

ISSN 2520-6141



# ТРУДЫ БГТУ

Научный журнал

---

Серия 3

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
НАУКИ И ИНФОРМАТИКА**

**№ 2 (200) 2017 год**

---

**Рубрики номера:**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Математика

Механика

Физика

ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Моделирование процессов  
и управление в технических системах

Обработка и передача информации

Системный анализ и обучающие системы

Алгоритмизация и программирование

Минск 2017

Учреждение образования  
«Белорусский государственный  
технологический университет»

# ТРУДЫ БГТУ

**Научный журнал**

*Издается с июля 1993 года*

**Серия 3**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
НАУКИ И ИНФОРМАТИКА**

**№ 2 (200) 2017 год**

*Выходит два раза в год*

Минск 2017

**Учредитель** – учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет»

**Главный редактор журнала** – Войтов Игорь Витальевич, доктор технических наук, доцент, Республика Беларусь

**Редакционная коллегия журнала:**

Дормешкин О. Б., доктор технических наук, доцент (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;  
Жарский И. М., кандидат химических наук, профессор (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;  
Кунтыш В. Б., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Прокопчук Н. Р., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор химических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Водопьянов П. А., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор философских наук, профессор, Республика Беларусь;  
Новикова И. В., доктор экономических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Долгова Т. А., кандидат физико-математических наук, доцент, Республика Беларусь;  
Торчик В. И., доктор биологических наук, Республика Беларусь;  
Захарук Т., доктор педагогических наук, профессор, Республика Польша;  
Пайвинен Ристо, доктор наук, профессор, Финляндская Республика;  
Барчик Стэфан, доктор наук, профессор, Словацкая Республика;  
Жантасов К. Т., доктор технических наук, профессор, Республика Казахстан;  
Харша Ратнавир, доктор наук, профессор, Королевство Норвегия;  
Рангелова Е. М., доктор педагогических наук, профессор, Республика Болгария;  
Шкляр Бенцион, профессор, Государство Израиль;  
Хассель Л. Г., доктор наук, профессор, Королевство Швеция;  
Файгле В., доктор наук, профессор, Федеративная Республика Германия;  
Флорик Е. А., кандидат биологических наук, доцент (секретарь), Республика Беларусь.

**Редакционная коллегия серии:**

Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор (главный редактор серии), Республика Беларусь;  
Урбанович П. П., доктор технических наук, профессор (заместитель главного редактора серии), Республика Беларусь;  
Вихренко В. С., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Колесников В. Л., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Калинин А. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Сайко А. П., доктор физико-математических наук, Республика Беларусь;  
Квасов Н. Т., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Минченко Л. И., доктор физико-математических наук, Республика Беларусь;  
Леваков А. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Мазаник С. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Щекин А. К., доктор физико-математических наук, профессор, Российская Федерация;  
Головкин М. Ф., член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, Украина;  
Бартошевич Збигнев, доктор габилитованный, Республика Польша;  
Шкляр Бенцион, профессор, Государство Израиль;  
Аргиракис Панос, доктор наук, профессор, Греческая Республика;  
Орлюкас Антанас Феликсас, доктор наук, Литовская Республика;  
Горецкий Иржи, доктор габилитованный, Республика Польша;  
Соловьева И. Ф., кандидат физико-математических наук, доцент (ответственный секретарь), Республика Беларусь;  
Кобайло А. С., кандидат технических наук (секретарь), Республика Беларусь.

**Адрес редакции:** ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.

Телефоны: главного редактора журнала – (+375 17) 226-14-32;

главного редактора серии – (+375 17) 399-49-60.

E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

Свидетельство о государственной регистрации средств массовой информации  
№ 1329 от 23.04.2010, выданное Министерством информации Республики Беларусь.

*Журнал включен в «Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований»*

Educational institution  
“Belarusian State Technological University”

# PROCEEDINGS OF BSTU

**Scientific Journal**

*Published monthly since July 1993*

**Issue 3**

**PHYSICS  
AND MATHEMATICS.  
INFORMATICS**

**No. 2 (200) 2017**

*Published biannually*

Minsk 2017

**Publisher** – educational institution “Belarusian State Technological University”

**Editor-in-chief** – Voitau Ihar Vital’evich, DSc (Engineering), Associate Professor, Republic of Belarus

**Editorial (Journal):**

Dormeshkin O. B., DSc (Engineering), Associate Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;  
Zharskiy I. M., PhD (Chemistry), Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;  
Kuntyshev V. B., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;  
Prokopchuk N. R., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Chemistry), Professor, Republic of Belarus;  
Vodop’yanov P. A., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Philosophy), Professor, Republic of Belarus;  
Novikova I. V., DSc (Economics), Professor, Republic of Belarus;  
Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Dolgova T. A., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Republic of Belarus;  
Torchik V. I., DSc (Biology), Republic of Belarus;  
Zakharuk T., DSc (Pedagogics), Professor, Republic of Poland;  
Paivinen Risto, DSc, Professor, Republic of Finland;  
Barcik Štefan, DSc, Professor, Slovak Republic;  
Zhantasov K. T., DSc (Engineering), Professor, Republic of Kazakhstan;  
Harsha Ratnaweera, DSc, Professor, Kingdom of Norway;  
Rangelova E. M., DSc (Pedagogics), Professor, Republic of Bulgaria;  
Shklyar Benzion, Professor, State of Israel;  
Hassel L. G., DSc, Professor, Kingdom of Sweden;  
Faigle W., DSc, Professor, Federal Republic of Germany;  
Flyurik E. A., PhD (Biology), Associate Professor (secretary), Republic of Belarus.

**Editorial (Issue):**

Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor (managing editor), Republic of Belarus;  
Urbanovich P. P., DSc (Engineering), Professor (sub-editor), Republic of Belarus;  
Vikhrenko V. S., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Kolesnikov V. L., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;  
Kalinin A. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Sayko A. P., DSc (Physics and Mathematics), Republic of Belarus;  
Kvasov N. T., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Minchenko L. I., DSc (Physics and Mathematics), Republic of Belarus;  
Levakov A. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Mazanik S. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Shchekin A. K., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Russian Federation;  
Golovko M. F., Corresponding Member, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Ukraine;  
Bartosevich Zbigniew, DSc, Republic of Poland;  
Shklyar Benzion, Professor, State of Israel;  
Argyris Panos, DSc, Greece;  
Orlukas Antanas Feliksas, DSc, Republic of Lithuania;  
Gorezki Irshi, DSc, Republic of Poland;  
Solov’yeva I. F., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor (executive editor), Republic of Belarus;  
Kobaylo A. S., PhD (Engineering) (secretary), Republic of Belarus.

**Contact:** 13a, Sverdlova str., 220006, Minsk.  
Telephones: editor-in-chief (+375 17) 226-14-32;  
managing editor (+375 17) 399-49-60.  
E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

УДК 517.935.2+519.71

**И. М. Борковская, О. Н. Пыжкова**

Белорусский государственный технологический университет

### **О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ГИБРИДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Изучение представления решений гибридных динамических систем и их качественных свойств является актуальной проблемой. Адекватность гибридных систем определяет их важность с точки зрения практических приложений. В работе рассмотрены свойства линейных гибридных дискретно-непрерывных систем, в частности, гибридных систем с многомерным (2-D-мерным) временем, состоящих из непрерывной и дискретной составляющих. Для указанных систем в симметрической форме представлены условия устойчивости разных типов (слабой асимптотической устойчивости, сильной асимптотической устойчивости,  $(\alpha, \gamma)$ -устойчивости). Исследована возможность стабилизации указанных систем регулятором, не выводящим систему за пределы рассматриваемого класса. Даны теоремы, представляющие собой условия устойчивости указанных типов. Сформулированы достаточные условия стабилизируемости систем в скалярном случае (в смысле рассматриваемых типов сходимости). Предложенный подход возможен для исследования стабилизируемости и в смысле других типов устойчивости.

**Ключевые слова:** гибридные дискретно-непрерывные системы, сильная асимптотическая устойчивость, стабилизация, достаточные условия стабилизируемости.

**I. M. Borkovskaya, O. N. Pyzhkova**

Belarusian State Technological University

### **ON THE STABILIZATION OF SOME KINDS OF HYBRID DYNAMIC SYSTEMS**

The study of the representation of solutions of hybrid dynamical systems and their qualitative properties is an actual problem. The adequacy of hybrid systems determines their importance from the point of view of practical applications. The properties of linear hybrid discrete-continuous systems, hybrid systems with multidimensional (2-D-dimensional) time, consisting of continuous and discrete components are considered. For such systems in symmetrical form, the stability conditions of various types (weak asymptotic stability, strong asymptotic stability, stability) are presented. The possibility of stabilization of these systems by a controller that does not lead the system beyond the limits of the considered class is studied. Theorems which are the stability conditions of the indicated types are presented. Sufficient conditions for the stabilizability of systems in the scalar case (in the sense of the considered types of convergence) are formulated. The proposed approach is possible for the study of stabilization in the sense of other types of stability.

**Key words:** hybrid discrete-continuous systems, strong asymptotic stability, stabilization, sufficient conditions of stabilizability.

**Введение.** Гибридные системы – это математические модели реальных систем управления, в которых непрерывная динамика находится в комбинации с дискретной, либо наряду

с динамическими связями имеют место и алгебраические зависимости. Таким образом, гибридные системы описывают процессы, природа которых носит неоднородный характер.

Такие системы широко используются в автомобилестроении, авиастроении, робототехнике и других областях. Классическим примером гибридной системы является система нагрева и охлаждения жилого дома. Печь и кондиционер, наряду с характеристиками теплового потока, формируют систему, которая должна управляться. Термостат управляет этой системой дискретно: в блок термостата передаются сигналы выносных или встроенных датчиков температуры. В основе работы термостата лежит принцип терморегулятора, посредством которого происходит автоматическая установка и регулирование температуры отопительных приборов. Примером гибридной системы может также служить система коммутации, поведение которой описывается конечным числом динамических моделей вместе со сводом правил для переключения среди этих моделей. Адекватность гибридных систем определяет их важность с точки зрения практических приложений. Изучение представления решений таких систем и их качественных свойств является актуальной проблемой. Исследованию гибридных систем посвящены, в частности, работы [1–6].

К важнейшим задачам теории управления для гибридных систем относятся вопросы представления решений, относительной управляемости, задачи устойчивости, стабилизации, модального управления и другие. Виды гибридных систем многообразны. Среди них выделяют, в частности, ГДР системы (дифференциально-разностные системы), которые описывают процессы, где наряду с динамическими связями встречаются и алгебраические зависимости, и ГДН системы (дискретно-непрерывные системы), содержащие как непрерывные, так и дискретные переменные:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh), t \in [kh, (k+1)h), \quad (1)$$

$$y(kh+h) = A_{21}x(kh) + A_{22}y(kh) + Bu(kh), \quad (2)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(kh) \in \mathbb{R}^m$ ,  $u(kh) \in \mathbb{R}^r$ ,  $h > 0$ , и  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $B$  – постоянные матрицы соответствующих размеров, начальные условия для системы (1), (2) задаются в виде

$$x(0) = x(+0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Изучение устойчивости указанной выше ГДН системы проводится, например, в работе [7], а в работе [8] подобная система изучается с точки зрения ее относительной управляемости и достижимости.

Важным классом гибридных систем является класс гибридных систем с многомерным (2-D-мер-

ным) временем. Такие системы включают непрерывную и дискретную составляющие:

$$\dot{x}_1(t, k) = A_{11}x_1(t, k) + A_{12}x_2(t, k) + B_1u(t, k),$$

$$t \in [0, +\infty),$$

$$x_2(t, k+1) = A_{21}x_1(t, k) + A_{22}x_2(t, k) + B_2u(t, k),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Такие системы изучаются, в частности, в статье [9]. В работе [10] для линейных гибридных дискретно-непрерывных систем с многомерным (2-D-мерным) временем в симметрической форме получены явные представления решения на основе сопряженных систем и путем разложения в ряды по решениям определяющих уравнений таких систем. В статье [11] исследуется такое важнейшее свойство указанных систем, как устойчивость.

В настоящей работе продолжено исследование устойчивости гибридных систем с многомерным временем, рассматривается задача стабилизации таких систем.

**Основная часть.** В работе [7] получено условие стабилизируемости указанной выше ГДН системы (1), (2) регулятором вида

$$u(kh) = Q_1 x(kh) + Q_2 y(kh), k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  – постоянные матрицы размеров  $r \times n$  и  $r \times m$  соответственно. Замкнутая система имеет вид:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh), t \in [kh, (k+1)h),$$

$$y(kh+h) = (A_{21} + BQ_1)x(kh) + (A_{22} + BQ_2)y(kh).$$

**Теорема 1.** Система (1), (2) является стабилизируемой дискретным регулятором (3) тогда и только тогда, когда

$$\text{rank}[\lambda I_{n+m} - \Sigma_h, \Delta] = n + m,$$

для всех комплексных чисел  $\lambda$  таких, что  $|\lambda| \geq 1$ , где

$$\Sigma_h = \begin{bmatrix} e^{A_{11}h} & \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)} d\tau A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим теперь гибридную дискретно-непрерывную 2-D-систему в симметрической форме (по отношению к операторам дифференцирования и сдвига):

$$\dot{x}_1(t, k) = A_{11}x_1(t, k) + A_{12}x_2(t, k) + B_1u(t, k), \quad (4)$$

$$t \in [0, +\infty),$$

$$x_2(t, k+1) = A_{21}x_1(t, k) + A_{22}x_2(t, k) + B_2u(t, k), \quad (5)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\dot{x}_1(t, k) = \frac{\partial x_1(t, k)}{\partial t}$ ,  $x_1(t, k) \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_2(t, k) \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,

$x_1(t, k), x_2(t, k)$  –  $n_1$ - и  $n_2$ -векторы состояния системы;  $u(t, k) \in \mathbb{R}^r$  – вектор управляющего воздействия,  $t \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$  – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Пусть граничные (начальные) условия для (4) и (5) заданы в виде

$$x_1(0, k) = x_1(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$x_2(t, 0) = x_2(t), \quad t \in [0, +\infty). \quad (7)$$

В нормальной форме гибридную модель 2-D-системы можно записать следующим образом:

$$\dot{x}_1(t, i) = A_{11}x_1(t, i) + A_{12}x_2(t, i) + B_1u(t, i), \quad (8)$$

$$t \in [0, +\infty),$$

$$x_2(t, i) = A_{21}x_1(t, i) + A_{22}x_2(t, i-1) + B_2u(t, i), \quad (9)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots,$$

начальные условия:

$$x_1(0, i) = x_1(i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

$$x_2(t, -1) = x_2(t), \quad t \in [0, +\infty). \quad (11)$$

Далее будем рассматривать систему (4), (5) в симметрической форме при выключенном управлении ( $B_1 = B_2 = 0$ ).

В работе [10] доказано, что существует единственное решение системы (4), (5), удовлетворяющее начальным условиям (6), (7), в работе [11] представлены условия асимптотической устойчивости системы (4), (5). Приведем определения устойчивости, которые понадобятся нам в дальнейшем.

**Определение 1.** Система (4), (5) называется:

1) слабо асимптотически устойчивой, если для любых ограниченных начальных функций  $x_1(\cdot), x_2(\cdot)$  в (3), (4) соответствующее решение  $x_1(t, k), x_2(t, k)$  системы (1), (2) обладает свойством:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ k \rightarrow +\infty}} (\|x_1(t, k)\| + \|x_2(t, k)\|) = 0,$$

где символ  $\|d\|$  обозначает норму (евклидову) вектора  $d$ ;

2) сильно асимптотически устойчивой, если найдутся такие действительные числа  $M > 0$ ,

$\alpha > 0, 0 < \gamma < 1$ , что для любых ограниченных начальных функций соответствующее решение системы (4), (5) обладает следующим свойством:

$$\|x_1(t, k)\| + \|x_2(t, k)\| \leq M (e^{-\alpha t} + |\gamma|^k), \quad (12)$$

$$t > 0, k = 1, 2, \dots;$$

3)  $(\alpha, \gamma)$ -устойчивой, если найдется такое действительное число  $M > 0$ , что для любых ограниченных начальных функций соответствующее решение системы (4), (5) удовлетворяет требованию (12).

Отметим, что между указанными понятиями устойчивости существует следующая связь:

$$3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1)$$

Здесь 1) – 3) означают соответствующие понятия устойчивости из определения 1.

**Определение 2.** Уравнение вида

$$\det \begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \mu I_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

назовем характеристическим уравнением, а его корни (в общем случае комплексные) – характеристическими числами (значениями) системы (4), (5).

**Теорема 2** (необходимые условия асимптотической устойчивости):

1) если система (4), (5) слабо асимптотически устойчива, то для корней  $(\lambda, \mu)$  характеристического уравнения (13) выполняется условие:  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  и  $|\mu| \leq 1$  или  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$  и  $|\mu| < 1$ ;

2) если система (4), (5) сильно асимптотически устойчива, то для корней  $(\lambda, \mu)$  характеристического уравнения (13) соблюдается условие:  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  и  $|\mu| < 1$ ;

3) если система (4), (5)  $(\alpha, \gamma)$ -устойчива, то для корней  $(\lambda, \mu)$  характеристического уравнения (13) выполняется условие:  $\operatorname{Re} \lambda \leq -\alpha$  и  $|\mu| \leq \gamma$  [11].

Рассмотрим теперь систему (4), (5) в скалярном случае, когда  $A_{11} = a_{11}$ ,  $A_{12} = a_{12}$ ,  $A_{21} = a_{21}$ ,  $A_{22} = a_{22}$  – действительные числа. Верна теорема 3 [11].

**Теорема 3.** Для того, чтобы система (4), (5) скалярных уравнений была сильно асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$1) a_{12}a_{21} = 0;$$

$$2) |a_{22}| < 1, \quad a_{11} < 0.$$

Вид характеристического уравнения в скалярном случае упрощается:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \mu - a_{22} \end{bmatrix} =$$



$= (\lambda - a_{11})(\mu - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0$ , откуда  $\mu = a_{22} + \frac{a_{12}a_{21}}{\lambda - a_{11}}$  и с учетом необходимого  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  и  $|\mu| < 1$  заключаем, что система сильно асимптотически устойчива, когда, во-первых,  $a_{12}a_{21} = 0$ , во-вторых,  $|a_{22}| < 1$ ,  $a_{11} < 0$ .

Это условие является и достаточным. Действительно, поскольку  $a_{12}a_{21} = 0$ , то либо  $a_{12} = 0$ , либо  $a_{21} = 0$ . Пусть, например,  $a_{12} = 0$ . Тогда система (4), (5) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t, k) &= a_{11}x_1(t, k), \\ x_2(t, k+1) &= a_{22}x_2(t, k) + a_{21}x_1(t, k), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} x_1(t, k) &= e^{a_{11}t} x_1(0, k) = e^{a_{11}t} x_1(k), \\ x_2(t, k+1) &= a_{22}x_2(t, k) + a_{21}e^{a_{11}t} x_1(k) = \\ &= a_{22}^{k+1} x_2(t, 0) + a_{22}^k a_{21} e^{a_{11}t} x_1(0) + a_{22}^{k-1} a_{21} e^{a_{11}t} \times \\ &\times x_1(1) + \dots + a_{22} a_{21} e^{a_{11}t} x_1(k-1) + a_{21} e^{a_{11}t} x_1(k) = \\ &= a_{22}^{k+1} x_2(0) + a_{21} e^{a_{11}t} (a_{22}^k x_1(0) + \dots + x_1(k)). \end{aligned}$$

Поскольку начальные функции ограничены:  $\|x_1(k)\| \leq L$ ,  $\|x_2(t)\| \leq L$  при некотором числе  $L > 0$  для всех  $t > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то

$$\begin{aligned} \|x_1(t, k)\| + \|x_2(t, k)\| &= \|e^{a_{11}t} x_1(k)\| + \\ &+ \|a_{22}^k x_2(0) + a_{21} e^{a_{11}t} (a_{22}^{k-1} x_1(0) + \dots + x_1(k-1))\| \leq \\ &\leq L e^{a_{11}t} + L |a_{22}|^k + L |a_{21}| e^{a_{11}t} (|a_{22}|^{k-1} + \dots + 1) \leq \\ &\leq L e^{a_{11}t} + L |a_{22}|^k + \frac{L |a_{21}|}{1 - |a_{22}|} e^{a_{11}t} \leq \\ &\leq M (e^{a_{11}t} + |a_{22}|^k), \quad t > 0, k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где  $M = \max \left\{ L, \frac{L |a_{21}|}{1 - |a_{22}|} + 1 \right\}$ , и система (4), (5)

в скалярном случае и  $a_{12} = 0$  является сильно асимптотически устойчивой. В случае  $a_{21} = 0$  система принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t, k) &= a_{11}x_1(t, k) + a_{12}x_2(t, k), \\ x_2(t, k+1) &= a_{22}x_2(t, k), \end{aligned}$$

откуда с учетом формулы Коши получаем:

$$\begin{aligned} x_2(t, k) &= a_{22}^k x_2(t), \\ x_1(t, k) &= e^{a_{11}t} x_1(0, k) + \int_0^t e^{a_{11}(t-\tau)} a_{22}^k x_2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|x_1(t, k)\| + \|x_2(t, k)\| &\leq e^{a_{11}t} \|x_1(k)\| + \\ &+ \int_0^t e^{a_{11}(t-\tau)} |a_{22}|^k \|x_2(\tau)\| d\tau + |a_{22}|^k \|x_2(t)\| \leq L e^{a_{11}t} + \\ &+ L \frac{1 - e^{a_{11}t}}{a_{11}} |a_{22}|^k + L |a_{22}|^k \leq M (e^{a_{11}t} + |a_{22}|^k), \end{aligned}$$

где  $M = \max \left\{ L, \frac{L}{a_{11}} + 1 \right\}$ , и система (4), (5) в

скалярном случае и  $a_{21} = 0$  является сильно асимптотически устойчивой.

Аналогично можно получить следующую теорему [11].

**Теорема 4.** Для того, чтобы система (4), (5) скалярных уравнений была  $(\alpha, \gamma)$ -устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1)  $a_{12}a_{21} = 0$ ;
- 2)  $a_{11} \leq -\alpha$ ,  $|a_{22}| < \gamma$ .

Присоединим к системе (4), (5) регулятор, не выводящий систему за пределы заданного класса:

$$u(t, k) = Q_1 x_1(t, k) + Q_2 x_2(t, k), \quad (14)$$

где  $Q_1$  – матрица размера  $r \times n_1$ ,  $Q_2$  – матрица размера  $r \times n_2$ .

**Определение 3.** Система (4), (5) называется стабилизируемой (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (14), если найдутся такие матрицы  $Q_1, Q_2$  из (14), что замкнутая система (4), (5), (14) является сильно асимптотически устойчивой.

**Задача.** Получить условия стабилизируемости гибридной 2-D-системы (4), (5) в симметрической форме регулятором (14).

Будем использовать полученные ранее условия сильной асимптотической устойчивости. Пусть  $A_{11} = a_{11}$ ,  $A_{12} = a_{12}$ ,  $A_{21} = a_{21}$ ,  $A_{22} = a_{22}$ ,  $B_1 = b_1$ ,  $B_2 = b_2$ ,  $Q_1 = q_1$ ,  $Q_2 = q_2$  – действительные числа, то есть система (4), (5), (14) рассматривается в скалярном случае.

