b>	<b>125</b>
<b>Busnyuk N. N., Burmakova A. V., Smelov V. V.</b> Heuristic algorithm for computing the ground pollution spot form by oil product .....	125
<b>Busnyuk N. N., Novikov V. A.</b> Computer testing from OLTP methodology positions .....	130
<b>Malyshev Ye. V., Smelov V. V.</b> Plagiarism detecting algorithms for software code .....	135

Редактор *Ю. А. Юрчик*  
Компьютерная верстка *О. Ю. Шантарович*  
Корректор *Ю. А. Юрчик*

Подписано в печать 15.03.2018. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.  
Усл. печ. л. 16,5. Уч.-изд. л. 18,0.  
Тираж 100 экз. Заказ 99.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
УО «Белорусский государственный технологический университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/227 от 20.03.2014.  
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.