Замкнутая система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t, k) &= (a_{11} + b_1 q_1) x_1(t, k) + \\ &+ (a_{12} + b_1 q_2) x_2(t, k), \\ x_2(t, k+1) &= (a_{21} + b_2 q_1) x_1(t, k) + \\ &+ (a_{22} + b_2 q_2) x_2(t, k). \end{aligned}$$

Для выполнения первого условия теоремы 3 возможны следующие способы выбора коэффициентов регулятора (11):

$$1) q_2 = -\frac{a_{12}}{b_1}; 2) q_1 = -\frac{a_{21}}{b_2}.$$

Тогда в первом случае при условии  $\left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < 1$  коэффициент  $q_1$  можно выбрать следующим образом:

$$\text{при } b_1 > 0: q_1 < -\frac{a_{11}}{b_1},$$

$$\text{при } b_1 < 0: q_1 > -\frac{a_{11}}{b_1}.$$

Во втором случае при условии  $a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0$  коэффициент  $q_2$  будем выбирать так, чтобы  $|a_{22} + b_2 q_2| < 1$ .

Полученный регулятор обеспечит согласно теореме 3 сильную асимптотическую устойчивость замкнутой системы (4), (5), (14). Таким образом, достаточное условие стабилизируемости можно сформулировать в виде следующей теоремы.

**Теорема 5.** Для того, чтобы система (4), (5) в скалярном случае была стабилизируема (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (14), достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

$$1) \left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < 1;$$

$$2) a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0.$$

Рассмотрим теперь условия стабилизируемости в смысле  $(\alpha, \gamma)$ -устойчивости. По анало-

гии с предыдущими выкладками, используя теорему 4, приходим к следующим выводам:

если  $q_2 = -\frac{a_{12}}{b_1}$ , то при  $\left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < \gamma$  и выборе

$$q_1 \leq \frac{-\alpha - a_{11}}{b_1} \quad \text{при } b_1 > 0, \quad q_1 \geq \frac{-\alpha - a_{11}}{b_1} \quad \text{при}$$

$b_1 < 0$ , получаем  $(\alpha, \gamma)$ -устойчивую замкнутую

систему. При  $q_1 = -\frac{a_{21}}{b_2}$  условием устойчивости

будет выполнение неравенства  $a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} \leq -\alpha$ .

Приходим к следующей теореме.

**Теорема 6.** Для того, чтобы система (4), (5) в скалярном случае была стабилизируема (в смысле  $(\alpha, \gamma)$ -устойчивости) регулятором (14), достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$1) \left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < \gamma;$$

$$2) a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} \leq -\alpha.$$

**Заключение.** В работе проведен анализ результатов по стабилизации дискретно-непрерывных систем. Для линейной гибридной 2-D-системы в симметрической форме в скалярном случае получены достаточные условия стабилизируемости (в смысле сильной асимптотической устойчивости,  $(\alpha, \gamma)$ -устойчивости) регулятором, не выводящим систему за пределы заданного класса. С помощью предложенного подхода можно также провести исследование стабилизируемости и в смысле других типов устойчивости.

### Литература

1. Dai L. Singular control systems // Lecture notes in control and information sciences: 118. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. 319 p.
2. De la Sen M. A note about total stability of a class of hybrid systems // Informatica. 2006. Vol. 17, no. 4. P. 565–576.
3. Van der Schaft A., Schumacher H. An introduction to hybrid dynamical systems. Berlin: Springer, 2000. 324 p.
4. Ахундов А. А. Управляемость линейных гибридных систем // Управляемые системы: сб. ст. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1975. Вып. 14. С. 4–10.
5. Куржанский А. Б. Отчет о 16-м международном конгрессе ИФАК (IFAC) – международной федерации по автоматическому управлению // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 183–189.
6. Точилин П. А., Куржанский А. Б. Задачи достижимости и синтеза управлений для гибридных систем. М.: МГУ, 2008. 176 с.
7. Марченко В. М., Борковская И. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 7–10.
8. Марченко В. М., Пыжкова О. Н. Относительная достижимость линейных стационарных систем, управляемых дискретным регулятором // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 11–13.

9. Марченко В. М., Пыжкова О. Н. Относительная управляемость линейных стационарных гибридных систем с многомерным временем // Труды БГТУ. 2008. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–5.

10. Марченко В. М., Борковская И. М., Пыжкова О. Н. Гибридные динамические системы с многомерным временем. Представление решений // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–9.

11. Марченко В. М., Борковская И. М., Пыжкова О. Н. Устойчивость гибридных динамических систем с многомерным временем. // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 5–9.

### References

1. Dai L. Singular control systems. *Lecture notes in control and information sciences*: 118. Berlin; Heidelberg, Springer-Verlag, 1989. 319 p.

2. De la Sen M. A note about total stability of a class of hybrid systems. *Informatica*, 2006, vol. 17, no. 4, pp. 565–576.

3. Van der Schaft A., Schumacher H. An introduction to hybrid dynamical systems. Berlin: Springer, 2000. 324 p.

4. Akhundov A. A. Controllability of the linear hybrid systems. *Upravlyaemye sistemy: sbornik statey* [Controlled systems]. Novosibirsk, Institute of Mathematics, 1975, pp. 4–10 (In Russian).

5. Kurzhanskiy A. B. The 16-th IFAC Congress report. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 2006, no. 1, pp. 183–189 (In Russian).

6. Tochilin P. A., Kurzhanskiy A. B. *Zadachi dostizhimosti i sinteza upravleniy dlya gibridnykh sistem* [The tasks of reachability and control synthesis for hybrid systems]. Moscow, MGU, 2008. 176 p.

7. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M. Stability and stabilization of the linear hybrid discrete-continues stationary systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 7–10 (In Russian).

8. Marchenko V. M., Pyzhkova O. N. Relative reachability of the linear stationary hybrid systems controlled by the discrete regulator. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 11–13 (In Russian).

9. Marchenko V. M., Pyzhkova O. N. Relative controllability of the linear stationary hybrid systems with multidimensional time. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physical-mathematical sciences and informatics, 2008, issue VI, pp. 3–5 (In Russian).

10. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N. Hybrid dynamic 2-D-systems. Representation of solutions. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 3–9 (In Russian).

11. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N. The stability of hybrid dynamic 2-D-systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 5–9 (In Russian).

### Информация об авторах

**Борковская Инна Мечиславовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: borkovskaia@gmail.com

**Пыжкова Ольга Николаевна** – кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

### Information about the authors

**Borkovskaya Inna Mechislavovna** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: borkovskaia@gmail.com

**Pyzhkova Olga Nikolaevna** – PhD (Physics and Mathematics), Head of the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

Поступила 21.04.2017

УДК 517.948

**С. В. Пономарева<sup>1</sup>, О. Н. Пыжкова<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Белорусский государственный университет<sup>2</sup>Белорусский государственный технологический университет**ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ  
СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ  
С ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ЛОГАРИФМА**

Рассматриваются уравнения первого рода со степенно-логарифмическими ядрами с действительными степенями логарифмов на отрезке действительной оси в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций. К таким уравнениям приводят задачи как из некоторых разделов математики, в частности, дифференциальных уравнений, так и из физики, механики и других естественных наук. При этом проблема обращения с точки зрения приложений является одной из центральных. С этой проблемой тесно связана задача получения условий разрешимости рассматриваемых уравнений в различных пространствах. Ограничимся в данной работе случаем абсолютной непрерывности весовой функции и значениями параметра на промежутке  $0 < \alpha < 1$  (для значений  $\alpha$  за границами этого промежутка придется дополнительно дифференцировать или интегрировать дополнительно соответствующее выражение  $[\alpha]$  раз). Решение такого уравнения было представлено в [1], но с использованием производной от выражения, содержащего интеграл от свободного члена с функцией Вольтерра в ядре. В данной работе получены достаточные условия разрешимости рассматриваемого уравнения в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций и представляется другой вид решения в терминах правой части. Уравнение решается методами дробного интегрирования с использованием классических интегралов Римана – Лиувилля, специальных функций Вольтерра и операторов типа свертки.

**Ключевые слова:** интегральное уравнение, уравнения со степенно-логарифмическими ядрами, интегральный оператор типа свертки.

**S. V. Ponomareva<sup>1</sup>, O. N. Pyzhkova<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Belarusian State University<sup>2</sup>Belarusian State Technological University**THE SUFFICIENT CONDITIONS OF SOLVABILITY  
OF EQUATIONS WITH POWER-LOGARITHMIC KERNELS**

The integral equations of the first kind with power-logarithmic kernels with real degrees of logarithms on a segment of the real axis in the space of absolutely continuous functions are investigated. The problems from certain sections of mathematics (in particular differential equations) as well as from physics, mechanics, and other natural sciences result in such equations. In this case, the problem of addressing from the point of applications view is one of the central ones. This problem is closely connected with the problem of obtaining the solvability conditions for the equations in various spaces. In this paper, we limited ourselves to the case of absolute continuity of weight function and parameter values on the interval  $0 < \alpha < 1$  (for values  $\alpha$  beyond this interval we need to differentiate or integrate appropriate expression  $[\alpha]$  times additional). The solution of thus equation was presented in [1], but using a derivative of the expression containing the integral of the free member with the Volterra function in the kernel. We obtain the sufficient conditions for the solvability of the considered equations and establish a different kind of solution in terms of the right side. The equation can be solved by fractional integration methods using classical Riemann-Liouville integrals, special Volterra functions and operators of convolution type.

**Key words:** integral equation, equation with power-logarithmic kernels, operator of convolution type.

**Введение.** Решение интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами с целыми степенями логарифмов в пространствах интегрируемых и непрерывных функций исследовалось в монографии [1], другой вид решения и достаточные условия разрешимости в тех же пространствах были получены в [2], для

уравнений с чисто логарифмическим ядром с действительными степенями логарифмов – в [3]. В [1] был предложен метод решения уравнений с действительными степенями логарифмов, однако не было получено условий разрешимости этого уравнения в определенных пространствах функций, при которых решение может выражаться

в терминах правой части исходного уравнения. Для решения указанной задачи понадобилось исследование некоторых интегральных операторов. Более того, представляет также интерес исследование рассматриваемых уравнений с комплексными значениями параметра.

### Основная часть.

**1. Предварительные сведения.** Рассматриваются уравнения

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x c(x-t)(x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t} \phi(t) dt = f(x),$$

$$(a < x < b < \infty) \quad (1)$$

со степенно-логарифмическими ядрами с действительными степенями логарифмов на отрезке  $[a, b]$  действительной оси  $-\infty < a < b < \infty$ ,  $\gamma > b - a$  в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций  $AC[a, b]$ . Будем рассматривать случай абсолютной непрерывности функции  $c(x)$  и  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta > -1$ .

Для решения нам понадобятся некоторые специальные функции и обозначения:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

$$\mu_{t,\beta}(x) = \int_0^\infty \frac{x^t t^\beta}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(t+1)} dt =$$

$$= I_\tau^\beta \left[ \frac{1}{\Gamma(\tau)} \left( \frac{x}{\gamma} \right)^{\tau-1} \right] (t), \quad -\infty < \beta < \infty$$

и некоторые другие. Их определения и свойства описываются, например, в [1] и [4].

В монографии [1] приводится формула обращения интегрального оператора типа свертки

$$(I_{a+}^{\alpha,\beta} \phi)(x) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t} \phi(t) dt = f(x), \quad (2)$$

$$(a < x < b < \infty)$$

и условия разрешимости уравнения (1) в следующей формулировке.

**Теорема 1.** Для разрешимости уравнения (2) в пространстве  $L_p(a, b)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  необходимо и достаточно, чтобы свободный член  $f$  был представим в виде

$$f(x) = \int_a^x \mu_{\alpha,\beta}(x-t) \chi(t) dt, \quad \chi(t) \in L_p(a, b). \quad (3)$$

При выполнении этого условия решение  $\phi$  единственно и выражается формулой

$$\phi(x) = (E + T_\psi)^{-1} \times$$

$$\times \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\gamma} \int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t) f(t) dt \right), \quad (4)$$

где оператор  $(T_\psi \phi)(x) = \int_a^x \psi(x-t) \phi(t) dt$  (см. [1, с. 487]).

### 2. Интегральный оператор типа свертки.

Для того чтобы получить другой вид решения уравнения (1), введем обозначение по аналогии с целочисленным случаем (см. [1, с. 483]):

$$(J_{\gamma,\alpha,\beta}^{a+} f)(x) = \frac{1}{\gamma} \int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t) f(t) dt. \quad (5)$$

Для оператора  $J_{\gamma,\alpha,\beta}^{a+} f$  в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций выполняется следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $f(x) \in AC[a, b]$ . Тогда  $(J_{\gamma,\alpha,\beta}^{a+} f)(x) \in AC[a, b]$ .

**Доказательство.** Так как функция  $f(x) \in AC[a, b]$ , то она представима в виде  $f(x) = \int_a^x f'(t) dt + f(a)$ . Подставим это представление в (3) и, осуществляя перестановку порядка интегрирования во втором слагаемом по формуле Дирихле, имеем:

$$(J_{\gamma,\alpha,\beta}^{a+} f)(x) =$$

$$= \frac{1}{\gamma} \int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t) \left[ f(a) + \int_a^t f'(\tau) d\tau \right] dt =$$

$$= \frac{f(a)}{\gamma} \int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t) dt +$$

$$+ \frac{1}{\gamma} \int_a^x f'(\tau) d\tau \int_\tau^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t) dt.$$

В силу свойств функции  $\mu_{\alpha,\beta}$  (см. [4, с. 230]), а также равенства  $I_+^\alpha \phi(x) = \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$  для  $\phi(x) = 1$ ,  $x > a$ , имеем:

$$|\mu_{1-\alpha,-\beta}(x)| \leq K \text{ на } [a, b],$$

где  $K = \max \left\{ \frac{|b-a|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}, \frac{|b-a|^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right\}$ .

Отсюда следует оценка

$$\int_a^x |\mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t)| dt \leq K(b-a),$$

что означает абсолютную непрерывность первого слагаемого.

Для второго слагаемого снова используем оценку  $|\mu_{1-\alpha, -\beta}(x)| \leq K$  и абсолютную непрерывность, а значит, ограниченность функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma_a} \int_a^x f'(\tau) d\tau \int_a^x \mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t) dt \leq \\ & \leq \int_a^x |f'(\tau) \cdot K \cdot (b-a)| d\tau \leq K \cdot (b-a) \int_a^x |f'(\tau)| d\tau, \end{aligned}$$

откуда следует, что и второе слагаемое является абсолютно непрерывной функцией. Что и завершает доказательство теоремы.

**Следствие.** Оператор  $J_{\gamma, \alpha, \beta}^{a+} f$  ограничен в пространстве  $AC[a, b]$ .

**Теорема 3.** Пусть функция  $f(x) \in AC[a, b]$ . Тогда она может быть представлена в виде

$$f(x) = \int_a^x \mu_{\alpha, \beta}(x-t) \chi(t) dt, \quad \chi(t) \in L(a, b). \quad (6)$$

**Доказательство.** Согласно [1, с. 487], для функции  $f(x)$  выполняется равенство

$$f(x) = \int_a^x \mu_{\alpha, \beta}(x-t) \left[ c_0 \varphi(t) + \int_a^t \psi(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right] dt.$$

Здесь  $c_0 = \lim_{x \rightarrow a} c(x)$ . Так как оператор  $T_\psi$  вполне непрерывен в  $L_p(a, b), 1 \leq p \leq \infty$ , то в качестве функции  $\chi(t) \in L_p(a, b)$  можно взять  $\chi(t) = (c_0 E + T_\psi)(\varphi(t))$ .

Далее рассматриваем пространство  $AC_0[a, b]$  абсолютно непрерывных на отрезке и обращающихся в нуль в его начале функций.

**Теорема 4.** Пусть  $f(x) \in AC_0[a, b]$ . Тогда  $(J_{\gamma, \alpha, \beta} f)(x) \in AC_0[a, b]$ , при этом

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} J_{\gamma, \alpha, \beta} f = \\ & = \frac{1}{\gamma_a} \int_a^x \mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t) f'(t) dt = (J_{\gamma, \alpha, \beta}^{a+} f')(x). \quad (7) \end{aligned}$$

**Доказательство.** По теореме 2,  $(J_{\gamma, \alpha, \beta}^{a+} f)(x) \in AC[a, b]$ . В силу аналитичности

функции  $\mu_{\alpha, \beta}$ , абсолютной непрерывности и равенства нулю в точке  $a$  функции  $f(x)$ ,  $(J_{\gamma, \alpha, \beta} f)(a) = 0$ .

Значит,  $(J_{\gamma, \alpha, \beta} f)(x) \in AC_0[a, b]$ . Далее, по аналогии с доказательством теоремы 2, так как функция  $f(x) \in AC_0[a, b]$ , то она представима в виде  $f(x) = \int_a^x f'(t) dt, f'(t) \in L(a, b)$ . Подставим это представление в (5):

$$(J_{\gamma, \alpha, \beta}^{a+} f)(x) = \frac{1}{\gamma_a} \int_a^x \mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t) \int_a^t f'(\tau) d\tau dt.$$

Изменяя порядок интегрирования по теореме Фубини и учитывая свойства функции  $\mu_{\alpha, \beta}$ , получим

$$(J_{\gamma, \alpha, \beta}^{a+} f)(x) = \frac{1}{\gamma_a} \int_a^x dt \int_a^t \mu_{1-\alpha, -\beta}(t-\tau) f'(\tau) d\tau,$$

что равнозначно представлению (7).

**3. Достаточные условия разрешимости уравнения (1).** И наконец, сформулируем следующую теорему, дающую достаточные условия разрешимости уравнения (1) и другую форму его решения.

**Теорема 5.** Пусть  $f(x) \in AC_0[a, b], c(x) \in AC[a, b]$ . Тогда уравнение (1) разрешимо в  $L_p(a, b), 1 \leq p \leq \infty$  и его единственное решение дается формулой

$$\varphi(x) = (c_0 E + T_\psi)^{-1} (J_{\gamma, \alpha, \beta}^{a+} f')(x). \quad (8)$$

**Доказательство.** Согласно теореме 3, функция  $f(x)$  представима в виде (3), а значит, по теореме 1, уравнение (2) разрешимо в  $L_p(a, b), p \geq 1$  и его единственное решение может быть представлено в виде (4). Далее, используя теорему 4, формулу (7), обозначение (5) и [1, теорему 32.2], получим

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (c_0 E + T_\psi)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (J_{\gamma, \alpha, \beta}^{a+} f)(x) = \\ &= (c_0 E + T_\psi)^{-1} (J_{\gamma, \alpha, \beta}^{a+} f')(x), \end{aligned}$$

что равносильно (8).

**Заключение.** Получены достаточные условия разрешимости уравнений со степенно-логарифмическими ядрами с действительной степенью логарифма в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций; дано решение рассматриваемых уравнений в терминах правой части.

### Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. Демьянко С. В. Решение интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами в пространствах интегрируемых и непрерывных функций: Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01; БГУ. Минск, 2002. 20 с.
3. Пономарева С. В. Решение интегральных уравнений первого рода в некоторых пространствах // Физико-математические науки: тезисы 78-й науч.-техн. конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 3–13 февр. 2014 г. / Белорус. гос. технол. ун-т; отв. за издание И. М. Жарский. Минск, 2014. С. 39.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. М.: Наука, 1965–1967. Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции. 1967. 299 с.

### References

1. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987. 688 p.
2. Demyanko S. V. *Reshenie integral'nykh uravneniy so stepenno-logarifmicheskimi yadrami v prostranstvakh integriruemykh i nepreryvnykh funktsiy* [Solution of integral equations with power-logarithmic kernels in the spaces of integrable and continuous functions: Abstract of thesis dis. cand. of Physics and Mathematics sci.]. Minsk, 2002. 20 p.
3. Ponomareva S. V. [Solution of integral equations first order in some space]. *Tezisy 78-y nauch.-tekh. konferentsii professorsko-prepodavatel'skogo sostava, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov (s mezhdunarodnym uchastiem) (Fiziko-matematicheskie nauki)* [Abstracts of the 78th scientific conference of the faculty researchers and graduate students (with international participation)]. Minsk, 2014, p. 39 (In Russian).
4. Beytmen G., Erdeyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii* [Higher transcendental functions: in 3 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1965–1967. Vol. 3: Elliptic and automorphic functions. 1967. 299 p.

### Информация об авторах

**Пономарева Светлана Владимировна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики и информатики. Белорусский государственный университет (220050, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: demyanko@bsu.by

**Пыжкова Ольга Николаевна** – кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

### Information about the authors

**Ponomareva Svetlana Vladimirovna** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of General Mathematics and Informatics. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: demyanko@bsu.by

**Pyzhkova Olga Nikolaevna** – PhD (Physics and Mathematics), Head of the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

Поступила 05.05.17

УДК 532.517

**А. М. Волк**

Белорусский государственный технологический университет

**ГИДРОДИНАМИКА ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ  
НА ПРОНИЦАЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Выполнен анализ исследований гидродинамики пленочных движений в сепарационных, фильтровальных, тепло- и массообменных, газожидкостных аппаратах и реакторах. Проведено теоретическое исследование пленочного движения жидкой фазы на внутренней поверхности пронцаемого цилиндра под воздействием массовых сил поля тяжести и закрученного газового потока. Впервые получены дифференциальные уравнения движения, найдены точные решения для составляющих скорости при условии прилипания пленки на поверхности пронцаемого цилиндра и равенстве касательных напряжений на границе раздела фаз, определена толщина пленки. Найдены гидродинамические характеристики пленочного течения и аналитические условия для возможных режимов движения при условии отвода жидкой фазы через пронцаемую поверхность.

**Ключевые слова:** аппараты, пленочное движение, закрученный поток, пронцаемая поверхность, точные решения, гидродинамические характеристики, режимы движения.

**A. M. Volk**

Belarusian State Technological University

**HYDRODYNAMICS OF LIQUID FILM  
ON A PERMEABLE CYLINDRICAL SURFACE**

The studies of the hydrodynamics of film movements in the separation, filtration, heat and mass transfer, gas-liquid reactors and apparatuses are analyzed. The theoretical study of film movement in the liquid phase on the inner and outer surfaces of the cylinder under the influence of the gravitational field of mass forces and swirling gas flow is done. For the first time, the differential equations of motion is obtained, the exact solutions for the velocity components subject to adherence of the film on the surface of a permeable cylinder and equality of shear stresses at the interface are found, the film thickness is determined. The hydrodynamic characteristics of film flow and analytical conditions for the possible modes of motion are found.

**Key words:** apparatus, film motion, swirling flow, permeable surface, exact solutions, hydrodynamic characteristics, motion regimes.

**Введение.** Гидродинамика пленочного течения на пронцаемых поверхностях имеет существенное значение для процессов фильтрования суспензий, отвода жидкой фазы в процессе сепарации газожидкостных потоков, при тепло-массообмене. В этих случаях пленочное течение осуществляется на пронцаемых поверхностях.

Отсос используется также для управления пограничным слоем и влияния на устойчивость ламинарного режима движения [1, 2].

Воздействия газового потока на пленку жидкости передаются посредством сил трения, возникающих на границе взаимодействия фаз.

Касательные напряжения на стенке трубы диаметром  $D = 2R$  определяются гидродинамическим напором [1]:

$$\tau_r = \frac{\lambda_0 \rho_{\Gamma} \bar{W}_z^2}{4 \cdot 2}. \quad (1)$$

При степенном распределении осевой скорости газового потока с показателем  $1/7$  коэффициент трения для гладких труб вычисляется по формуле Блазиуса [1]:

$$\lambda_0 = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}}, \quad (2)$$

который зависит от числа Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\bar{W}_z D}{\nu_{\Gamma}}.$$

При наличии пленочного течения на внутренней поверхности трубы волновая поверхность рассматривается как нерегулярная шероховатость стенок канала. Обобщением экспериментальных данных в этом случае для коэффициента трения на границе раздела фаз получено соотношение [3, 4]

$$\lambda = \lambda_0 \left( 1 + \frac{300\delta}{D} \right). \quad (3)$$

Для определения тензора касательных напряжений в исследуемых диапазонах изменения скорости газового потока могут быть использованы рассмотренные ранее зависимости, которые дают осевую составляющую



$$\tau_z = \frac{0,0791 \rho_{\Gamma} \bar{W}_z^2}{\text{Re}^{0,25}} \left( 1 + \frac{300\delta}{D} \right). \quad (4)$$

Касательная составляющая зависит от угла закрутки потока и при этом будет

$$\tau_{\varphi} = \tau_z \text{tg}(k\beta). \quad (5)$$

Установившееся пленочное течение характеризуется равновесием сил тяжести и возникающих сил трения.

Теоретически исследуются только автомодельные течения с постоянным отсосом или вдувом по всей поверхности.

Скорость оттока сплошной среды определяется свойствами проницаемой поверхности и перепадом давления на ней [5, 6]. При турбулентном режиме движения среды через отверстия в стенке на основании уравнения Бернулли получаем квадратичный закон:

$$U_0 = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho(1+\xi-\bar{f}^2)}} = \gamma \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}. \quad (6)$$

Для потоков, не имеющих относительной продольной скорости, коэффициент расхода  $\gamma$  зависит только от свойств проницаемой поверхности. Идельчиком [7] при обработке экспериментальных данных получена формула зависимости коэффициента расхода  $\gamma$  от относительной площади  $\bar{f}$  отверстий:

$$\gamma^{-2} = \frac{(0,707\sqrt{1-\bar{f}} + 1 + \bar{f})^2}{\bar{f}^2}. \quad (7)$$

Для исследования процессов разделения многофазных потоков необходимо математическое моделирование движения закрученного газового потока и пленочного течения жидкости с учетом взаимодействия фаз как внутри непроницаемого цилиндра, так и при оттоке жидкой фазы на проницаемых поверхностях.

Экспериментальные исследования более полно характеризуют происходящие процессы, но они не всегда позволяют выделить и проанализировать доминирующие факторы.

Гидродинамика данного процесса в значительной степени зависит от оттока жидкой фазы. В настоящее время практически не имеется адекватной модели и метода расчета процесса разделения фаз при пленочном течении суспензии.

Наиболее полными и достоверными данные и расчеты будут при сочетании экспериментальных и теоретических методов анализа исследуемых процессов.

**Математическая модель.** Рассмотрим установившееся осесимметричное течение вязкой

несжимаемой жидкости по внутренней стенке проницаемого цилиндра под воздействием закрученного газового потока (рис. 1). Ось  $z$  цилиндрической системы координат направим вниз по оси цилиндров.

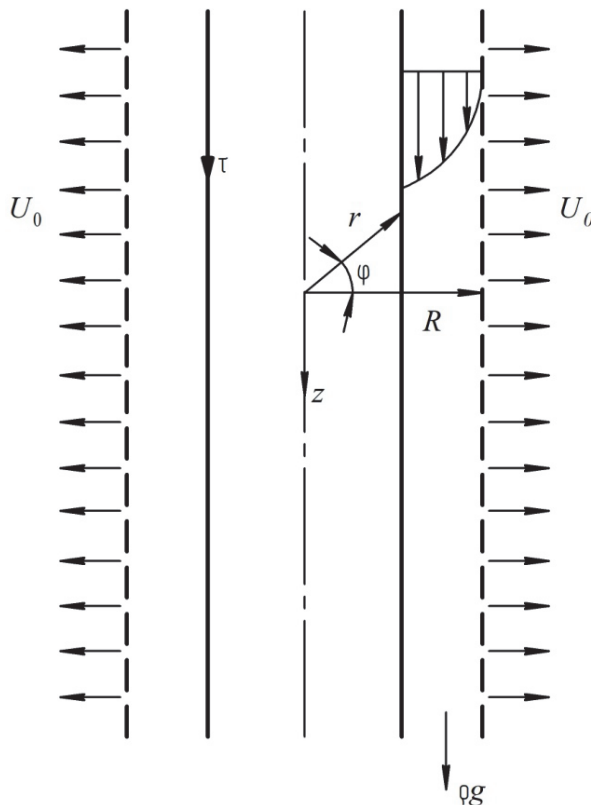


Рис. 1. Схема двухфазного пленочного течения на проницаемой цилиндрической поверхности

Скорость оттока жидкой фазы  $U_0$  на некотором элементарном цилиндре длиной  $\Delta z$  будем считать постоянной. Объемный расход несжимаемой жидкости через цилиндрические поверхности равной длины будет одинаков:  $2\pi r U_r \Delta z = 2\pi R U_0 \Delta z$ . Отсюда находим радиальную скорость в пленке жидкости  $U_r = \frac{U_0 R}{r}$ .

Тогда из уравнения неразрывности

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

получим  $\frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$  и  $U_z = U_z(r)$ .

Принимаем  $\psi = \frac{\partial P}{\partial z} = \text{const}$ . С учетом осе-

симметричности  $\frac{\partial U}{\partial \varphi} \equiv 0$  уравнения Навье –

Стокса для составляющих скорости и давления приводим к виду:

$$\frac{d^2U_z}{dr^2} - \frac{1}{r} \left( \frac{U_0 R}{v} - 1 \right) \frac{dU_z}{dr} = -\frac{\rho g - \Psi}{\mu},$$

$$\frac{d^2U_\phi}{dr^2} - \frac{1}{r} \left( \frac{U_0 R}{v} - 1 \right) \frac{dU_\phi}{dr} - \frac{1}{r^2} \left( \frac{U_0 R}{v} + 1 \right) U_\phi = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \left( \frac{U_\phi^2}{r} + \frac{U_0^2 R^2}{r^3} \right).$$

В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Это означает, что решение  $U = U(r)$  будет автомодельным. Выполним переход к безразмерной координате  $\tilde{r} = r/R$ , обозначим  $\alpha = \frac{U_0 R}{v}$  и получим:

$$\frac{d^2U_z}{d\tilde{r}^2} - \frac{(\alpha-1)}{\tilde{r}} \frac{dU_z}{d\tilde{r}} = -\frac{\rho g - \Psi}{\mu} R^2, \quad (9)$$

$$\frac{d^2U_\phi}{d\tilde{r}^2} - \frac{(\alpha-1)}{\tilde{r}} \frac{dU_\phi}{d\tilde{r}} - \frac{(\alpha+1)}{\tilde{r}^2} U_\phi = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \left( \frac{U_\phi^2}{r} + \frac{U_0^2 R^2}{r^3} \right). \quad (11)$$

Для граничных условий используем значения составляющих скорости жидкости на цилиндрической поверхности и компонентов тензора касательных напряжений:

$$\tau_z = -\mu \frac{\partial U_z}{\partial r}, \quad \tau_\phi = -\mu \left( \frac{\partial U_\phi}{\partial r} - \frac{U_\phi}{r} \right) \quad (12)$$

на границе раздела фаз.

Частные решения уравнений (9–11) ищем в виде  $r^k$  и получаем общие решения:

$$U_z = c_1 + c_2 \tilde{r}^\alpha + \frac{\rho g - \Psi}{2\mu(\alpha-1)} \tilde{r}^2; \quad (13)$$

$$U_\phi = \frac{c_3}{\tilde{r}} + c_4 \tilde{r}^{\alpha+1}. \quad (14)$$

За граничные условия принимаем условие прилипания на стенке и равенство касательных напряжений (12) на границе раздела фаз:

$$U_z|_{\tilde{r}=1} = U_\phi|_{\tilde{r}=1} = 0; \quad \tau_z = -\frac{\mu}{R} \frac{dU_z}{d\tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}}, \quad (15)$$

$$\tau_\phi = -\mu \left( \frac{\partial U_\phi}{R \partial \tilde{r}} - \frac{U_\phi}{R \tilde{r}} \right) \Big|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}}. \quad (16)$$

Из условия равновесия сил, действующих на газовый поток,

$$\pi(R - \tilde{\delta})^2 \Delta P = 2\pi(R - \tilde{\delta})\tau'_z l$$

получим

$$\Psi = \frac{\Delta P}{l} = \frac{2\tau'_z}{R(1-\tilde{\delta})} = -\frac{2\tau_z}{R(1-\tilde{\delta})}.$$

Учитывая граничные условия (15, 16), получаем распределение скорости в пленке жидкости:

$$U_z = \left[ \frac{\tau_z R}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-1}} + \frac{\rho g R^2}{\mu\alpha(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-2}} \right] \times \\ \times (1 - \tilde{r}^\alpha) - \left[ \frac{\rho g R^2}{2\mu\alpha(\alpha-2)} + \frac{\tau_z R}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})} \right] (1 - \tilde{r}^2), \quad (17)$$

$$U_\phi = \frac{R\tau_\phi(1-\tilde{\delta})^2}{\mu\alpha(1-\tilde{\delta})^{\alpha+2} + 2\mu} \left( \frac{1}{\tilde{r}} - \tilde{r}^{\alpha+1} \right). \quad (18)$$

Найдем объемный расход жидкой фазы на единицу периметра:

$$q = R \int_{1-\tilde{\delta}}^1 U_z \tilde{r} d\tilde{r} = \\ = \left[ \frac{\tau_z R^2}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-1}} + \frac{\rho g R^3}{\mu\alpha(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-2}} \right] \times \\ \times \left[ \frac{1 - (1-\tilde{\delta})^2}{2} - \frac{1 - (1-\tilde{\delta})^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right] - \\ - \left[ \frac{\rho g R^3}{2\mu(\alpha-2)} + \frac{\tau_z R^2}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})} \right] \times \\ \times \left[ \frac{1 - (1-\tilde{\delta})^2}{2} - \frac{1 - (1-\tilde{\delta})^4}{4} \right]. \quad (19)$$

Изменение данного объемного расхода по длине описывается уравнением

$$\frac{dq}{dz} = -U_0.$$

Разложение правой части в ряд до четвертой степени включительно имеет вид

$$q = \frac{\tau_z R^2}{\mu} \left[ \frac{\tilde{\delta}^2}{2} + \frac{2\alpha}{3!} \tilde{\delta}^3 + \frac{3(\alpha^2+1)\tilde{\delta}^4}{4!} + \dots \right] + \\ + \frac{\rho g R^3}{\mu} \left( \frac{2\tilde{\delta}^3}{3!} + \frac{3\alpha-8}{4!} \tilde{\delta}^4 + \dots \right) =$$

$$= \frac{\tau_z \delta^2}{\mu} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{U_0 \delta}{v} + \frac{1}{8} \left( \frac{U_0^2 \delta^2}{v^2} + \frac{\delta^2}{R^2} \right) + \dots \right] + \frac{\rho g \delta^3}{\mu} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{24} \left( 3 \frac{U_0 \delta}{v} - 8 \frac{\delta}{R} \right) + \dots \right]. \quad (20)$$

Данное разложение показывает, что изменение гидродинамических характеристик вследствие оттока жидкой фазы происходит, когда безразмерный комплекс Рейнольдса  $\frac{U_0 \delta}{v}$  соизмерим с единицей.

Среднее значение тангенциальной составляющей скорости пленки и перепад давления в радиальном направлении будет:

$$\bar{U}_\phi = \frac{1}{\tilde{\delta}} \int_{1-\tilde{\delta}}^1 U_\phi d\tilde{r} = \frac{R \tau_\phi}{\tilde{\delta} \mu} \frac{(1-\tilde{\delta})^2}{\alpha(1-\tilde{\delta})^{\alpha+2} + 2} \times \left[ \frac{1}{\alpha+2} - \frac{(1-\tilde{\delta})^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \ln(1-\tilde{\delta}) \right], \quad (21)$$

$$\Delta P_r = \rho \int_{1-\tilde{\delta}}^1 \left( \frac{U_\phi^2}{r} + \frac{U_0^2 R^2}{r^3} \right) d\tilde{r}. \quad (22)$$

Исследуем пленочное течение воды в проницаемом цилиндре диаметром 0,15 м, под воздействием газового потока со средней расходной скоростью 15 м/с с углом закрутки в 45°. Расход жидкости примем равным 0,5 м<sup>3</sup>/ч, а скорость оттока жидкой фазы – 0,001 м/с. В данном случае из уравнения (20) получена толщина пленки 1,1 мм, а на рис. 2, 3 представлены графики составляющих скорости в зависимости от переменной  $y = R - r$ .

Графические зависимости показывают, что отток жидкой фазы через проницаемую поверхность существенно изменяет профили скоростей жидкой пленки. Распределение скоростей в пленке жидкости на проницаемой поверхности является линейным.

**Вывод.** Создание моделей процессов разделения, происходящих в конструируемых аппаратах, является важной и достаточно сложной задачей. Математическое описание позволяет выполнить расчет основных характеристик,

исследовать влияние на процесс различных факторов, сочетать теоретические и экспериментальные методы исследования, определять оптимальные конструкционные и технологические параметры.

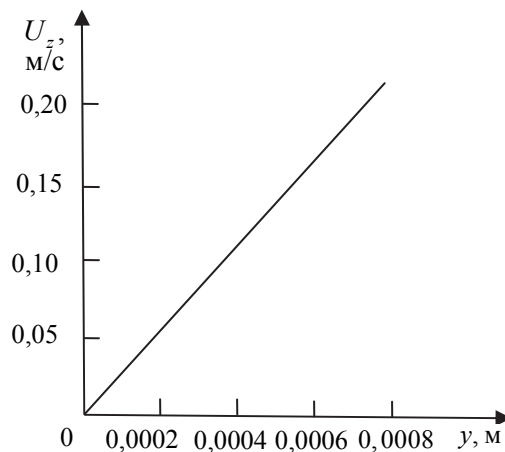


Рис. 2. Осевая составляющая скорости в пленке жидкости

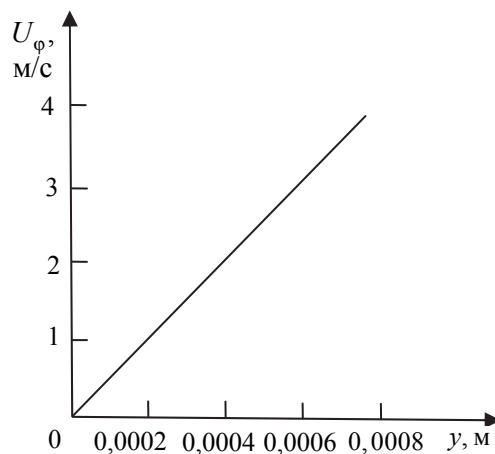


Рис. 3. Касательная составляющая скорости в пленке жидкости

Полученная математическая модель дает возможность определить гидродинамические характеристики пленочного течения под воздействием закрученного газового потока с учетом оттока жидкой фазы и учитывать их при исследовании процессов фильтрования, а также найти оптимальные соотношения между геометрическими и режимными параметрами исследуемых процессов.

### Литература

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
2. Ерошенко В. М., Зайчик Л. И. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. М.: Наука, 1984. 274 с.
3. Уоллис Г. Б. Одномерные двухфазные течения. М.: Мир, 1972. 440 с.
4. Соколов В. И., Доманский И. В. Газожидкостные реакторы. Л.: Машиностроение, 1976. 216 с.
5. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М.: Химия, 1974. 688 с.

6. Гельперин Н. И. Основные процессы и аппараты химической технологии: в 2 кн. М.: Химия, 1981. 812 с.
7. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975. 560 с.

#### References

1. Schlikhting G. *Teoriya pogranichnogo sloya* [The theory of the boundary layer]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 742 p.
2. Yeroshchenko V. M., Zaychik L. I. *Gidrodinamika i teplomassoobmen na pronitsayemykh poverkhnostyakh* [Hydrodynamics and heat and mass transfer on permeable surfaces]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 274 p.
3. Uolis G. B. *Odnomernye dvukhfaznye techeniya* [One-dimensional two-phase flows]. Moscow, Mir Publ., 1972. 440 p.
4. Sokolov V. I., Domanskiy I. V. *Gazozhidkostnye reaktory* [Gas-liquid reactors]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1976. 216 p.
5. Berd R., St'yuart V., Laytfut Ye. *Yavleniya perenosa* [Transport phenomena]. Moscow, Khimiya Publ., 1974. 688 p.
6. Gel'perin N. I. *Osnovnye protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii* [The main processes and apparatus of chemical technology]: in 2 books. Moscow, Khimiya Publ., 1981. 812 p.
7. Idel'chik I. Ye. *Spravochnik po gidravlicheskim soprotivleniyam* [Reference book on hydraulic resistance]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 560 p.

#### Информация об авторе

**Волк Анатолий Матвеевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: volk@belstu.by

#### Information about the author

**Volk Anatoliy Matveevich** – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: volk@belstu.by

Поступила 05.05.2017

УДК 519.624

**И. Ф. Соловьева**

Белорусский государственный технологический университет

**ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ  
С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ**

В данной работе для решения двухточечных граничных задач с пограничным слоем рассматриваются методы, позволяющие процесс численного решения граничной задачи заменить решением нескольких задач Коши и некоторых нелинейных систем численных уравнений. Такие методы называются методами редукции граничных задач к задачам Коши. Сильной стороной такого подхода к решению граничных задач является то, что в этом случае для вычисления решений задач Коши можно применять численные методы, имеющие достаточно полное математическое обеспечение. Кроме этого, задачи Коши можно решать с шагом интегрирования, выбранным автоматически, причем на каждом шаге можно проводить контроль точности вычислений. В работе вводится понятие изолированности решения в предлагаемом методе множественной двусторонней пристрелки. Этот метод позволяет на заключительном этапе решать системы численных уравнений с небольшим числом неизвестных. Подробно строятся вычислительные схемы метода множественной двусторонней пристрелки. Сформулированы теоремы, обосновывающие и устанавливающие сходимость метода множественной двусторонней пристрелки.

**Ключевые слова:** малый параметр, пограничный слой, двухточечные граничные задачи, сходимость, изолированность решения.

**I. F. Solov'yeva**

Belarusian State Technological University

**FEATURES OF SOLVING BORDER TASKS WITH BORDER LAYER**

In this paper, to solve two-point boundary problems with a boundary layer, methods are considered that allow the numerical solution of the boundary value problem to be replaced by solving several Cauchy problems and some nonlinear systems of numerical equations. Such methods are called methods of reducing boundary value problems to Cauchy problems. The strong side of this approach to solving boundary problems is that in this case, numerical methods that have a sufficiently complete mathematical support can be used to calculate solutions of Cauchy problems. In addition, Cauchy problems can be solved with an integration step selected automatically, and at each step it is possible to control the accuracy of the calculations. In this paper we introduce the notion of solution isolation in the proposed method of multiple-sided two-sided alignment. This method allows us at the final stage to solve systems of numerical equations with a small number of unknowns. Computational schemes of the method of multiple two-sided alignment are constructed in detail. Theorems that substantiate and establish the convergence of the method of a multiple two-sided alignment are formulated.

**Key words:** small parameter, boundary layer, two-point boundary problems, convergence, solution, isolation.

**Введение.** Классы граничных задач многочисленны и разнообразны. Это определяется видом правой части уравнения, формой нелинейности, видом и типом граничных условий, порядком уравнения, входящих в систему дифференциальных уравнений, и т. д.

Проблемы исследования методов численного решения граничных задач весьма актуальны. В настоящее время интерес к этим задачам достаточно высок вследствие их многочисленных приложений. Область применения у них достаточно широка. Они распространены в физике, электродинамике, механике, акустике и других областях науки и техники.

В общем случае, когда рассматривается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (о. д. у.) первого порядка

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b,$$

для характеристики жесткости задачи используется большая классическая константа Липшица

$$L(t) = \sup_{u \in M_t} \left\| \frac{\partial f(t, u)}{\partial y} \right\| \gg 0, \quad a \leq t \leq b.$$

Если константа Липшица имеет большие значения, то такие задачи принято относить к числу жестких задач. Эта характеристика жесткости оценивается как вполне достаточная. К задачам такого вида можно отнести, например, задачи о вычислении сопротивления, возникающего при обтекании тела, о вычислении сопротивления трения корабля, профиля крыла или лопатки турбины, а также задачи, описывающие всевозможные диффузионно-конвективные процессы.

Проблеме численного решения нелинейных двухточечных граничных задач с пограничными слоями уделяется в настоящее время все большее внимание.

В ряде случаев при решении нелинейных граничных задач интересной является идея построения итерационных процессов таким образом, чтобы они приводили к необходимости численного решения только задач линейного вида, и чтобы итерационная последовательность приближенных решений этих линейных задач сходилась к искомому решению исходной нелинейной задачи.

**Постановка задачи.** Пусть задана нелинейная двухточечная задача с неразделенными граничными условиями:

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad (1)$$

$$g(y(a), y(b)) = 0, \quad (2)$$

где

$$y: [a, b] \rightarrow R^n, \quad f: [a, b] \times R^n \rightarrow R^n,$$

$$g: R^n \times R^n \rightarrow R^n.$$

В качестве решения данной задачи предлагается метод множественной двусторонней пристрелки (м. м. д. п.), позволяющий заменить процесс численного решения граничной задачи решением нескольких задач Коши. Методы такого рода называют методами редукции граничных задач к задачам Коши. Сильной стороной такого подхода к решению граничных задач является тот момент, что для решения задач Коши в настоящее время можно применять сильно развитые, хорошо работающие и имеющие полное математическое обеспечение численные методы, в том числе обладающие, например, В-устойчивостью и D-устойчивостью [1].

При решении указанного выше типа задач стандартными численными методами возникают большие трудности, причина которых чаще всего заключается в неустойчивости численного процесса. В качестве специальных методов будем рассматривать метод множественной двусторонней пристрелки, обладающий необходимой гибкостью.

**Алгоритм метода множественной двусторонней пристрелки.** Предлагаемый метод множественной двусторонней пристрелки состоит в следующем [2].

Разбиваем отрезок на совокупность точек. Назовем их точками пристрелки:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{2m-1} < t_{2m} = b.$$

Множественную пристрелку организуем таким образом, чтобы вычислительный процесс развивался в обоих направлениях.

Пристрелочные задачи Коши построим в прямом и обратном направлениях:

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \quad t \in J_{2j-1}^{(+)} = \{t_{2j-1} \leq t \leq t_{2j}\}; \\ u(t, y_{2j-1}) \Big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1}, \quad y_{2j-1} \in R^n, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} v' = f(t, v), \quad t \in J_{2j-1}^{(-)} = \{t_{2j-1} \geq t \geq t_{2j-2}\}, \\ v(t, y_{2j-1}) \Big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1}, \quad y_{2j-1} \in R^n, \quad j = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $t_{2j-1}$  – точки пристрелки;  $t_{2j}$  – точки сшива решений;  $y_{2j-1}$  – параметры пристрелки.

Для полученных пристрелочных задач Коши составляем замыкающую систему уравнений вида

$$\begin{cases} u(t_{2j}, y_{2j-1}) - v(t_{2j}, y_{2j+1}) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \\ g(v(t_0, y_1), u(t_{2m}, y_{2m-1})) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Обозначим:

$$z = (y_1^T, y_2^T, \dots, y_{2m-1}^T)^T.$$

Перепишем замыкающую систему вида (5) в операторной форме

$$H(z) = 0, \quad (6)$$

где

$$H: R^N \rightarrow R^N, \quad N = m \times n.$$

Свойства замыкающих систем уравнений (5), (6) зависят от правой части  $f$ , исходного уравнения, формы граничных условий, области интегрирования  $[a, b]$ , точек пристрелки  $u(t, y_{2j-1})$  и траекторий пристрелки  $u(t, y_{2j-1})$ ,  $v(t, y_{2j-1})$ . Эти свойства наиболее полно характеризуются матрицами Якоби для соответствующих отображений  $H$ .

Для замыкающей системы уравнений (5) матрица Якоби будет иметь вид

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \begin{bmatrix} \Phi_2^{(k)} & -\Omega_2^{(k)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi_{2m-2}^{(k)} & -\Omega_{2m-2}^{(k)} \\ G_1^{(k)} & 0 & \dots & 0 & G_{2m-1}^{(k)} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{2j}^{(k)} = \frac{\partial v(t_{2j}, y_{2j-1}^{(k)})}{\partial y_{2j-1}}, \quad \Omega_{2j}^{(k)} = \frac{\partial u(t_{2j}, y_{2j+1})}{\partial y_{2j+1}},$$

$$G_1^{(k)} = \frac{\partial g(P_{0,2m}^{(k)})}{\partial u} \Omega_0, \quad G_{2m-1}^{(k)} = \frac{\partial g(P_{0,2m}^{(k)})}{\partial v} \Phi_{2m}^{(k)}.$$

Пусть  $y(t)$  – искомое решение исходной граничной задачи. Введем обозначения:

$$z^* = (y_1^{*T}, \dots, y_{2m-1}^{*T})^T. \quad (7)$$

Понятно, что  $H(z^*) = 0$ , где  $z^*$  – решение исходной системы (1), (2).

Обозначим  $k$ -е приближение к решению  $z^*$ :

$$z^{(k)} = (y_1^{(k)T}, y_3^{(k)T}, \dots, y_{2m-1}^{(k)T})^T \in R^n.$$

Все оставшиеся приближения найдем, применяя модифицированный метод Ньютона, основанный на аппроксимации матрицы Якоби [3]:

$$\frac{\partial H(z^{(k)})}{\partial z} \Delta z^{(k)} = -H(z^{(k)}),$$

где  $\frac{\partial H(z^{(k)})}{\partial z} \in L(R^n, R^n)$  – матрица Якоби.

Теперь искомое решение  $y(t)$  исходной граничной задачи представляем формулой

$$y(t) = \begin{cases} v(t), y_{2j-1}^*, & t \in J_{2j-1}^-, \\ u(t), y_{2j-1}^*, & t \in J_{2j-1}^+, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (8)$$

Для исследования сходимости м. м. д. п. вводится понятие изолированности решения исходной задачи [4].

**Определение.** Решение граничной задачи (1), (2) называется слабо изолированным или изолированным, если выполняются условия:

$$\det \left[ \frac{\partial g(y(a), y(b))}{\partial y(a)} + \frac{\partial g(y(a), y(b))}{\partial y(b)} \Phi(a) \right] \neq 0,$$

$$\det \left[ \frac{\partial g(y(a), y(b))}{\partial y(a)} + \frac{\partial g(y(a), y(b))}{\partial y(b)} \Phi(b) \right] \neq 0$$

на точном решении задачи (1), (2). Функция  $\Phi(t)$  – это матричное решение задачи Коши

$$\Phi'(t) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} \Phi(t), \quad \Phi(a) = E,$$

где  $a \leq t \leq b$ , взятое при  $t = b$ .

Предположим, что выполняются следующие условия:

1. Решение задачи (1), (2) есть вектор-функция  $y(t) \in C[a, b]$ .

2.  $f(t, y) \in C^2(S_p)$ ,

где  $S_p = \{(t, y) \in [a, b] \times R^n \mid \|y - y(t)\| \leq p, p > 0\}$ .

3.  $g(u, v) \in C^2(\Theta_p)$ ,

где  $\Theta_p = \{(u, v) \in R^n \times R^n \mid \|u - y(a)\| \leq p,$

$\|v - y(b)\| \leq p\}$

и отрезок  $[a, b]$  достаточно мал.

Введем обозначения:

$$\Delta t_{i-1} = t_i - t_{i-1}, \quad u(t_{2j-1} - \tau \Delta t_{2j-2}, y_{2j-1}) \equiv \varphi_{2j-2}(\tau),$$

$$v(t_{2j-1} + \tau \Delta t_{2j-2}, y_{2j-1}) \equiv \psi_{2j-1}(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

$$j = \overline{1, m}.$$

Рассмотрим следующие задачи Коши:

$$\begin{cases} \varphi'(\tau) = B(\Delta t) \Phi(\tau, \varphi(\tau)), & 0 \leq \tau \leq 1, \\ \varphi(\tau, z)|_{\tau=0} = z, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \psi'(\tau) = C(\Delta t) W(\tau, \psi(\tau)), & 0 \leq \tau \leq 1, \\ \psi(\tau, z)|_{\tau=0} = z, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\varphi(\tau) = (\varphi_0^T(\tau), \varphi_2^T(\tau), \dots, \varphi_{2m-2}^T(\tau))^T,$$

$$\Phi(\tau, \varphi(\tau)) = (f_0^T(\tau, \varphi_0(\tau)), \dots, f_{2m-2}^T(\tau, \varphi_{2m-2}(\tau)))^T,$$

$$\psi(\tau) = (\psi_1^T(\tau), \psi_3^T(\tau), \dots, \psi_{2m-1}^T(\tau))^T,$$

$$W(\tau, \psi(\tau)) = (f_1^T(\tau, \psi_1(\tau)), \dots, f_{2m-1}^T(\tau, \psi_{2m-1}(\tau)))^T,$$

где

$$B(\Delta t) = \text{diag} [-\Delta t_0 E, -\Delta t_2 E, \dots, -\Delta t_{2m-2} E],$$

$$C(\Delta t) = \text{diag} [-\Delta t_1 E, -\Delta t_3 E, \dots, -\Delta t_{2m-1} E].$$

Обозначим константу Липшица относительно  $\varphi$  для  $\Phi(\tau, \varphi)$  на  $S_p(X)$  через  $L^*$ , а константу Липшица относительно  $\psi$  для  $W(\tau, \psi)$  на  $S_p(Y)$  через  $L^{**}$ .

Обозначим  $\Delta t^* = \max_{1 \leq j \leq m} \Delta t_{2j-2}$ ,  $\Delta t^{**} = \max_{1 \leq j \leq m} \Delta t_{2j-1}$ .

$$\delta = p \min [\exp(-L^* \Delta t^*), \exp(-L^{**} \Delta t^{**})],$$

$$\Omega_\delta = \{z \in R^n \mid \|z^* - z\| \leq \delta\}.$$

**Теорема.** Пусть выполняются условия 1 и 2. Тогда:

1) задачи Коши (9), (10) имеют соответственно единственные решения  $\varphi(\tau, z)$  и  $\psi(\tau, z)$ , если  $z \in \Omega_\delta$  и  $\varphi(\tau, z) \in S_p(X)$  и  $\psi(\tau, z) \in S_p(Y)$ ;

2)  $\varphi(1, z) \in C^2(\Omega_\delta)$ ,  $\psi(1, z) \in C^2(\Omega_\delta)$ ;

3) матрицы Якоби  $\frac{\partial \varphi(\tau, z)}{\partial z}$  и  $\frac{\partial \psi(\tau, z)}{\partial z}$

удовлетворяют соответственно следующим задачам Коши:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \varphi(\tau, z)}{\partial z} \right) = B(\Delta t) \frac{\partial \Phi(\tau, \varphi(\tau, z))}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \varphi(0, z)}{\partial z} = E, \quad 0 \leq \tau \leq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \psi(\tau, z)}{\partial z} \right) = C(\Delta t) \frac{\partial W(\tau, \psi(\tau, z))}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \psi(0, z)}{\partial z} = E, \quad 0 \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

**Теорема.** Пусть выполняются условия 1–3, и решение  $y(t)$  задачи (1)–(2) слабо изолированное. Тогда имеют место:

- 1)  $H(z) \in C^2(\Omega_\delta)$  и  $H(z) = 0$  при  $z = z^*$ ;
- 2)  $\det \left( \frac{\partial H(z)}{\partial z} \right) \neq 0$  при  $z = z^*$  и существуют

такие разбиения  $\{t_i\}_{i=1}^{2m}$  заданного отрезка  $[a, b]$  и числа  $\delta > 0, \nu > 0$ , при которых выполняется  $\left\| \left[ \frac{\partial H(z)}{\partial z} \right]^{-1} \right\| < \delta$  для  $\forall z \in \Omega_\delta \cap \bar{S}(z^*, \nu)$ , где  $\bar{S}(z^*, \nu) = \{z \in R^n \mid \|z - z^*\| \leq \nu\}$ .

В случае прямого направления матрицы-блоки для пристрелочных задач Коши будут иметь вид:

$$\begin{cases} U'_{2j-1}(t) = \Phi_{2j-1}(u) U_{2j-1}(t), \\ U_{2j-1}(t_{2j-1}) = I, \quad t \in J_{2j-1}^{(+)}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \Phi_{2j-1}(u) = \frac{\partial f(t, u(t, y_{2j-1}))}{\partial u}, \\ U_{2j-1}(t) = \frac{\partial u(t, y_{2j-1})}{\partial u}. \end{cases} \quad (12)$$

Аналогичным образом получаем матрицы-блоки для пристрелочных задач Коши, решаемых в обратном направлении:

$$\begin{cases} V'_{2j-1}(t) = \Phi_{2j-1}(v) V_{2j-1}(t), \\ V_{2j-1}(t_{2j-1}) = I, \quad t \in J_{2j-1}^{(-)}, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\begin{cases} \Phi_{2j-1}(v) = \frac{\partial f(t, v(t, y_{2j-1}))}{\partial v}, \\ V_{2j-1}(t) = \frac{\partial v(t, y_{2j-1})}{\partial y_{2j-1}}, \quad j = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (14)$$

причем

$$\begin{cases} U_{2j-1}^{(2j)} = U_{2j-1}(t_{2j}), \\ V_{2j-1}^{(2j-2)} = V_{2j-1}(t_{2j-2}). \end{cases} \quad (15)$$

Построим последовательные приближения:

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \Delta z^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Найдем поправки  $\Delta z^{(k)}$  в методе Ньютона:

$$\Delta z^{(k)} = (\Delta z_1^{(k)T}, \Delta z_3^{(k)T}, \dots, \Delta z_{2m-1}^{(k)T})^T,$$

где

$$H = (h_1^{(k)}, h_3^{(k)}, \dots, h_m^{(k)})^T, \quad h_i^{(k)} = h_i(z^{(k)}).$$

На точном решении  $z^*$  выполняется неравенство

$$\det D_m(z^*) \neq 0$$

и, следовательно, решение граничной задачи изолировано. Значит, при хорошем начальном приближении  $z^{(0)}$  нетрудно обеспечить сходимость метода Ньютона [5]. Вычислительные свойства метода Ньютона достаточно сильно зависят от свойств матрицы Якоби  $\frac{\partial H}{\partial z}$ . Свой-

ства матрицы Якоби, в свою очередь, определяются числом и длинами положительных  $J_{2j-1}^{(+)}$  и отрицательных  $J_{2j-1}^{(-)}$  подинтервалов пристрелки.

**Заключение.** Выбор числа и определение длин положительных и отрицательных подинтервалов пристрелки позволяет повысить качество пристрелочных траекторий, а также дает возможность регулирования свойств матрицы Якоби [3]. Это существенно влияет на сходимость итерационного процесса и повышает его устойчивость к погрешностям округления.

Данный метод позволяет улучшать свойства пристрелочных траекторий, ослабляет условия на локализацию начальных приближений, уменьшает число неизвестных.

Предложенная схема метода множественной двусторонней пристрелки позволяет решать широкие классы граничных задач с пограничным слоем.

## Литература

1. Соловьева И. Ф. Влияние малого параметра при старшей производной на решение граничных задач // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 15–18.
2. Соловьева И. Ф. Численное решение граничных задач с малым параметром при старшей производной // Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов: материалы Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 22–24 октября 2015 / БГТУ. Минск, 2015. С.177–180.
3. Соловьева И. Ф. Исследование матриц Якоби и чисел обусловленности при решении нелинейных граничных задач // Труды БГТУ. 2016. № 6 (188): Физ.-мат. науки и информатика. С. 14–17.



4. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1983. 200 с.

5. Холл Д., Уатт Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1989. 312 с.

### References

1. Solov'yeva I. F. The Influence of a Small Parameter in the Highest Derivative on the Solution of Boundary Problems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 15–18 (In Russian).

2. Solov'yeva I. F. Numerical solution of boundary value problems with a small parameter for the highest derivative. *Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii (Avtomaticheskii kontrol' i avtomatizatsiya proizvodstvennykh protsessov)* [Materials of the International Scientific and Technical Conference (Automatic control and automation of production processes)]. Minsk, 2015, pp. 177–180 (In Russian).

3. Solov'yeva I. F. Investigation of Jacobi matrices and condition numbers in the solution of nonlinear boundary value problem [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6 (188): Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 14–17 (In Russian).

4. Dekker K., Verwer Ya., *Ustoychivost' metodov Runge-Kutta dlya zhestkikh differentsial'nykh uravneniy nelineynykh* [Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1983. 200 p.

5. Holl D., Uatt D. *Sovremennye chislennye metody resheniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Modern numerical methods for solving ordinary differential equation]. Moscow, Mir Publ., 1989. 312 p.

### Информация об авторе

**Соловьева Ирина Федоровна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ira1234568@tut.by

### Information about the author

**Solov'yeva Irina Fedorovna** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ira1234568@tut.by

Поступила 17.04.2017

УДК 517.977

**А. А. Якименко**

Белорусский государственный технологический университет

**МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА  
В ОБЩЕЦИКЛИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ**

В статье рассматривается решение задачи модального управления в общециклическом случае для двумерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию. Дается определение задачи модального управления для исследуемой системы. При решении задачи модального управления используются линейные регуляторы по типу обратной связи, содержащие как линейную, так и интегральную части. Регуляторы получены в явной форме как элементарные функции параметров исходной системы и ее вектора состояния.

**Ключевые слова:** системы нейтрального типа, модальное управление, регуляторы, обратная связь, запаздывание.

**A. A. Yakimenka**

Belarusian State Technological University

**MODAL CONTROL FOR ONE NEUTRAL TYPE SYSTEM  
IN GENERAL CYCLIC CASE**

The paper deals with the modal control problem for the stationary two-dimensional dynamical system with retarded argument of neutral type with one input and one state delay in general cyclic case. The definition of a modal control problem for the system is given. For the solution for such a problem we use linear regulators of feedback type, comprising both linear and integral part. The regulators are obtained in an explicit form as a basic function of the initial parameters of the system and its state vector.

**Key words:** neutral type systems, modal control, regulators, feedback control, lag.

**Введение.** Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа [1, 2] решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. Изучению такой задачи посвящена данная статья.

**Основная часть.** Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где  $A_i, i = 0, 1, 2$  – постоянные  $2 \times 2$ -матрицы;  $h > 0$  – постоянное запаздывание;  $b$  – ненулевой 2-вектор. Не ограничивая общности, считаем  $b' = [0, 1]$  («'» означает транспонирование).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^L \sum_{j=1}^M q'_{ij} x^{(i)}(t-jh) + \int_{-h}^0 g'(s) x(t+s) ds, \quad (2)$$

где  $q_{00}, q_{ij}$  – 2-векторы;  $g(s), s \in [-h, 0]$  – непрерывная 2-вектор-функция;

$$x^{(i)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^i}{dt^i} x(t), \quad x^{(0)}(t) \equiv x(t).$$

Характеристическое уравнение системы (1) имеет следующий вид:

$$\det [A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_2] \equiv \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \tilde{\alpha}_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \quad (3)$$

где числа  $\tilde{\alpha}_{ij}$  вычисляются как функции матриц  $A_i, i = 0, 1, 2$ , в частности  $\tilde{\alpha}_{00} = \det A_0, \tilde{\alpha}_{20} = 1, \tilde{\alpha}_{22} = \det A_2$ .

**Определение.** Система (1) модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперед заданных чисел  $\alpha_{ij}, i = 0, 1, 2, j = 0, 1, 2, \alpha_{20} = 1$ , найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет вид (ср. с (3)):

$$\det [A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_2 + bU(\lambda)] \equiv \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \alpha_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \quad (5)$$

где  $U(\lambda)$  – регулятор (2) в частотной области.

Введем (2×2)-матрицы:

$$A(\lambda) = A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h},$$

$$W(\lambda) = [A(\lambda)b, b], \lambda \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим обшечиклический случай:

$$\det W(\lambda) = c(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}), (c \neq 0).$$

Матрица  $A(\lambda)$  в этом случае имеет следующий вид:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} & c(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}) \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где  $\beta_i, i = 0, 1, 2, \gamma_0$  – некоторые действительные числа;  $a_j(\lambda), j = 1, 2$  – квазиполиномы:

$$a_i(\lambda) = a_{i0} + a_{i1} e^{-\lambda h} + a_{i2} \lambda e^{-\lambda h},$$

где  $a_{ij} \in \mathbb{R}; i = 1, 2, j = 0, 1, 2$ .

Регулятор вида (2) в частотной области будем искать в виде

$$U(\lambda) = \left( \frac{1}{c} \eta_1(\lambda) - a_1(\lambda), \eta_2(\lambda) - a_2(\lambda) \right).$$

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} & \lambda^2 + (\gamma_1 - \beta_0)\lambda + \beta_1\gamma_0 - \beta_0\gamma_1 \equiv \\ & \equiv (\lambda - \xi_1)(\lambda - \xi_2) = 0, \quad \lambda, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть выполнено условие:

$$\xi_1 \neq \xi_2. \quad (5)$$

Рассмотрим величины

$$\delta(\xi_i) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\xi_i h} - \xi_i, \quad i = 1, 2.$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** Для того, чтобы система (1) была модально управляема регулятором вида (2) в случае (5), необходимо и достаточно выполнения условий

$$\delta(\xi_i) \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

При этом компоненты регулятора вида (2) в частотной области имеют вид:

$$\begin{aligned} \eta_1(\lambda) = & -\alpha_{22} \lambda e^{-\lambda h} + (\alpha_{22} \beta_0 - \alpha_{21} \beta_1) e^{-\lambda h} - \\ & - (\alpha_{12} + \alpha_{22} (\xi_1 + \xi_2)) e^{-\lambda h} + \frac{1}{\beta_1} (-\alpha_{22} (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \\ & + \alpha_{12} \beta_0 + \alpha_{22} \beta_0 (\xi_1 + \xi_2) - \alpha_{11} \beta_1 - \beta_1^2 - \\ & - \alpha_{02} - \alpha_{22} \xi_1 \xi_2 - \alpha_{21} \beta_1 (\xi_1 + \xi_2) - \alpha_{12} (\xi_1 + \xi_2)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{\beta_1 (\xi_1 - \xi_2) \delta(\xi_1) \delta(\xi_2)} (\alpha_{22} (\delta(\xi_1) \xi_2^4 - \delta(\xi_2) \xi_1^4) + \\ & + (\alpha_{21} \beta_1 + \alpha_{12} - 2\alpha_{22} \beta_0) (\delta(\xi_1) \xi_2^3 - \delta(\xi_2) \xi_1^3) + \\ & + (-2\alpha_{12} \beta_0 + \alpha_{02} - \alpha_{21} \beta_0 \beta_1 + \alpha_{11} \beta_1 + \beta_1^2 + \alpha_{22} \beta_0^2) \times \\ & \quad \times (\delta(\xi_1) \xi_2^2 - \delta(\xi_2) \xi_1^2) + \\ & + (\alpha_{10} \beta_1^2 - \alpha_{11} \beta_0 \beta_1 - 2\alpha_{02} \beta_0 + \alpha_{12} \beta_0^2 + \alpha_{01} \beta_1) \times \\ & \quad \times (\delta(\xi_1) \xi_2 - \delta(\xi_2) \xi_1) + \\ & + (\alpha_{00} \beta_1^2 + \alpha_{02} \beta_0^2 - \alpha_{01} \beta_0 \beta_1) (\delta(\xi_1) - \delta(\xi_2))) + \\ & + \frac{1}{(\xi_1 - \xi_2) \delta(\xi_1) \delta(\xi_2)} \times \\ & \times \left( \alpha_{22} \left( \delta(\xi_1) \xi_2^4 \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_2)} - \delta(\xi_2) \xi_1^4 \frac{e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_1)} \right) + \right. \\ & \quad + (\alpha_{21} \beta_1 + \alpha_{12} - 2\alpha_{22} \beta_0) \times \\ & \quad \times \left( \delta(\xi_1) \xi_2^3 \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_2)} - \delta(\xi_2) \xi_1^3 \frac{e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_1)} \right) + \\ & \quad + (-2\alpha_{12} \beta_0 + \alpha_{02} - \alpha_{21} \beta_0 \beta_1 + \alpha_{11} \beta_1 + \beta_1^2 + \alpha_{22} \beta_0^2) \times \\ & \quad \times \left( \delta(\xi_1) \xi_2^2 \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_2)} - \delta(\xi_2) \xi_1^2 \frac{e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_1)} \right) + \\ & \quad + (\alpha_{10} \beta_1^2 - \alpha_{11} \beta_0 \beta_1 - 2\alpha_{02} \beta_0 + \alpha_{12} \beta_0^2 + \alpha_{01} \beta_1) \times \\ & \quad \times \left( \delta(\xi_1) \xi_2 \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_2)} - \delta(\xi_2) \xi_1 \frac{e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_1)} \right) + \\ & \quad \left. + (\alpha_{00} \beta_1^2 + \alpha_{02} \beta_0^2 - \alpha_{01} \beta_0 \beta_1) \times \right. \\ & \quad \left. \times \left( \delta(\xi_1) \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_2)} - \delta(\xi_2) \frac{e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_1)} \right) \right). \\ & \eta_2(\lambda) = -\beta_0 - \alpha_{10} - \alpha_{21} \lambda e^{-\lambda h} + \\ & + \left( \frac{1}{\beta_1} ((\beta_0 - (\xi_1 + \xi_2)) (\alpha_{22} (\beta_0 - (\xi_1 + \xi_2)) - \right. \\ & \quad - \alpha_{21} \beta_1 - \alpha_{12}) - \alpha_{21} \beta_1 - \alpha_{12}) + \\ & \quad + \beta_0 (\alpha_{12} + \alpha_{22} (\xi_1 + \xi_2))) - \\ & - \frac{1}{\beta_1 (\xi_1 - \xi_2)} (\alpha_{22} (\xi_1^3 - \xi_2^3) + (\alpha_{12} + \alpha_{21} \beta_1) (\xi_1^2 - \xi_2^2) + \\ & \quad + \alpha_{22} \beta_1 (\xi_1^2 e^{-\xi_1 h} - \xi_2^2 e^{-\xi_2 h}) + \\ & \quad + \alpha_{11} \beta_1 (\xi_1 - \xi_2) + \alpha_{12} \beta_1 (\xi_1 e^{-\xi_1 h} - \xi_2 e^{-\xi_2 h}) + \\ & \quad + \alpha_{02} \beta_1 (e^{-\xi_1 h} - e^{-\xi_2 h})) + \frac{\beta_1}{\delta(\xi_1) \delta(\xi_2) (\xi_1 - \xi_2)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times (\alpha_{22} (\xi_1^2 \delta(\xi_2) e^{-2\xi_1 h} - \xi_2^2 \delta(\xi_1) e^{-2\xi_2 h}) + \\
 & + \alpha_{21} (\xi_1^2 \delta(\xi_2) e^{-\xi_1 h} - \xi_2^2 \delta(\xi_1) e^{-\xi_2 h}) + \\
 & + \xi_1^2 \delta(\xi_2) - \xi_2^2 \delta(\xi_1) + \\
 & + \alpha_{12} (\xi_1 \delta(\xi_2) e^{-2\xi_1 h} - \xi_2 \delta(\xi_1) e^{-2\xi_2 h}) + \\
 & + \alpha_{11} (\xi_1 \delta(\xi_2) e^{-\xi_1 h} - \xi_2 \delta(\xi_1) e^{-\xi_2 h}) + \\
 & + \alpha_{10} (\xi_1 \delta(\xi_2) - \xi_2 \delta(\xi_1)) + \\
 & + \alpha_{02} (\delta(\xi_2) e^{-2\xi_1 h} - \delta(\xi_1) e^{-2\xi_2 h}) + \\
 & + \alpha_{01} (\delta(\xi_2) e^{-\xi_1 h} - \delta(\xi_1) e^{-\xi_2 h}) + \\
 & + \alpha_{00} (\delta(\xi_2) - \delta(\xi_1))) e^{-\lambda h} + \frac{1}{\beta_1 \delta(\xi_1) \delta(\xi_2) (\xi_1 - \xi_2)} \times \\
 & \times (\alpha_{22} \left( (\beta_0 - \xi_1) \delta(\xi_1) \xi_2^4 \frac{(e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_2)} - \right. \\
 & \left. - (\beta_0 - \xi_2) \delta(\xi_2) \xi_1^4 \frac{(e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_1)} \right) + \\
 & + (-2\alpha_{22}\beta_0 + \alpha_{21}\beta_1 + \alpha_{12}) \times \\
 & \times \left( (\beta_0 - \xi_1) \delta(\xi_1) \xi_2^3 \frac{(e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_2)} - \right. \\
 & \left. - (\beta_0 - \xi_2) \delta(\xi_2) \xi_1^3 \frac{(e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_1)} \right) + \\
 & + (-2\alpha_{12}\beta_0 + \alpha_{02} - \alpha_{21}\beta_0\beta_1 + \\
 & + \alpha_{11}\beta_1 + \beta_1^2 + \alpha_{22}\beta_0^2) \times \\
 & \times \left( (\beta_0 - \xi_1) \delta(\xi_1) \xi_2^2 \frac{(e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_2)} - \right. \\
 & \left. - (\beta_0 - \xi_2) \delta(\xi_2) \xi_1^2 \frac{(e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_1)} \right) + \\
 & + (\alpha_{10}\beta_1^2 - \alpha_{11}\beta_0\beta_1 - 2\alpha_{02}\beta_0 + \alpha_{12}\beta_0^2 + \alpha_{01}\beta_1) \times \\
 & \times \left( (\beta_0 - \xi_1) \delta(\xi_1) \xi_2 \frac{(e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_2)} - \right. \\
 & \left. - (\beta_0 - \xi_2) \delta(\xi_2) \xi_1 \frac{(e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_1)} \right) + \\
 & + (\alpha_{00}\beta_1^2 + \alpha_{02}\beta_0^2 - \alpha_{01}\beta_0\beta_1) \times \\
 & \times \left( (\beta_0 - \xi_1) \delta(\xi_1) \frac{(e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_2)} - \right. \\
 & \left. - (\beta_0 - \xi_2) \delta(\xi_2) \frac{(e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi_1)} \right) \Bigg).
 \end{aligned}$$

**Заключение.** В работе исследуется случай  $\xi_1 \neq \xi_2$ . Случай  $\xi_1 = \xi_2$  требует дальнейшего исследования.

**Литература**

1. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.  
 2. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.

**References**

1. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 3–7 (In Russian).  
 2. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 18–21 (In Russian).

**Информация об авторе**

**Якименко Андрей Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

**Information about the author**

**Yakimenka Andrei Aliksandravich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила 14.04.2017

УДК 517.588

**Л. Д. Яроцкая**

Белорусский государственный технологический университет

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРАМ  
G-ФУНКЦИИ МЕЙЕРА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА**

Проблема асимптотических разложений специальных функций по индексам или параметрам возникает в связи с исследованием некоторых классов индексных интегралов и преобразований по индексу. Наиболее общей функцией гипергеометрического типа, которая при соответствующих значениях параметров включает в себя элементарные функции, функции Бесселя и многие другие специальные функции, является G-функция Мейера. Для таких функций справедливо свойство иметь своим преобразованием Меллина отношение произведений гамма-функций Эйлера, асимптотика которых в соответствии с формулой Стирлинга известна.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотических свойств G-функции Мейера специального вида – ядра интегрального преобразования по индексу. Записано представление G-функции в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов со степенными множителями. Представлена формула Стирлинга для гамма-функции Эйлера комплексного аргумента, у которого мнимая часть неограниченно увеличивается, а действительная фиксирована. Установлены асимптотические оценки G-функции Мейера специального вида при больших значениях параметра. Показано, что полученное разложение включает в себя в качестве частных случаев известные в литературе некоторые представления функций Бесселя.

**Ключевые слова:** асимптотическое разложение, G-функция Мейера, преобразования по индексу, функции Бесселя, формула Стирлинга.

**L. D. Yarotskaya**

Belarusian State Technological University

**ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS  
OF SPECIAL MEIJER'S G-FUNCTION BY ITS PARAMETERS**

The problem of asymptotic expansions of special functions with respect to indices or parameters arises in connection with the certain classes of index integrals and transformations with respect to the index. Meijer's G-function is the most common function of the hypergeometric type, which includes elementary functions, Bessel type functions and many other special functions. The Mellin transforms of such functions are the ratio of the products of the Euler gamma functions whose asymptotics are known in accordance to the Stirling formula.

This paper deals with some asymptotic expansions of G-function of a special kind related to the index integral transform. The representation of the G-function is written in the form of a linear combination of generalized hypergeometric series with power multipliers. We give the Stirling formula for the Euler gamma function of a complex argument, for which the imaginary part is unbounded and the real part is fixed. Asymptotic estimates for the Meijer's G-function of a special form with respect to large values of the parameter are established. It is shown that such expansion includes, as special cases, earlier known representations of Bessel type functions.

**Key words:** asymptotic expansion, Meijer's G-function, index transform, Bessel type functions, Stirling formula.

**Введение.** Проблема асимптотических разложений специальных функций по индексам или параметрам возникает в связи с исследованием некоторых классов индексных интегралов [1] и преобразований по индексу [2]. Асимптотические представления на бесконечности по параметрам функций Макдональда, Уиттекера, Лежандра, гипергеометрической функции Гаусса и некоторых других получены в работе [3], аналогичные вопросы для двух функций Бесселевого типа рассмотрены в работе [4].

Общей функцией гипергеометрического типа, которая при соответствующих значениях

параметров включает в себя элементарные функции, перечисленные выше специальные функции и многие другие функции, является G-функция Мейера. Элементы теории этой функции излагаются в справочнике [5].

Интегральные преобразования несверточного типа с G-функцией Мейера в ядре были введены в работе [6] и исследованы в [7] в пространстве функций  $\mathcal{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ .

Настоящая работа посвящена изучению асимптотических свойств G-функции Мейера специального вида, введенной в работе [8] в качестве ядра интегрального преобразования по

индексу в весовых пространствах суммируемых с квадратом функций.

Асимптотическое поведение функций гипергеометрического типа различно в зависимости от того, что стремится к бесконечности: параметры, независимая переменная или эти величины вместе. Исследования в этой области основаны или на интегральных представлениях, или же непосредственно на дифференциальном уравнении, или на подходящем разложении в бесконечный ряд [9].

Метод исследования в настоящей работе основан на представлении G-функции Мейера в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов и применении формулы Стирлинга для гамма-функции Эйлера.

**Основная часть.**

**1. Предварительные сведения.** G-функция Мейера определяется контурным интегралом Меллина – Барнса

$$G_{p,q}^{m,n} \left( z \left| \begin{matrix} (a)_p \\ (b)_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \Psi(s) z^{-s} ds \quad (1)$$

для целых неотрицательных  $m, n, p, q, 0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$ , комплексных  $a_i$  и  $b_j$  при  $z \neq 0$ , где

$$\Psi(s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + s)}, \quad (2)$$

при этом пустые произведения в (2) (если таковые имеются) считаются равными единице. Здесь  $L$  – специально выбранный замкнутый контур, проходящий через бесконечно удаленную точку и разделяющий все левые полюсы  $s = -b_j - k, j = 1, \dots, m$ , числителя от правых  $s = 1 - a_i + k, i = 1, \dots, n, k = 0, 1, 2, \dots$

Важным свойством G-функции является то, что ее преобразование Меллина, определяемое равенством

$$(\mathfrak{M}f)(s) = \int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

является отношением произведений гамма-функций Эйлера и совпадает с функцией (2):

$$\left( \mathfrak{M} G_{p,q}^{m,n} \left( z \left| \begin{matrix} (a)_p \\ (b)_q \end{matrix} \right. \right) \right)(s) = \Psi(s)$$

при определенных условиях на параметры.

Замена переменной в интеграле (1) дает формулу симметрии:

$$G_{p,q}^{m,n} \left( z \left| \begin{matrix} (a)_p \\ (b)_q \end{matrix} \right. \right) = G_{q,p}^{n,m} \left( \frac{1}{z} \left| \begin{matrix} 1 - (b)_q \\ 1 - (a)_p \end{matrix} \right. \right). \quad (4)$$

Свойство (4) позволяет преобразовать G-функцию, для которой  $p > q$ , в G-функцию, где  $p < q$ . Поэтому, не теряя общности, можно считать, что  $p \leq q$ .

Важным рядом в приложениях и теории специальных функций является обобщенный гипергеометрический ряд

$${}_p F_q \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z \right) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (5)$$

содержащий в числителе  $p$ , а в знаменателе  $q$  параметров, коэффициенты которого определяются символом Похгаммера

$$(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1), (a)_0 = 1.$$

Ряд в правой части (5) абсолютно сходится при всех  $z$ , если  $p \leq q$ . Функции, представимые в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов, а также функции, которые можно непрерывно получить из такой линейной комбинации предельными переходами по параметрам, принято относить к классу функций гипергеометрического типа.

Отметим, что функции Бесселя являются частными случаями G-функции Мейера. Укажем некоторые представления [1], [10]:

1) функция Макдональда:

$$K_\nu(2\sqrt{x}) = \frac{1}{2} G_{0,2}^{2,0} \left( x \left| \begin{matrix} \\ \nu/2, -\nu/2 \end{matrix} \right. \right); \quad (6)$$

2) линейная комбинация функций Бесселя первого рода и функции Макдональда:

$$\begin{aligned} & \left[ J_{-\nu} \left( 2\sqrt{2x}^{\frac{1}{4}} \right) - J_\nu \left( 2\sqrt{2x}^{\frac{1}{4}} \right) \right] K_\nu \left( 2\sqrt{2x}^{\frac{1}{4}} \right) = \\ & = \frac{\sin(\pi\nu/2)}{2\sqrt{\pi}} G_{0,4}^{3,0} \left( x \left| \begin{matrix} \\ 0, \nu/2, -\nu/2, 1/2 \end{matrix} \right. \right); \quad (7) \end{aligned}$$

3) линейная комбинация функций гипергеометрического типа [4]:

$$\begin{aligned} C_s(2\sqrt{x}, 2\tau) &= \frac{1}{2\tau} {}_1F_2(1; 1 - i\tau, 1 + i\tau; x) - \\ & - \frac{\pi}{4 \operatorname{sh}(\pi\tau)} \left[ I_{2i\tau}(2\sqrt{x}) + I_{-2i\tau}(2\sqrt{x}) \right] = \\ & = \frac{\operatorname{sh}(\pi\tau)}{2} G_{2,4}^{3,1} \left( x \left| \begin{matrix} 0, 1/2 \\ i\tau, -i\tau, 0, 1/2 \end{matrix} \right. \right). \quad (8) \end{aligned}$$

**2. Постановка задачи.** Изучить асимптотические свойства G-функции Мейера специального вида действительного аргумента

$$G(x) = G_{2n, 2m+2}^{m+2, n} \left( x^2 \left| \begin{matrix} 1/2 + (a)_n, (a)_n \\ i\tau, -i\tau, (b)_m, 1/2 - (b)_m \end{matrix} \right. \right). \quad (9)$$

Функция (9) рассматривалась в работе [8] в качестве ядра интегрального преобразования по индексу.

Предположим, что

$$m \geq n, a_j, b_k \in \mathbb{R}, j=1, \dots, n, k=1, \dots, m, \quad (10)$$

и никакие из параметров  $b_1, \dots, b_m$  не совпадают и не отличаются на целое число.

Выражение G-функции Мейера через линейные комбинации обобщенных гипергеометрических рядов (5) со степенными множителями следует из теоремы Слейтер [10].

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (10) и условия

$$a_j > -\frac{1}{2}, \quad a_j > -\frac{1}{2} - b_k, \\ j=1, \dots, n, \quad k=1, \dots, m. \quad (11)$$

Тогда для действительных значений  $x$  G-функцию Мейера (9) можно представить следующим выражением:

$$2\operatorname{Re}_{it} \left[ x^{2it} \Gamma \left( \begin{matrix} -2it, (b)_m - it, 1/2 - (a)_n + it \\ -(a)_n - it, 1/2 + (b)_m + it \end{matrix} \right) \times \right. \\ \left. \times {}_{2n}F_{2m+1} \left( \begin{matrix} 1/2 - (a)_n + it, 1 + (a)_n + it \\ 1 + 2it, 1 - (b)_m + it, 1/2 + (b)_m + it \end{matrix} ; \right. \right. \\ \left. \left. (-1)^{n-m} x^2 \right) \right] + \sum_{j=1}^m x^{2b_j} \Gamma(it - b_j, -it - b_j) \times \\ \times \Gamma \left( \begin{matrix} (b)'_m - b_j, 1/2 - (a)_n + b_j \\ -(a)_n - b_j, 1/2 + (b)_m + b_j \end{matrix} \right) \times \\ \times {}_{2n}F_{2m+1} \left( \begin{matrix} 1/2 - (a)_n + b_j \\ 1 - it + b_j, 1 + it + b_j, 1 - (b)'_m + b_j, \\ 1 + (a)_n + b_j \\ 1/2 + (b)_m + b_j \end{matrix} ; (-1)^{n-m} x^2 \right), \quad (12)$$

где  $(b)'_m - b_j$  означает

$$b_1 - b_j, \dots, b_{j-1} - b_j, b_{j+1} - b_j, \dots, b_m - b_j.$$

Из формул (12) и (4) непосредственно вытекают асимптотические оценки для G-функции (9) действительного аргумента:

$$G(x) = \begin{cases} O(x^{2\beta}), & x \rightarrow 0, \beta = \min_{1 \leq j \leq m} \{b_j\}, \\ O(|x|^{2\alpha-2}), & x \rightarrow \infty, \alpha = \max_{1 \leq j \leq n} \{a_j\}. \end{cases} \quad (13)$$

Метод нахождения асимптотических выражений функции (9) при фиксированных  $x$  и больших  $\tau$  основан на применении формулы Стирлинга для гамма-функции Эйлера [5]:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \left( 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad (14)$$

когда  $z \rightarrow \infty$  и  $|\arg z| < \pi$ .

**Лемма.** При  $\tau \rightarrow +\infty$  справедливо равенство

$$\Gamma(\alpha \pm i\tau) = \sqrt{2\pi} \tau^{\tau-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi\tau}{2}} \times \\ \times \exp \left[ \pm i \left\{ \frac{\pi}{2} \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) + \tau \ln \tau - \tau \right\} - O\left(\frac{1}{\tau}\right) \right]. \quad (15)$$

Доказательство основано на оценке остаточного члена формулы (14), исходя из формулы Бине:

$$\ln \Gamma(z) = \left( z - \frac{1}{2} \right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \\ + \int_0^\infty \left[ \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right] \frac{e^{-zt}}{t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (16)$$

Пусть  $z = \alpha + i\tau$ ,  $\alpha > 0$ . Без потери общности будем считать, что  $\alpha$  и  $\tau$  – действительные числа. Обозначим

$$\varphi(\alpha + i\tau) = \int_0^\infty \left[ \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right] \frac{e^{-(\alpha+i\tau)t}}{t} dt = \\ = \int_0^\infty \phi(t) t^{-\gamma} e^{-i\tau t} dt, \quad 0 < \gamma < 1,$$

где

$$\phi(t) = \left[ \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right] e^{-\alpha t} t^{-\beta}, \quad \beta = 1 - \gamma.$$

Очевидно, что  $\phi(t)$  – функция ограниченной вариации на интервале  $(0; +\infty)$ . Более того, имеют место асимптотические соотношения:

$$\phi(t) = O(t^\gamma), \quad t \rightarrow +0,$$

$$\phi(t) = O(t^{-\beta} e^{-\alpha t}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Отсюда, согласно теореме 126 из [11], получим

$$\varphi(\alpha + i\tau) = \int_0^\infty \phi(t) t^{-\gamma} \cos(\tau t) dt + \\ + i \int_0^\infty \phi(t) t^{-\gamma} \sin(\tau t) dt = O\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (17)$$

В силу (16) и (17), запишем формулу (14) в виде

$$\Gamma(\alpha \pm i\tau) = \sqrt{2\pi} \exp \left[ \left( \alpha - \frac{1}{2} \pm i\tau \right) \times \right. \\ \left. \times \left\{ \ln \sqrt{\tau^2 + \alpha^2} \pm i \arctg \frac{\tau}{\alpha} \right\} - \alpha \mp i\tau - O\left(\frac{1}{\tau}\right) \right] =$$

$$= \sqrt{2\pi\tau}^{\alpha-1/2} e^{-\pi\tau/2} \times \exp\left[\pm\left\{\frac{\pi}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \tau \ln \tau - \tau\right\} - O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right].$$

Отсюда после непосредственных преобразований следует формула (15).

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (10). Тогда справедливо асимптотическое разложение функции (9) при  $\tau \rightarrow +\infty$ :

$$G(x) = 2\pi e^{-\pi\tau} \tau^{-1} \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}^{(m-n-1)/2}} \cos((2m-2n+2) \times (\tau \ln \tau - \tau) - 2\tau \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2\tau^{2(m-n)+1}} + \frac{\pi}{2}\chi) + \sum_{j=1}^m C_j \left(\frac{x}{\tau}\right)^{2b_j} {}_{2n}F_{2m-1} \left[ \begin{matrix} 1/2 - (a)_n + b_j \\ 1 - (b)'_m + b_j \end{matrix} ; (-1)^{n-m} \left(\frac{x}{\tau}\right)^2 \right] \right] \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right), \quad (18)$$

где

$$\chi = 2 \sum_{j=1}^m b_j + 2 \sum_{j=1}^n a_j - \frac{m-n+1}{2},$$

$$C_j = \Gamma \left[ \begin{matrix} (b)'_m - b_j, 1/2 - (a)_n + b_j \\ -(a)_n - b_j, 1/2 + (b)_m + b_j \end{matrix} \right].$$

Доказательство основано на применении леммы для гамма-множителей в представлении (12) функции (9). Оценим символ Похгаммера при  $\tau \rightarrow +\infty$ :

$$(a + i\tau)_k = \frac{\Gamma(a + i\tau + k)}{\Gamma(a + i\tau)} = (i\tau)^k \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right).$$

Тогда первый гипергеометрический ряд в формуле (12) оценим следующим образом:

$${}_{2n}F_{2m+1} \left[ \begin{matrix} 1/2 - (a)_n + i\tau, 1 + (a)_n + i\tau \\ 1 + 2i\tau, 1 - (b)_m + i\tau, 1/2 + (b)_m + i\tau \end{matrix} ; (-1)^{n-m} x^2 \right] = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^M \frac{(1/2 - (a)_n + i\tau)_k}{(1 + 2i\tau)_k (1 - (b)_m + i\tau)_k} \times$$

$$\times \frac{(1 + (a)_n + i\tau)_k}{(1/2 + (b)_m + i\tau)_k} \frac{((-1)^{n-m} x^2)^k}{k!} = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^M \frac{(-1)^{n-m} (i\tau)^{2n-2m-1} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!} \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right) = \exp\left(-\frac{ix^2}{2\tau^{1+2(m-n)}}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right), \tau \rightarrow +\infty.$$

Аналогичные рассуждения для второго слагаемого в (12) приводят к соотношению (18).

Из формулы (18) следуют следующие асимптотические разложения для функций (6)–(8):

$$K_{i\tau}(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}} e^{-\pi\tau/2} \sin\left(\tau \ln\left(\frac{2\tau}{x}\right) - \tau + \frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{4\tau}\right) \times \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right), \tau \rightarrow +\infty, \quad (19)$$

$$\left[ J_{-2i\tau}(2\sqrt{2x}) - J_{2i\tau}(2\sqrt{2x}) \right] K_{2i\tau}(2\sqrt{2x}) = \frac{i}{2\tau} \left[ \cos\left(\tau \left(\ln\frac{4\tau^4}{x^2} - 4\right) + \frac{x^2}{2\tau^3}\right) + \cos\frac{2x}{\tau} \right] \times \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right), \tau \rightarrow +\infty, \quad (20)$$

$$C_s(2x, 2\tau) = \left[ \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \cos\left(\tau \ln\frac{4\tau^2}{x} - \tau - \frac{3\pi}{4} + \frac{x^2}{2\tau^5}\right) + \frac{\tau}{\tau^2 - x^2} \right] \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right), \tau \rightarrow +\infty. \quad (21)$$

Отметим, что формула (19) уточняет асимптотическое разложение, полученное в монографии [12, с. 182].

**Заключение.** Для G-функции Мейера записано представление в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов со степенными множителями. Представлена формула Стирлинга для гамма-функции Эйлера комплексного аргумента, у которого мнимая часть неограниченно увеличивается, а действительная фиксирована. Установлены асимптотические оценки G-функции Мейера специального вида при больших значениях параметра. Показано, что полученное разложение включает в качестве частных случаев известные в литературе представления функций бesselевого типа.

### Литература

1. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 800 с.
2. Yakubovich S. B. Index transforms. Singapore: World Scientific Publ., 1996. 252 p.
3. Yakubovich S. B., Saigo M., Gusarevich L. D. Some asymptotic expansions of special functions by their indices // Fukuoka Univ. Sci. Reports. 1995. Vol. 25, no. 1. P. 23–32.



4. Яроцкая Л. Д. Асимптотические представления по индексу функций бesselевого типа // Труды БГТУ, Сер. VI: Физ.-мат. науки и информатика. 2004. Вып. XII. С. 18–21.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 295 с.
6. Wimp J. A class of integral transforms // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1964. Vol. 14, no. 2. P. 33–40.
7. Yakubovich S. B., Luchko Yu. F. The hypergeometric approach to integral transforms and convolutions. Ser. Mathematics and its Applications. Vol. 287. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994. 336 p.
8. Yarotskaya L. D. On index transforms with Meijer's G-function kernels // Integral Transforms and Special Functions. 2000. Vol. 10, no. 3–4. P. 309–320.
9. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.
10. Маричев О. И. Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Минск: Наука и техника, 1978. 312 с.
11. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 334 с.
12. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 379 с.

### References

1. Prudnikov A. P., Brychkov Ju. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Spetsial'nye funktsii* [Integrals and Series. Special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 800 p.
2. Yakubovich S. B. Index transforms. Singapore, World Scientific Publ., 1996. 252 p.
3. Yakubovich S. B., Saigo M., Gusarevich L. D. Some asymptotic expansions of special functions by their indices. *Fukuoka Univ. Sci. Reports*, 1995, vol. 25, no. 1, pp. 23–32.
4. Yarotskaya L. D. Asymptotic representations of the Bessel type functions by their indices. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physical-mathematical sciences and informatics, 2004, issue XII, pp. 31–33 (In Russian).
5. Beytmen G., Erdeyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Gipergeometricheskaya funktsiya. Funktsii Lezhandra* [Higher Transcendental Functions. Hypergeometric function. Legendre functions]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 295 p.
6. Wimp J. A class of integral transforms. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 1964., vol. 14, no. 2, pp. 33–40.
7. Yakubovich S. B., Luchko Yu. F. The hypergeometric approach to integral transforms and convolutions. Ser. Mathematics and its Applications. Vol. 287. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1994. 336 p.
8. Yarotskaya L. D. On index transforms with Meijer's G-function kernels. *Integral Transforms and Special Functions*, 2000, vol. 10, no. 3–4, pp. 309–320.
9. Olver F. *Asimptotika i spetsial'nye funktsii* [Asymptotics and special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 528 p.
10. Marichev O. I. *Metod vychisleniya integralov ot spetsial'nykh funktsiy (teoriya i tablitsy formul)* [The method of calculating integrals of special functions (theory and tables of formulas)]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1978. 312 p.
11. Titchmarsh Ye. *Vvedenie v teoriyu integralov Fur'ye* [Introduction to the theory of Fourier integrals]. Moscow; Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1948. 334 p.
12. Lebedev N. N. *Spetsial'nye funktsii i ikh prilozheniya* [Special functions and their applications]. Moscow; Leningrad, Fizmatgiz Publ., 1963. 379 p.

### Информация об авторе

**Яроцкая Людмила Дмитриевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yarockaya@belstu.by

### Information about the author

**Yarotskaya Lyudmila Dmitrievna** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yarockaya@belstu.by

Поступила 27.04.2017

УДК 514.765.12

**Н. П. Можей**

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

**НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА СИММЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ**

В работе представлена локальная классификация трехмерных симметрических однородных пространств, допускающих нормальную связность. В статье рассматривается случай неразрешимой группы Ли преобразований. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Описаны инвариантные аффинные связности вместе с их тензорами кривизны и кручения, исследованы алгебры голономии однородных пространств и найдено, когда инвариантная связность нормальна. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

**Ключевые слова:** нормальная связность, группа преобразований, симметрическое пространство, алгебра голономии.

**N. P. Mozhey**

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

**NORMAL CONNECTIONS ON SYMMETRIC MANIFOLDS**

In this article we present a local classification of three-dimensional symmetric homogeneous spaces allowing a normal connection. We have considered the case of the unsolvable Lie group of transformations. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of the effective pairs of Lie algebras. We describe invariant affine connections together with their curvature and torsion tensors. We have studied the holonomy algebras of homogeneous spaces and have found when the invariant connection is normal. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. The peculiarity of techniques presented in the work is the application of purely algebraic approach, as well as combination of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras and the theory of homogeneous spaces.

**Key words:** normal connection, transformation group, symmetric space, holonomy algebra.

**Введение.** Понятие нормальной связности ввел Э. Картан для риманова многообразия (см. [1]). Многообразия с плоской нормальной связностью исследовали Д. И. Перепелкин и Ф. Фабрициус-Бьерре, а также Э. Картан. Итоги этих исследований подведены в монографии Б. Чена [2]. Симметрические пространства обладают математически красивыми свойствами – это пространства аффинной связности без кручения, тензор кривизны которых сохраняется при параллельном перенесении (см. [1]). Симметрические римановы пространства впервые исследовал П. А. Широков, классификация римановых симметрических пространств получена Э. Картаном, им была решена и задача локальной классификации симметрических однородных пространств с простыми компактными основными группами (см. [3]). Трехмерные редуктивные однородные пространства с неразрешимой группой преобразований, допускающие нормальные связности, изучались в [4], симметрические однородные пространства с разрешимой группой преобразований, допускающие нормальные связности, исследуются в [5], где приведен более подробный тематический

обзор, а также обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В данной работе также изучаются нормальные связности на симметрических многообразиях, но внимание сосредоточено на пространствах, на которых действует неразрешимая группа преобразований.

**1. Основные определения.** Пусть  $M$  – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа  $\bar{G}$ ,  $G = \bar{G}_x$  – стабилизатор произвольной точки  $x \in M$ . Проблема классификации однородных пространств  $(M, \bar{G})$  равносильна классификации пар групп Ли  $(\bar{G}, G)$ , где  $G \subset \bar{G}$ , так как  $M$  может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов  $\bar{G}/G$ . Пусть  $\bar{\mathfrak{g}}$  – алгебра Ли группы Ли  $\bar{G}$ , а  $\mathfrak{g}$  – подалгебра, соответствующая подгруппе  $G$ . Пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  алгебр Ли называется эффективной, если подалгебра  $\mathfrak{g}$  не содержит отличных от нуля идеалов  $\bar{\mathfrak{g}}$ . Пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется изотропно-точной, если точно

изотропное представление  $\mathfrak{g}$ . Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для  $G$  должно быть точным, если  $\bar{G}$  эффективна на  $\bar{G}/G$ . Аффинной связностью на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется такое отображение  $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ , что его ограничение на  $\mathfrak{g}$  – изотропное представление подалгебры, а все отображение является  $\mathfrak{g}$ -инвариантным. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к  $\mathfrak{g}$  в  $\bar{\mathfrak{g}}$ , и фактор-пространство  $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ .

Симметрическое пространство есть тройка  $(\bar{G}, G, \sigma)$ , состоящая из связной группы Ли  $\bar{G}$ , замкнутой подгруппы  $G$  для  $\bar{G}$  и инволютивного автоморфизма  $\sigma$  для  $\bar{G}$  такого, что  $\sigma(g) = s_o \circ g \circ s_o^{-1}$  для  $g \in \bar{G}$ , где  $s_o$  – симметрия для  $M$  в  $o$ . Пусть  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$  – симметрическая алгебра Ли. Поскольку  $\sigma$  инволютивно, то его собственными значениями являются 1 и  $-1$ , а  $\mathfrak{g}$  – собственное подпространство для 1. Пусть  $\mathfrak{m}$  – собственное подпространство для  $-1$ . Разложение  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$  называется каноническим разложением для  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$ . Если  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$  – каноническое разложение симметрической алгебры Ли  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$ , то  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ ,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ ,  $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$ . Тензор кручения  $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$  и тензор кривизны  $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$  имеют вид

$$T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m,$$

$$R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех  $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ . Алгебра Ли  $\mathfrak{h}^*$  группы голономии инвариантной связности  $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  – это подалгебра алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  вида  $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$ , где  $V$  – подпространство, порожденное множеством  $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ . Положим  $\mathfrak{a}$  равной подалгебре в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , порожденной  $\{\Lambda(x) \mid x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ . Будем говорить, что связность нормальна, если  $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$ .

**2. Классификация симметрических пространств.** Будем описывать пару  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  при помощи таблицы умножения  $\bar{\mathfrak{g}}$ . Через  $\{e_1, \dots, e_n\}$  обозначим базис  $\bar{\mathfrak{g}}$  ( $n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$ ). Будем полагать, что  $\mathfrak{g}$  порождается  $e_1, \dots, e_{n-3}$ , а  $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$  – базис  $\mathfrak{m}$ . Для нумерации подалгебр используем запись  $d.n$ , для

нумерации пар –  $d.n.m$ , здесь  $d$  – размерность подалгебры,  $n$  – номер подалгебры в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , а  $m$  – номер пары  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ . Будем описывать связность через образы базисных векторов  $\Lambda(u_1), \Lambda(u_2), \Lambda(u_3)$ , тензор кривизны  $R$  – через  $R(u_1, u_2), R(u_1, u_3), R(u_2, u_3)$ , а тензор кручения  $T$  – через  $T(u_1, u_2), T(u_1, u_3), T(u_2, u_3)$ .

**Теорема 1.** Все трехмерные симметрические однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие, что  $\bar{\mathfrak{g}}$  неразрешима, а  $\mathfrak{g}$  разрешима ( $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ ), локально имеют следующий вид:

1.1.5	$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$		
$e_1$	0	$u_1$	$-u_2$	0	,	
$u_1$	$-u_1$	0	$e_1$	0		
$u_2$	$u_2$	$-e_1$	0	0		
$u_3$	0	0	0	0		
1.3.5	$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$		
$e_1$	0	$-u_2$	$u_1$	0	,	
$u_1$	$u_2$	0	$e_1$	0		
$u_2$	$-u_1$	$-e_1$	0	0		
$u_3$	0	0	0	0		
1.3.6	$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$		
$e_1$	0	$-u_2$	$u_1$	0	,	
$u_1$	$u_2$	0	$-e_1$	0		
$u_2$	$-u_1$	$e_1$	0	0		
$u_3$	0	0	0	0		
2.9.12	$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$e_1$	0	$-e_2$	$u_1$	$-2u_2$	$2u_3$	
$e_2$	$e_2$	0	0	0	$u_1$	
$u_1$	$-u_1$	0	0	$e_2$	0	
$u_2$	$2u_2$	0	$-e_2$	0	$-e_1$	
$u_3$	$-2u_3$	$-u_1$	0	$e_1$	0	
3.19.14	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$-e_2$	$e_3$	0	$u_2$	$-u_3$
$e_2$	$e_2$	0	0	0	$u_1$	0
$e_3$	$-e_3$	0	0	0	0	$u_1$
$u_1$	0	0	0	0	$e_3$	$e_2$
$u_2$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_3$	0	$e_1$
$u_3$	$u_3$	0	$-u_1$	$-e_2$	$-e_1$	0
3.21.6	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$-e_3$	$e_2$	0	$-u_3$	$u_2$
$e_2$	$e_3$	0	0	0	$u_1$	0
$e_3$	$-e_2$	0	0	0	0	$u_1$
$u_1$	0	0	0	0	$e_2$	$e_3$
$u_2$	$u_3$	$-u_1$	0	$-e_2$	0	$e_1$
$u_3$	$-u_2$	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_1$	0
3.21.7	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$-e_3$	$e_2$	0	$-u_3$	$u_2$
$e_2$	$e_3$	0	0	0	$u_1$	0
$e_3$	$-e_2$	0	0	0	0	$u_1$
$u_1$	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$
$u_2$	$u_3$	$-u_1$	0	$e_2$	0	$-e_1$
$u_3$	$-u_2$	0	$-u_1$	$e_3$	$e_1$	0

*Замечание.* Если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, накладываются некоторые дополнительные условия, то они записываются сразу после таблицы умножения. В противном случае предполагается, что параметры пробегает все  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Сначала описаны трехмерные изотропно-точные пары. Для этого классифицированы подалгебры  $\mathfrak{g}$  в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , а далее найдены (с точностью до эквивалентности) пары  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ . Из них выбраны симметрические пары с неразрешимой  $\bar{\mathfrak{g}}$  и разрешимой  $\mathfrak{g}$ , допускающие нормальную связность, т. е. для которых  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$ ,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ ,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ ,  $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$ .

Если  $\mathfrak{g}$  – разрешимая подалгебра алгебры  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , такая, что пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  задает трехмерное симметрическое однородное пространство, допускающее нормальную связность,  $\bar{\mathfrak{g}}$  не является разрешимой и  $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ , то  $\mathfrak{g}$  сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:

$$\begin{array}{l}
 1.1 \quad \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline -x \\ \hline \end{array}; \quad 1.3 \quad \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline -x \\ \hline \end{array}; \quad 2.9 \quad \begin{array}{|cc|} \hline y & x \\ \hline & -2y \\ \hline & & 2y \\ \hline \end{array}; \\
 3.19 \quad \begin{array}{|cc|} \hline & y & z \\ \hline & x & \\ \hline & & -x \\ \hline \end{array}; \quad 3.21 \quad \begin{array}{|cc|} \hline & y & z \\ \hline & & x \\ \hline & & -x \\ \hline \end{array}.
 \end{array}$$

Здесь предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат  $\mathbb{R}$ . Базис подалгебры, по умолчанию, будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Для каждой такой подалгебры найдем изотропно-точные пары. Рассмотрим, например, пару типа 1.1. Из тождества Якоби следует, что  $[u_1, u_2] = a_1 e_1 + \alpha_3 u_3$ ,  $[u_1, u_3] = \beta_1 u_1$ ,  $[u_2, u_3] = \gamma_2 u_2$ . Если  $\beta_1 + \gamma_2 \neq 0$ , то  $a_1 = \alpha_3 = 0$  и пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  эквивалентна паре, не входящей в рассматриваемый в работе класс пар. При  $\beta_1 + \gamma_2 = 0$ ,  $a_1 \neq 0$  и  $\alpha_3 \neq 0$  пара эквивалентна 1.1.5. При  $\beta_1 + \gamma_2 = 0$ ,  $a_1 \alpha_3 = 0$  пара эквивалентна одной из пар, не входящих в изучаемый в работе класс.

Рассмотрим теперь пару типа 1.3. Тогда  $[e_1, u_1] = -u_2$ ,  $[e_1, u_2] = u_1$ ,  $[e_1, u_3] = p e_1$ ,  $p \in \mathbb{R}$ . Из тождества Якоби получим  $[u_1, u_2] = a_1 e_1 + \alpha_3 u_3$ ,  $[u_1, u_3] = \beta_1 u_1$ ,  $[u_2, u_3] = \beta_1 u_2$ . При  $\alpha_3 = 0$ ,  $a_1 \neq 0$

пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  эквивалентна 1.3.5 или 1.3.6 посредством  $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_{5(6)} \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ ,  $\pi(e_1) = e_1$ ,  $\pi(u_1) = \sqrt{|a_1|} u_1$ ,  $\pi(u_2) = \sqrt{|a_1|} u_2$ ,  $\pi(u_3) = u_3$ . Пары 1.3.5 и 1.3.6 не эквивалентны, поскольку подалгебра Леви  $(\bar{\mathfrak{g}}_6, \mathfrak{g}_6)$  изоморфна  $\mathfrak{su}(2)$ , а подалгебра Леви  $(\bar{\mathfrak{g}}_6, \mathfrak{g}_6)$  изоморфна  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . В остальных случаях  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  эквивалентна одной из пар, не входящих в рассматриваемый в работе класс.

Рассмотрим теперь подалгебру 3.21. Тогда

$$\begin{aligned}
 [e_1, u_1] &= 0, [e_2, u_1] = p e_2, [e_3, u_1] = p e_3, \\
 [e_1, u_2] &= q e_3 - u_3, [e_2, u_2] = u_1, [e_3, u_2] = p e_1, \\
 [e_1, u_3] &= u_2 + r e_3, [e_2, u_3] = -p e_1, [e_3, u_3] = u_1,
 \end{aligned}$$

при  $p \neq 0$  пространство не является симметрическим. Если  $p = 0$ , то имеем: при  $r \neq 0$  пространство также не является симметрическим, при  $a_2 = r = 0$  пара эквивалентна тривиальной паре, алгебра является разрешимой и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр, при  $a_2 > 0$ ,  $r = 0$  пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  эквивалентна паре 3.21.6 (это пространство является симметрическим), при  $a_2 < 0$ ,  $r = 0$  пара эквивалентна 3.21.7. Заметим, что  $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_6$ ,  $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_7$ , подалгебра Леви в  $\bar{\mathfrak{g}}_6$  изоморфна  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , а подалгебра Леви в  $\bar{\mathfrak{g}}_7$  изоморфна  $\mathfrak{su}(2)$ . Отсюда следует, что пары не эквивалентны друг другу.

Остальные случаи исследуются аналогично.

Пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал  $\mathfrak{a}$  в алгебре Ли  $\bar{\mathfrak{g}}$ , такой, что  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$ .

**Теорема 2.** Все трехмерные симметрические тривиальные однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие, что  $\bar{\mathfrak{g}}$  и  $\mathfrak{g}$  неразрешимы, локально имеют вид  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$ , где  $\mathfrak{g}$  (подалгебра алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ ) сопряжена только одной из подалгебр

$$3.3 \quad \begin{array}{|cc|} \hline x & y \\ \hline z & -x \\ \hline \end{array}; \quad 3.4 \quad \begin{array}{|cc|} \hline x & y \\ \hline z & & y \\ \hline & & z & -x \\ \hline \end{array}; \quad 3.5 \quad \begin{array}{|cc|} \hline & y & x \\ \hline -y & & z \\ \hline -x & & -z \\ \hline \end{array}.$$

Все трехмерные симметрические нетривиальные однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие, что  $\bar{\mathfrak{g}}$  и  $\mathfrak{g}$  неразрешимы, локально имеют следующий вид:

3.4.2	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
	0	$e_2$	$-e_3$	$u_1$	0	$-u_3$
	$e_2$	0	$e_1$	0	$u_1$	$u_2$
	$e_3$	$-e_1$	0	$u_2$	$u_3$	0
	$u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$e_2$
	$u_2$	0	$-u_1$	$-u_3$	$-e_2$	0
	$u_3$	$u_3$	$-u_2$	0	$e_1$	$e_3$
	0	$e_2$	$-e_3$	$u_1$	0	$-u_3$
	$-e_2$	0	$e_1$	0	$u_1$	$u_2$
	$e_3$	$-e_1$	0	$u_2$	$u_3$	0
	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$-e_2$	$e_1$
	0	$-u_1$	$-u_3$	$e_2$	0	$e_3$
	$u_3$	$-u_2$	0	$-e_1$	$-e_3$	0
3.4.3	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
	0	$e_2$	$-e_3$	$u_1$	0	$-u_3$
	$-e_2$	0	$e_1$	0	$u_1$	$u_2$
	$e_3$	$-e_1$	0	$u_2$	$u_3$	0
	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$-e_2$	$e_1$
	0	$-u_1$	$-u_3$	$e_2$	0	$e_3$
	$u_3$	$-u_2$	0	$-e_1$	$-e_3$	0
3.5.2	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
	0	$e_3$	$-e_2$	$-u_3$	0	$u_1$
	$-e_3$	0	$e_1$	$-u_2$	$u_1$	0
	$e_2$	$-e_1$	0	0	$-u_3$	$u_2$
	$u_1$	$u_3$	$u_2$	0	0	$e_2$
	$u_2$	0	$-u_1$	$u_3$	$-e_2$	0
	$u_3$	$-u_1$	0	$-u_2$	$-e_1$	$-e_3$
3.5.3	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
	0	$e_3$	$-e_2$	$-u_3$	0	$u_1$
	$-e_3$	0	$e_1$	$-u_2$	$u_1$	0
	$e_2$	$-e_1$	0	0	$-u_3$	$u_2$
	$u_1$	$u_3$	$u_2$	0	0	$-e_2$
	$u_2$	0	$-u_1$	$u_3$	$e_2$	0
	$u_3$	$-u_1$	0	$-u_2$	$e_1$	$e_3$

*Доказательство.* Все тривиальные однородные пространства являются симметрическими. В теореме выписаны неразрешимые подалгебры алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , допускающие нормальную связность. Аналогично приведенному выше, если  $\mathfrak{g}$  – неразрешимая подалгебра алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , такая, что пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  нетривиальная симметрическая, допускающая нормальную связность, а  $\bar{\mathfrak{g}}$  неразрешима, то  $\mathfrak{g}$  сопряжена одной и только одной из подалгебр 3.4, 3.5. Найдем изотропно-точные пары.

Рассмотрим пару  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  типа 3.4. Пусть  $\mathfrak{h}$  (нильпотентная подалгебра алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ ) порождена вектором  $e_1$ ,  $\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}u_2$ ,  $\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}u_1$ ,  $\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}u_3$ ,  $[u_1, u_2] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})$ ,  $[u_1, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})$ ,  $[u_2, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})$ , тогда, используя тождество Якоби, получим, что  $[u_1, u_2] = a_2e_2 + \alpha_1u_1$ ,  $[u_1, u_3] = -a_2e_1 + \alpha_1u_2$ ,  $[u_2, u_3] = -a_2e_3 + \alpha_1u_3$ . Положим  $p = a_2 + \alpha_1^2/4$ . При  $p = 0$  пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  эквивалентна тривиальной паре при помощи отображения  $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_1 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ ,  $\pi(e_i) = e_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $\pi(u_1) = u_1 - (\alpha_1/2)e_2$ ,  $\pi(u_2) = u_2 + (\alpha_1/2)e_1$ ,  $\pi(u_3) = u_3 + (\alpha_1/2)e_3$ . При  $p > 0$  пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  эк-

вивалентна 3.4.2, при  $p < 0$  пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  эквивалентна 3.4.3.

Поскольку  $\dim \tau(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \dim \tau(\bar{\mathfrak{g}}_2)$  и  $\dim \tau(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \dim \tau(\bar{\mathfrak{g}}_3)$ , пара  $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$  не эквивалентна  $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$  и  $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$ . Поскольку  $\bar{\mathfrak{g}}_3$  – простая алгебра Ли  $(\bar{\mathfrak{g}}_3 \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$ , а алгебра Ли  $\bar{\mathfrak{g}}_2$  не проста  $(\bar{\mathfrak{g}}_2 \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ , пары  $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$  и  $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$  не эквивалентны.

Рассмотрим пару типа 3.5. В силу тождества Якоби (с учетом того, что  $\mathfrak{g}$  – полупростая алгебра Ли)  $[u_1, u_2] = a_2e_2 + \alpha_3u_3$ ,  $[u_1, u_3] = a_2e_1 - \alpha_3u_2$ ,  $[u_2, u_3] = a_2e_3 + \alpha_3u_1$ . Положим  $p = |a_2 - \alpha_3^2/4|^{-1/2}$  при  $a_2 \neq \alpha_3^2/4$ .

1.  $4a_2 = \alpha_3^2$ . Пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  эквивалентна тривиальной паре посредством  $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_1 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ ,  $\pi(e_i) = e_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $\pi(u_1) = u_1 + (\alpha_3/2)e_3$ ,  $\pi(u_2) = u_2 - (\alpha_3/2)e_1$ ,  $\pi(u_3) = u_3 + (\alpha_3/2)e_2$ .

2.  $4a_2 > \alpha_3^2$ . Пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  эквивалентна 3.5.2 при помощи  $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_2 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ ,  $\pi(e_i) = e_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $\pi(u_1) = p(u_1 + (\alpha_3/2)e_3)$ ,  $\pi(u_2) = p(u_2 - (\alpha_3/2)e_1)$ ,  $\pi(u_3) = p(u_3 + (\alpha_3/2)e_2)$ .

3.  $4a_2 < \alpha_3^2$ . Эквивалентность пар  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  и 3.5.3 определяется  $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_3 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ ,  $\pi(e_i) = e_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $\pi(u_1) = p(u_1 + (\alpha_3/2)e_3)$ ,  $\pi(u_2) = p(u_2 - (\alpha_3/2)e_1)$ ,  $\pi(u_3) = p(u_3 + (\alpha_3/2)e_2)$ .

Поскольку  $\tau(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \{0\}$  и  $\tau(\bar{\mathfrak{g}}_2) = \tau(\bar{\mathfrak{g}}_3) = \{0\}$ , ни одна из пар 3.5.2 и 3.5.3 не эквивалентна тривиальной паре. Заметим, что алгебра Ли  $\bar{\mathfrak{g}}_2$  проста  $(\bar{\mathfrak{g}}_2 \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$ , а алгебра Ли  $\bar{\mathfrak{g}}_3$  не проста  $(\bar{\mathfrak{g}}_3 \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2))$ . Отсюда следует, что пары 3.5.2 и 3.5.3 не эквивалентны.

**3. Связности на симметрических пространствах.** Для найденных пар выписываем аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии. Находим алгебры голономии указанных связностей и определяем, когда аффинная связность нормальна.

*Подалгебра  $\mathfrak{g}$  – разрешима.* Рассмотрим, например, пару 2.9.12. Прямыми вычислениями получим  $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$ . Тензор кривизны имеет вид, указанный ниже. Алгебра, порожденная множеством  $R(u_i, u_j)$ , т. е.  $V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ , совпадает с алгеброй голономии (таким образом, алгебра голономии совершенна). Действительно, поскольку связность тривиальна,  $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) = \Lambda(\mathfrak{g})$  и  $[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] =$

$=[\Lambda(\mathfrak{g}), V] = V$ , так как  $\Lambda(\mathfrak{g})$  совпадает с  $V$ . В данном случае  $\alpha_{\mathfrak{g}} = \Lambda(\mathfrak{g})$  и  $\mathfrak{h}^* = \alpha_{\mathfrak{g}}$ , т. е. связность нормальна. Тензор кручения нулевой. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Таким образом, прямыми вычислениями находим, что аффинные связности имеют следующий вид:

Пара	Аффинная связность
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.21.6 3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & q_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.3.5 1.3.6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
2.9.12	тривиальная (нулевая)

Тензоры кривизны и кручения:

Пара	Тензор кривизны
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3.21.6, 3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.5	$\begin{pmatrix} p_{1,3}q_{3,1}-1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{3,2}q_{2,3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{3,2}q_{2,3}-p_{1,3}q_{3,1} \end{pmatrix},$

1.1.5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{2,2}-r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3}r_{3,3}-r_{2,2}q_{2,3} \\ q_{3,1}r_{1,1}-r_{3,3}q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.3.5, 1.3.6	$\begin{pmatrix} -A & H\mp 1 & 0 \\ -H\pm 1 & -A & 0 \\ 0 & 0 & 2A \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3}+r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,1}p_{2,3} \\ B & C & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3}-r_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ D & F & 0 \end{pmatrix},$ $A = -p_{2,3}p_{3,1} + p_{1,3}p_{3,2}$ $H = p_{1,3}p_{3,1} + p_{2,3}p_{3,2}$ $B = p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1}$ $C = p_{3,1}r_{1,2} + p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2}$ $D = -p_{3,2}r_{1,1} - p_{3,1}r_{1,2} + r_{3,3}p_{3,2}$ $F = p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1}$
2.9.12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Пара	Тензор кручения
3.19.14	$(0, 0, 0), (0, 0, 0), (q_{1,3} - r_{1,2}, 0, 0)$
3.21.6, 3.21.7	$(0, 0, 0), (0, 0, 0), (2q_{1,3}, 0, 0)$
1.1.5	$(0, 0, p_{3,2} - q_{3,1}), (p_{1,3} - r_{1,1}, 0, 0),$ $(0, q_{2,3} - r_{2,2}, 0)$
1.3.5, 1.3.6	$(0, 0, 2p_{3,2}), (p_{1,3} - r_{1,1}, p_{2,3} + r_{1,2}, 0),$ $(-p_{2,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0)$
2.9.12	нулевой

Алгебры голономии:

Пара	Алгебра голономии
2.9.12	$\begin{pmatrix} p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & -2p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_2 \end{pmatrix}$
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & p_2 & p_1 \\ 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 \end{pmatrix}$

3.21.6, 3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & -p_3 \\ 0 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$
----------------	--

У пар 2.9.12, 3.19.14, 3.21.6 и 3.21.7 связность является нормальной.

Подалгебра  $\mathfrak{g}$  – неразрешима.

Пара	Аффинная связность
3.4.2, 3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
3.5.2, 3.5.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & -p_{2,3} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Для пары 3.4.2 связность нормальна при  $p_{1,2}^2 \neq 1$ ; для 3.4.3 и 3.5.2 связность является нормальной, у 3.5.3 – нормальна при  $p_{2,3}^2 \neq 1$ .

Тензоры кривизны и кручения:

Пара	Тензор кривизны
3.4.2, 3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 \mp 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} -p_{1,2}^2 \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 \mp 1 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}^2 \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^2 \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.5.2, 3.5.3	$\begin{pmatrix} 0 & -p_{2,3}^2 \mp 1 & 0 \\ p_{2,3}^2 \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

3.5.2, 3.5.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}^2 \mp 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}^2 \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{2,3}^2 \mp 1 \\ 0 & p_{2,3}^2 \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$
--------------	---

Пара	Тензор кручения
3.4.2, 3.4.3	$(2p_{1,2}, 0, 0), (0, 2p_{1,2}, 0),$ $(0, 0, 2p_{1,2})$
3.5.2, 3.5.3	$(0, 0, -2p_{2,3}), (0, 2p_{2,3}, 0),$ $(-2p_{2,3}, 0, 0)$

Пара	Алгебра голономии
3.4.3	$\begin{pmatrix} p_2 & p_1 & 0 \\ p_3 & 0 & p_1 \\ 0 & p_3 & -p_2 \end{pmatrix}$
3.4.2 $p_{1,2}^2 \neq 1$	
3.4.2 $p_{1,2}^2 = 1$	нулевая
3.5.2	$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ p_1 & 0 & -p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$
3.5.3 $p_{2,3}^2 \neq 1$	
3.5.3 $p_{2,3}^2 = 1$	нулевая

**Заключение.** Таким образом, приведена в явном виде полная классификация трехмерных симметрических однородных пространств с неразрешимой группой преобразований, допускающих нормальную связность. Описаны все инвариантные аффинные связности на каждом таком пространстве, найдены тензоры кривизны, кручения, алгебры голономии указанных связностей и определено, когда аффинная связность нормальна.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на симметрических пространствах.

### Литература

1. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Москов. ун-т, 1960. 307 с.
2. Chen B. Y. Geometry of submanifolds // Pure and Appl. Math. New York: Marcel Dekker. 1973. Vol. 10, no. 22. 308 p.
3. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства // Сборник работ. М., 1949. 384 с.
4. Можей Н. П. Нормальные связности на редуцированных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2016. Т. 60, № 6. С. 28–36.

5. Можей Н. П. Канонические связности на трехмерных симметрических пространствах разрешимых групп Ли // Труды БГТУ. 2017. № 3: Физ.-мат. науки и информатика. С. 8–13.

#### References

1. Kartan E. *Rimanova geometriya v ortogonal'nom repere* [Riemannian geometry in an orthogonal frame]. Moscow, Moskovskiy universitet Publ., 1960. 307 p. (In Russian).
2. Chen B. Y. Geometry of submanifolds. *Pure and Appl. Math.* New York, Marcel Dekker, 1973, vol. 10, no. 22. 308 p.
3. Kartan E. *Geometriya grupp Li i simmetricheskie prostranstva. Sbornik rabot* [The geometry of Lie groups and symmetric spaces. Collected works]. Moscow, 1949. 384 p.
4. Mozhey N. P. Normal connections on reductive homogeneous spaces with an unsolvable transformation group. *Doklady Natsional'noy akademii nauk Belarusi* [Reports of the National Academy of Sciences of Belarus], 2016, vol. 60, no. 6, pp. 28–36 (In Russian).
5. Mozhey N. P. Canonical connections on three-dimensional symmetric spaces solvable Lie groups. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2017, no. 3: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 8–13 (In Russian).

#### Информация об авторе

**Можей Наталья Павловна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Программное обеспечение информационных технологий». Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

#### Information about the author

**Mozhey Natalya Pavlovna** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, Software for Information Technologies Department. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила 14.04.2017



УДК 531.19

**Я. Г. Грода<sup>1</sup>, Э. Э. Бильданов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет

## **РАВНОВЕСНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕТОЧНОГО ФЛЮИДА С ПРИТЯЖЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ НА ПРОСТОЙ КУБИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ С БЛОКИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ**

Рассмотрена модель решеточного флюида с притяжением ближайших соседей на простой кубической решетке, содержащей некоторое число заблокированных узлов. В рамках квазихимического приближения представлены аналитические выражения для химического потенциала, термодинамического фактора и вероятности двум ближайшим узлам быть занятыми частицами.

Предложен алгоритм моделирования решеточной системы с заблокированными узлами по методу Монте-Карло и выполнено моделирование систем с притяжением ближайших соседей. Данные моделирования сопоставлены с результатами квазихимического приближения.

Показано, что квазихимическое приближение позволяет получать адекватные полуколичественные результаты для рассматриваемых систем, и на его основе могут быть построены приближения следующих порядков. В рамках квазихимического приближения получена зависимость критической температуры системы от концентрации заблокированных узлов.

**Ключевые слова:** решеточный флюид, квазихимическое приближение, равновесные свойства, критическая температура, фазовая диаграмма, моделирование по методу Монте-Карло.

**Ya. G. Groda<sup>1</sup>, E. E. Bildanau<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Belarusian State Technological University

<sup>2</sup>Belarusian State University

## **EQUILIBRIUM PROPERTIES OF LATTICE FLUIDS WITH NEAREST NEIGHBORS ATTRACTION ON A SIMPLE CUBIC LATTICE WITH BLOCKED SITES**

The model of lattice fluid with nearest neighbors attraction on the simple cubic lattice with blocked sites is considered. The analytical expressions to the chemical potential, thermodynamic factor and distribution function are represented in the frame of quasi-chemical approximation.

The algorithm of the Monte Carlo simulation of the lattice system with blocked sites is proposed. As an example numerical computation for a lattice fluids with attractive interaction between nearest neighbors was carried out. The date of simulation is compared with results of quasi-chemical approximation.

It is shown that quasi-chemical approximation makes it possible to find reasonable semiquantitative results for the studied systems and can be used as basis for nest order approximations. The dependence of the critical temperature upon the concentration of blocked sites is obtained in frame of quasi-chemical approximation.

**Key words:** lattice fluid, quasi-chemical approximation, equilibrium properties, critical temperature, phase diagram, Monte Carlo simulation.

**Введение.** Ранее в работах [1, 2] были рассмотрены равновесные и транспортные свойства решеточного флюида на плоской квадратной решетке, содержащей заблокированные узлы. В рамках данной модели каждый решеточный узел может находиться в одном из трех возможных состояний: быть занятым примесной частицей, быть вакантным либо заблокированным. Занятие узла более чем одной частицей считается невозможным.

Для оценки термодинамических и структурных свойств модели было предложено простейшее квазихимическое приближение (КХП), в рамках которого могут быть получены замкнутые выражения для химического потенциала, термодинамического фактора и корреляционных функций модели.

Сопоставление полученных в данном приближении результатов с данными моделирования системы по методу Монте-Карло (МКМ)

показало, что КХП позволяет получать адекватные полуколичественные результаты для рассматриваемых систем, и на его основе могут быть построены приближения следующих порядков. Также установлено, что в случае системы с отталкиванием между ближайшими соседями наличие заблокированных узлов приводит к тому, что глобальный шахматный порядок на решетке разрушается, и система распадается на отдельные упорядоченные домены.

Также было показано [2], что на основе информации о равновесных значениях параметров системы могут быть оценены значения ее кинетического коэффициента диффузии.

С практической точки зрения построенная модель пригодна для описания свойств ансамбля примесных частиц, на некоторой кристаллической поверхности либо в объеме физического кристалла. При этом заблокированные узлы описывают дефекты кристаллической структуры и, в случае плоских решеток, микрозагрязнения кристаллических поверхностей. Помимо твердотельных систем данная модель может с успехом применяться и для описания биологических объектов [3].

В настоящей работе представлены результаты применения КХП и МКМ для исследования равновесных свойств решеточного флюида с взаимодействием ближайших соседей на простейшей кубической (ПК) решетке.

**Квазихимическое приближение.** В основе построения квазихимического приближения для определения равновесных характеристик рассматриваемой системы лежит рассмотрение наряду с исходной системой подобной ей базисной системы, которая определяется одночастичными средними потенциалами. В рамках данного приближения для таких величин, как свободная энергия  $F$ , химический потенциал  $\mu$ , термодинамический фактор  $\chi_T$  и вероятность двум ближайшим узлам решетки быть занятыми частицами  $F(1; 1)$ , были получены следующие аналитические выражения [1, 4, 5]:

$$\beta F = \theta \ln \theta + (1 - \theta - c) \ln(1 - \theta - c) + c \ln c - \frac{z}{2} \ln Y + \frac{z}{2} (1 - 2c) \ln \eta, \quad (1)$$

$$\beta \mu = \ln \frac{c}{1 - \theta - c} - z \ln \frac{Y - c}{1 - c}, \quad (2)$$

$$\chi_T = \frac{1 - \theta}{1 - \theta - c} + z \frac{c}{1 - 2Y} \left( \frac{W}{Y - c} - \frac{1}{1 - c} \right), \quad (3)$$

$$F(1; 1) = \frac{c^2(1 - c)}{Y(Y - c)} W, \quad (4)$$

где

$$Y = 0,5 \left( 1 + \sqrt{1 + 4c(1 - c)(W - 1)} \right), \\ \eta = \frac{Y - c}{1 - c}, \quad W = \exp(-\beta J), \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (5)$$

$c$  и  $\theta$  – концентрации частиц и заблокированных узлов соответственно;  $k_B$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура;  $J$  – энергия взаимодействия двух примесных частиц, занимающих ближайшие решеточные узлы ( $J < 0$  в случае системы с притяжением между частицами).

**Алгоритм моделирования.** Компьютерное моделирование равновесных характеристик рассматриваемой решеточной системы по методу Монте-Карло может быть выполнено в рамках стандартного алгоритма Метрополиса [6], применение которого к модели решеточного флюида детально описано в работах [7].

Применительно к рассматриваемой решеточной системе вычислительный алгоритм, предложенный в [6], представляет собой следующее: первоначально рассматривается произвольное распределение некоторого числа частиц по решетке, содержащей  $N = L^d$  узлов ( $L$  – линейный размер решетки,  $d$  – размерность пространства). Затем произвольным образом выбирается незаблокированный узел решетки. Если этот узел занят частицей, то эта частица изымается, если же он вакантен, то частица добавляется, и определяется изменение энергии  $\delta E_N$ . Если  $\delta E_N \leq 0$ , то новая конфигурация принимается, если  $\delta E_N > 0$ , то она принимается с вероятностью  $W = \exp(-\delta E_N / k_B T)$ . Для этого случайным образом генерируется число  $W_0$  из интервала  $[0; 1]$ , и если  $W \geq W_0$ , то новая конфигурация принимается. В противном случае новая конфигурация отвергается, и система возвращается в прежнее состояние. Повторение описанной процедуры  $n$  раз, где  $n$  – число частиц на решетке, формирует один шаг алгоритма Монте-Карло (МКШ).

Поскольку первоначальное состояние моделируемой системы является произвольным и может существенно отличаться от равновесного, для перехода системы в состояние термодинамического равновесия требуется некоторое число МКШ. При определении средних значений термодинамических величин эти начальные шаги не учитываются.

При моделировании использовалась решетка, содержащая  $2,7 \cdot 10^4$  решеточных узлов. Для снижения влияния конечности размеров моделируемой системы на получаемые результаты применялись периодические граничные условия.

Полная длина процедуры моделирования состояла из 70 000 МКШ. При этом, первые 10 000 МКШ отводились на процесс эквilibризации и не учитывались при дальнейшем усреднении.

**Результаты моделирования.** На рис. 1 и 2 представлены зависимости от концентрации химического потенциала системы при  $\theta = 0,10$ , определенные при параметрах взаимодействия  $\beta J = -1,108; -0,933; -0,844; -0,739$  и  $-0,443$ . В целом можно отметить, что при определении химического потенциала результаты КХП и МКМ находятся в хорошем как качественном, так и количественном соответствии друг с другом в достаточно широкой области изменения параметра взаимодействия.

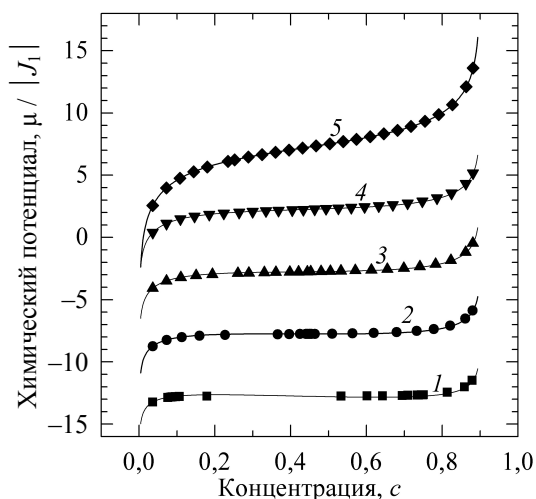


Рис. 1. Концентрационная зависимость химического потенциала решеточного газа с притяжением ближайших соседей на простой кубической решетке при  $\theta = 0,10$ . Каждая группа кривых смещена относительно предыдущей на 5 единиц вдоль вертикальной оси (первоначальные положения кривых соответствуют  $\mu / |J_1| \approx -2,7$  при  $c = 0,5$ ). Линиями представлены результаты КХП, точками – МКМ:  
 1 –  $\beta|J| = 1,108$ ; 2 –  $\beta|J| = 0,933$ ; 3 –  $\beta|J| = 0,844$ ;  
 4 –  $\beta|J| = 0,739$ ; 5 –  $\beta|J| = 0,443$

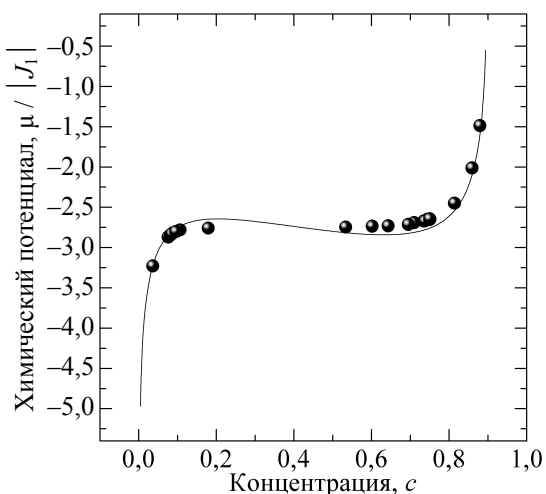


Рис. 2. Концентрационная зависимость химического потенциала решеточного газа с притяжением ближайших соседей на простой кубической решетке при  $\theta = 0,10$  и  $\beta|J| = 1,108$ . Линией представлены результаты КХП, точками – МКМ

Как и следовало ожидать, при температуре ниже критической квазихимическое приближение дает петлю Ван-дер-Вальса на изотерме химического потенциала (рис. 2), что позволяет сделать вывод о протекающем в системе при этих условиях фазовом переходе первого рода.

Стандартное построение Максвелла позволяет определять точки фазовых переходов, а исчезновение петли Ван-дер-Вальса – критическую температуру. Построенные указанным образом фазовые диаграммы представлены на рис. 3.

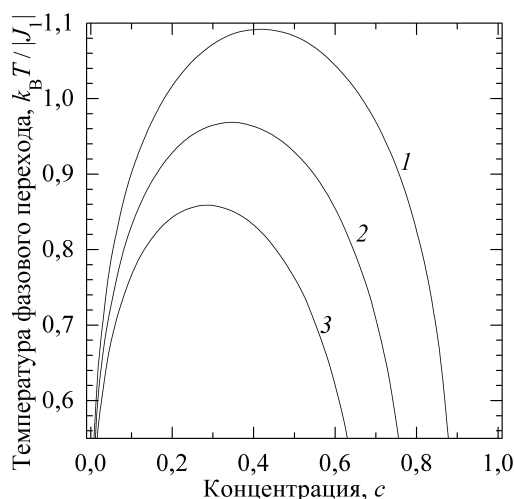


Рис. 3. Фазовая диаграмма решеточного флюида с притяжением ближайших соседей на простой кубической решетке в квазихимическом приближении:  
 1 –  $\theta = 0,10$ ; 2 –  $\theta = 0,20$ ; 3 –  $\theta = 0,30$

Определенная указанным образом критическая температура зависит от числа заблокированных узлов линейным образом:

$$\frac{T_c^{QChA}}{T_c^*} \cong 1,09 + 1,136\theta, \quad (6)$$

где  $T_c^{QChA}$  – критическая температура в квазихимическом приближении,  $T_c^*$  – точное значение критической температуры для решетки, не содержащей заблокированных узлов ( $k_B T_c^* / |J| = 0,1277$ ).

Структурные свойства модели могут быть рассмотрены путем анализа ее термодинамического фактора (3) и корреляционных функций  $g_1(1; 1)$ :

$$g_1(1; 1) = \frac{F_k(1; 1)}{c^2}, \quad (7)$$

где функция  $F(1; 1)$  определена соотношением (4). Сопоставление результатов КХП и данных МКМ для указанных величин представлено на рис. 4 и 5.

Анализ структурных свойств системы показал, что КХП позволяет корректно определить лишь корреляционную функцию для ближайших соседей (см. рис. 4).

В то же время результаты аналитического подхода и данные моделирования для корреляционной функции ближайших соседей заметно расходятся даже при относительно высокой температуре (кривые 1, 2 и 3 на рис. 5).

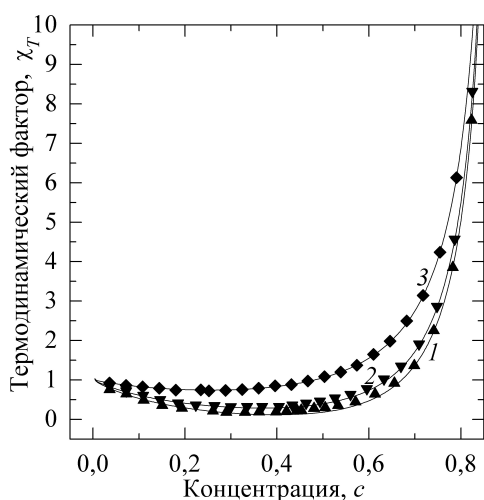


Рис. 4. Концентрационная зависимость термодинамического фактора решеточного газа с притяжением ближайших и отталкиванием третьих соседей на треугольной решетке. Линиями представлены результаты КХП, точками – МКМ: 1 –  $\beta|J| = 0,844$ ; 2 –  $\beta|J| = 0,739$ ; 3 –  $\beta|J| = 0,443$

Вместе с тем необходимо отметить, что все результаты, приведенные в данной работе, сопоставляются с данными моделирования при одинаковой абсолютной температуре (параметре взаимодействия). В то же время значение критической температуры, полученное в рамках КХП, может заметно отличаться от его истинного значения. Так, например, в случае решеточного флюида на ПК-решетке, не содержащей заблокированных узлов, такое отличие, как следует из соотношения (6), приблизительно равно 9%. Можно ожидать, что при переходе к относительным температурам, измеренным в единицах критической, корреляция результатов двух подходов улучшится.

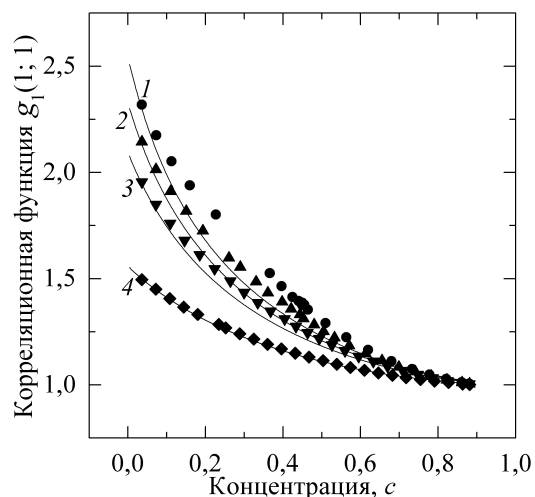


Рис. 5. Концентрационная зависимость корреляционной функции ближайших соседей. Линиями представлены результаты КХП, точками – МКМ: 1 –  $\beta|J| = 0,933$ ; 2 –  $\beta|J| = 0,844$ ; 3 –  $\beta|J| = 0,739$ ; 4 –  $\beta|J| = 0,443$

**Заключение.** Подводя итог, можно сделать вывод, что ранее предложенное квазихимическое приближение позволило получить простые аналитические выражения для нахождения термодинамических и структурных характеристик рассматриваемых решеточных систем любых размерностей.

Сопоставление полученных с его помощью результатов с данными МКМ показало, что оно может с успехом использоваться для оценки равновесных свойств трехмерных решеток с заблокированными узлами, по меньшей мере в случае решеточного флюида, не обладающего упорядоченной фазой, либо при температурах выше критической.

В целом можно отметить, что качественный вид всех рассмотренных зависимостей равновесных характеристик решеточного флюида не изменяется при переходе к рассмотрению системы, содержащей заблокированные узлы [8].

Публикация содержит результаты исследований, выполненных при грантовой поддержке Министерства образования Беларуси, а также научной программы Евросоюза HORIZON-2020 (проект AMD-734276-CONIN).

## Литература

1. Аргиракис П., Гиазитзидис П., Грода Я. Г. Термодинамические и структурные свойства решеточного флюида на плоской квадратной решетке с заблокированными узлами: квазихимическое приближение // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 48–52.
2. Аргиракис П., Гиазитзидис П., Грода Я. Г. Кинетический коэффициент диффузии решеточного флюида на плоской квадратной решетке с заблокированными узлами // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 36–40.
3. Saxton V. J. A biological interpretation of transient anomalous subdiffusion. I. Qualitative model // Biophys. J. 2007. Vol. 92. P. 1178–1191.

4. Bokun G. S., Groda Ya. G., Belov V. V., Uebing C., Vikhrenko V. S. The self-consistent diagram approximation for lattice systems // *The European Physical Journal B*. 2000. Vol. 15, no. 2. P. 297–304.
5. Vikhrenko V. S., Groda Ya. G., Bokun G. S. The diagram approximation for lattice systems // *Physics Letters A*. 2001. Vol. 286. P. 127–133.
6. Equation of state calculation by fast computing machines / N. Metropolis [et al.] // *J. Chem. Phys.* 1953. Vol. 21. P. 1087–1092.
7. Uebing C., Gomer R. A Monte Carlo study of surface diffusion coefficients in the presence of adsorbate-adsorbate interactions // *J. Chem. Phys.* 1991. Vol. 95, no. 10. P. 7626–7652.
8. Groda Ya. G., Argyrakis P., Bokun G. S., Vikhrenko V. S. SCDA for 3D lattice gases with repulsive interaction // *The European Physical Journal B*. 2003. Vol. 32. P. 527–535.

### References

1. Argyrakis P., Giazitzidis P., Groda Ya. G. Thermodynamic and structural properties of lattice fluids on a plane square lattice with a blocked sites: quasi-chemical approximation. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 48–52 (In Russian).
2. Argyrakis P., Giazitzidis P., Groda Ya. G. Jump diffusion coefficient of lattice fluids on a plane square lattice with blocked sites. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 36–40 (In Russian).
3. Saxton V. J. A biological interpretation of transient anomalous subdiffusion. I. Qualitative model. *Biophys. J*, 2007, vol. 92, pp. 1178–1191.
4. Bokun G. S., Groda Ya. G., Belov V. V., Uebing C., Vikhrenko V. S. The self-consistent diagram approximation for lattice systems. *The European Physical Journal B*, 2000, vol. 15, no. 2, pp. 297–304.
5. Vikhrenko V. S., Groda Ya. G., Bokun G. S. The diagram approximation for lattice systems. *Phys. Lett. A*, 2001, vol. 286, pp. 127–133.
6. Metropolis N., Rosenbluth A. W., Marshall N., Rosenbluth M. N., Teller A. H., Teller E. Equation of state calculation by fast computing machines. *J. Chem. Phys.*, 1953, vol. 21, pp. 1087–1092.
7. Uebing C., Gomer R. A Monte Carlo study of surface diffusion coefficients in the presence of adsorbate-adsorbate interactions. *J. Chem. Phys.*, 1991, vol. 95, no. 10, pp. 7626–7652.
8. Groda Ya. G., Argyrakis P., Bokun G. S., Vikhrenko V. S. SCDA for 3D lattice gases with repulsive interaction. *The European Physical Journal B*, 2003, vol. 32, pp. 527–535.

### Информация об авторах

**Грода Ярослав Геннадьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической механики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: groda@belstu.by

**Бильданов Эльдар Эмирович** – студент. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: el95dar@icloud.com

### Information about the authors

**Groda Yaroslav Gennad'yevich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Department of Theoretical Mechanics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: groda@belstu.by

**Bildanau Eldar Emirovich** – student. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: el95dar@icloud.com

Поступила 02.05.2017

УДК 531.19

**Р. Н. Ласовский<sup>1</sup>, В. С. Вихренко<sup>1</sup>, Т. Н. Пацаган<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет<sup>2</sup>Институт физики конденсированных систем НАН Украины (г. Львов, Украина)**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА  
В КЕРАМИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОЛИТАХ ПРИ НАЛИЧИИ  
ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ**

Рассмотрена квазиодномерная модель легированной разновалентными примесями оксидной керамики, содержащей зерно и межзеренные прослойки. Выполнено моделирование распределения заряда по кинетическому методу Монте-Карло. Моделирование выявило появление двойных электрических слоев на границах межзеренных областей. В равновесном состоянии или при слабом внешнем электрическом поле двойные слои появляются на обеих сторонах межзеренной области, а при более сильном поле единственный двойной слой образуется избыточными зарядами противоположных знаков на границах межзеренной области. Эти локальные отклонения от электронейтральности возникают вследствие затрудненного перехода ионов из объема зерен в межзеренную область и кулоновского межзеренного взаимодействия. В свою очередь, эти двойные слои генерируют достаточно сильное электрическое поле, которое проталкивает ионы через межзеренную область и в результате подавляет сопротивление межзеренных областей. Все ионы, которые попадают в область двойных слоев, быстро перемещаются через межзеренную область в направлении внешнего приложенного поля так, что полное сопротивление системы практически полностью определяется сопротивлением объема зерен.

**Ключевые слова:** оксидная керамика, межзеренная граница, двойной электрический слой, метод Монте-Карло, химический потенциал, электропроводность, коэффициент диффузии, плотность распределения заряда.

**R. N. Lasovsky<sup>1</sup>, V. S. Vikhrenko<sup>1</sup>, T. N. Patsahan<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Belarusian State Technological University<sup>2</sup>Institute for Condensed Matter Physics of NAS of Ukraine (Lviv, Ukraine)**CHARGE AND ELECTRIC POTENTIAL DISTRIBUTION IN CERAMIC  
ELECTROLYTES AT THE EXTERNAL ELECTRIC FIELD PRESENCE**

A simple model of an oxide ceramics doped with aliovalent impurities containing grain and intergrain layers is considered. Modeling of the system was performed using the kinetic Monte Carlo method. The simulation revealed the appearance of double electric layers at the grain boundaries regions. At the equilibrium state or with a weak external electric field, double layers appear on both sides of the grain boundaries region. At the stronger field a single double layer is formed by excess opposite charges on the grain boundaries region. These local deviations from electroneutrality arise from the impeded transitions of ions from the grain volume into the grain boundaries region and from the Coulomb interion interaction. In turn, these double layers produce a sufficiently strong electric field, which pushes ions through the grain boundaries region and, as a result, suppresses the resistance of the grain boundaries. All ions that fall into the region of double layers move rapidly through the grain boundaries region in the direction of the external applied field so that the total resistance of the system is almost completely determined by the resistance of the grain volume.

**Key words:** oxide ceramics, intergrain boundary, electric double layers, Monte Carlo method, chemical potential, electrical conductivity, diffusion coefficient, charge density distribution.

**Введение.** Широкое использование портативных химических источников электрической энергии различного назначения требует непрерывного совершенствования их конструкции, повышения эффективности и безопасности их работы. Применение во многих современных источниках тока жидких электролитов сопряжено с опасностью появления их утечек и воспламенения. Переход к электрохимическим элементам с твердотельными электролитами

позволит повысить долговечность, экологичность и безопасность источников энергии [1–3].

**Модель керамического оксидного электролита с учетом межзеренных прослоек.** В работе [4] предложена модель стабилизированного иттрием диоксида циркония (YSZ), на основе которой авторы смогли воспроизвести некоторые основные свойства твердооксидных топливных элементов. Модель состоит из квазиодномерной последовательности укрупненных

кристаллических ячеек, каждая из которых содержит два иона иттрия и, в среднем, одну нейтральную вакансию в кислородной подрешетке, компенсирующую потерю положительного заряда. Вакансия может обмениваться с двукратно заряженным отрицательным ионом кислорода в ближайшей ячейке. Таким образом, достаточно явно рассмотреть нейтральную вакансию по кислороду, дважды заряженный отрицательный ион кислорода и компенсирующий дважды заряженный положительный ион на каждую укрупненную ячейку. Остальные ионы кислорода и положительные заряды явно могут не учитываться. В процессе эволюции системы может случиться, что две вакансии по кислороду или два иона кислорода одновременно окажутся в одной укрупненной ячейке. Более сильные флуктуации концентрации не учитываются. Таким образом, приходим к модели решеточного газа с возможностью двойного заполнения ячейки кислородом (рис. 1).

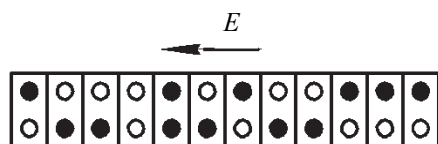


Рис. 1. Модель решеточного газа с возможностью двойного заполнения ячейки

Фиксированные положительно заряженные металлические ионы, обеспечивающие электрическую нейтральность системы, на рисунке не показаны. Используемая модель противоположна обозначениям Крёгера – Винка [5], когда положительно заряженные кислородные вакансии движутся на фоне отрицательно заряженных ионов иттрия, но соответствует той же физической ситуации и более удобна в интерпретации, так как реально носителями заряда являются именно ионы кислорода.

В модели общее количество ионов кислорода равно числу укрупненных ячеек. Общее количество ячеек модели равно  $L$ ;  $l \ll L$  ячеек принадлежат межзеренной области в средней части системы. Благодаря возможности двойного заполнения ячейки ионы кислорода могут опережать друг друга и, таким образом, не возникает известная проблема одномерной диффузии [6].

Предполагается, что жесткая подсистема положительных ионов циркония и иттрия создает потенциальный рельеф, так что ионы кислорода выполняют термически активированные прыжки на вакантные позиции в ближайшие ячейки решетки, преодолевая потенциальные барьеры:

$$E_a = E_g + E_{gb}, \quad (1)$$

где  $E_g$  – потенциальный барьер между узлами решетки в объеме зерна,  $E_{gb}$  – в межзеренной области. Последний может варьироваться в зависимости от положения междуузельной позиции по отношению к границам межзеренной прослойки. Возможные модели энергетических барьеров показаны на рис. 2.

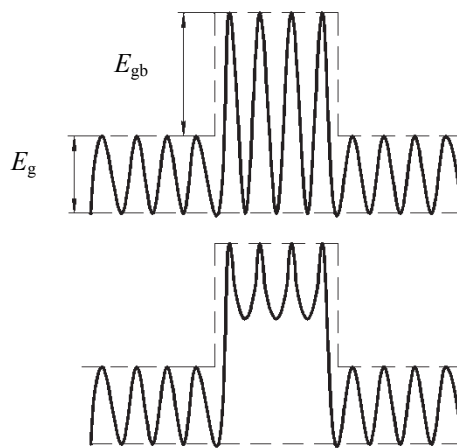


Рис. 2. Модели энергетических барьеров

Модель является квазиодномерной. Предполагается, что концентрация ионов и заряд равномерно распределены в плоскостях, перпендикулярных оси, направленной вдоль ячеек. Плотность заряда определяется соотношением  $\sigma_j = -2c(j)e / a^2$ , где  $c(j) = z(j) - 1$ ,  $z(j) = 0, 1$  или  $2$  есть число ионов кислорода в  $j$ -й ячейке решетки (число заполнения),  $e$  – заряд электрона,  $c(j)$  характеризует избыточный заряд в  $j$ -й ячейке решетки,  $j$  – номер ячейки и соответствующей плоскости. Таким образом, потенциальный барьер, который должен преодолеть ион кислорода при переходе из  $j$ -й ячейки в ближайшую  $l$ -ю ячейку, может быть рассчитан следующим образом [4]:

$$E_{ajl} = E_a + E_{Cjl}, \quad (2)$$

$$E_{Cjl} = \beta_{jl}(U + E_j) + E_{sj}, \quad (3)$$

$$U = 2eEa, \quad (4)$$

$$E_j = \Delta E \left( \sum_{i=j+1}^{L/2} c(i) - \sum_{i=-(L/2-1)}^{j-1} c(i) \right), \quad (5)$$

$$E_{sj} = \Delta E(z(j) - 1), \quad (6)$$

$$\Delta E = 2e / (\epsilon \epsilon_0 a), \quad \beta_{jl} = \pm 1 / 2, \quad (7)$$

где  $U$  учитывает вклад внешнего электрического поля  $E$ , приложенного к системе,  $E_j$  является вкладом кулоновского взаимодействия иона

кислорода в ячейке  $j$  со всеми заряженными плоскостями, кроме  $j$ , и  $E_{sj}$  учитывает взаимодействие с ионами в той же плоскости,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $L$  – количество ячеек в системе. Верхний/нижний знак для коэффициента  $\beta_{jl}$ , учитывающего положение седловой точки на поверхности потенциального рельефа между узлами ячеек  $j$  и  $l$ , берется для ионов кислорода, перепрыгивающих в ближайшую правую/левую ячейку, выбираемую случайным образом, как объясняется ниже.

**Алгоритм моделирования.** Для моделирования рассматриваемой системы по методу Монте-Карло случайным образом выбирается отрицательно заряженный ион, занимающий ячейку  $j$ . Затем случайным образом определяется направление его возможного перехода. Если число заполнения ячейки-приемника  $k$  оказывается равным 2, то переход считается невозможным. Тем не менее, попытка этого перехода учитывается. Если число заполнения ячейки-приемника равно 0 или 1, то переход принимается с вероятностью, определяемой соотношением

$$w_{jl} = \exp(-E_{aj} / k_B T). \quad (8)$$

Далее генерируется равномерно распределенное случайное число  $p_r$  из диапазона  $[0; 1]$ , которое сопоставляется с  $w_{ij}$ . Если  $w_{ij} \geq p_r$ , то переход считается произошедшим, если  $w_{ij} < p_r$ , то переход отклоняется. Повторение описанной процедуры  $L$  раз (равному числу частиц) формирует один шаг алгоритма Монте-Карло (МКШ).

При моделировании использовались периодические граничные условия: частица, покидающая систему через правую границу, появляется на ее левой стороне, и наоборот, частица, покидающая систему через левую границу, появляется справа, сохраняя электрическую нейтральность системы и постоянство числа подвижных частиц. Числа ионов, проходящих через левую и правую границы системы, различны из-за приложенного внешнего поля. Для обеспечения хорошей статистики по обеспечению количества ионов, пересекающих границы системы, использовалось достаточно сильное внешнее поле  $E = 10^6$  или  $10^7$  В/м, которое, тем не менее, с микроскопической точки зрения может рассматриваться как слабое.

Время измерялось в шагах алгоритма Монте-Карло (МКШ). Первые  $2 \cdot 10^4$  МКШ использовались для установления равновесного или стационарного состояния системы, а по последующим  $10^7$  или  $10^8$  МКШ выполнялось усреднение требуемых характеристик.

**Результаты моделирования.** Межзеренная область моделируется несколькими ячейками с

отличающимися энергиями активации миграции частиц (см. рис. 2). Распределение избыточных чисел заполнения ионов кислорода показано на рис. 3 при пяти межзеренных слоях и потенциальном рельефе с дополнительной энергией активации  $E_{gb} = 0,3$  эВ. Начало координат расположено в середине межзеренной области. Распределение концентрации слегка асимметрично из-за приложенного внешнего поля. Как видно из рисунка, с обеих сторон межзеренной области образуется по двойному электрическому слою.

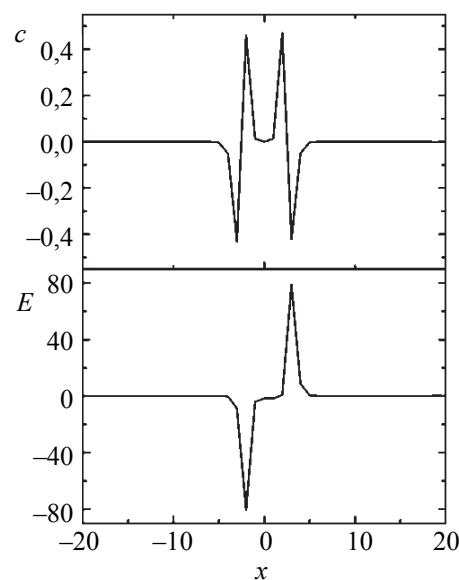


Рис. 3. Распределение концентрации ионов кислорода по отношению к электронейтральному состоянию (верхняя панель) и электрического потенциала (нижняя панель) вблизи межзеренной прослойки шириной 5 параметров укрупненной кристаллической решетки при  $E = 10^6$  В/м,  $\epsilon = 200$ ,  $T = 1000$  К,  $E_{gb} = 0,3$  эВ

Барьер с дополнительной высотой 0,3 эВ при  $T = 1000$  К уменьшает вероятность перехода иона более чем в 30 раз, и можно было ожидать значительное увеличение полного электрического сопротивления системы. Однако не наблюдалось существенных изменений чисел частиц, пересекающих границы системы в течение одинакового числа МКШ для систем с и без межзеренной области. Более того, эти числа частиц не зависят от ширины межзеренной области, а также от величины дополнительной высоты барьера.

Чтобы понять такое поведение, было рассчитано распределение локального электрического поля (нижняя панель рис. 3). Обращает на себя внимание большое значение электрического поля в межзеренной области, вызванное структурами двойного слоя, созданных, в свою очередь, межионным кулоновским



взаимодействием. На левой стороне межзеренной области, где концентрация ионов кислорода мала, большое электрическое поле компенсирует дефицит носителей заряда и поддерживает электрический ток, продуцируемый внешним полем в объеме зерен. Так как генерируемое внутреннее поле, обеспечивающее перенос носителей заряда через межзеренную область, является ответом на неоднородности системы, можно говорить об определенной ее самоорганизации, когда большое межзеренное сопротивление маскируется и не оказывает влияния на электрическое сопротивление системы в целом, определяемое его вольтамперной характеристикой.

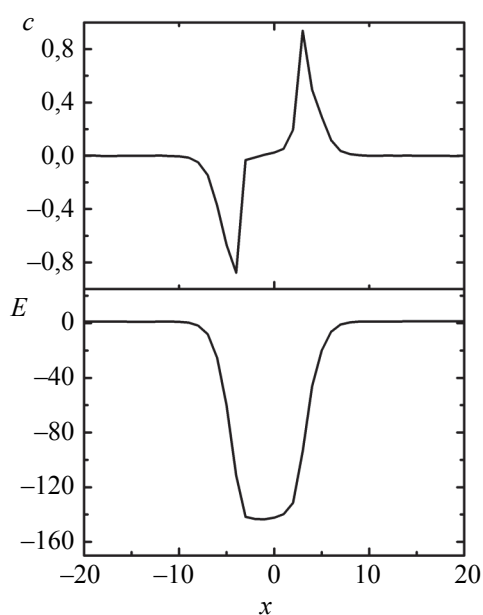


Рис. 4. Распределение концентрации ионов кислорода по отношению к электронейтральному состоянию (верхняя панель) и электрического потенциала (нижняя панель) вблизи межзеренной прослойки шириной 5 параметров укрупненной кристаллической решетки при  $E = 10^7$  В/м,  $\epsilon = 500$ ,  $T = 1000$  К,  $E_{gb} = 0,2$  эВ

Воздействие внешнего электрического поля на распределение заряда в межзеренной области отображается асимметрией распределения. Эта асимметрия мала, так как внешнее поле в 1 В/мкм мало на микроскопическом уровне. При повышенных значениях электрического поля (10 В/мкм) и диэлектрической проницаемости ( $\epsilon = 500$ ), уменьшающей эффективность кулоновского взаимодействия, влияние внешнего поля преобладает, и распределение заряда становится антисимметричным, создающим единственный двойной слой (рис. 4).

Очень большое значение локального электрического поля инициируется по всей межзеренной области, которое обеспечивает эффек-

тивный перенос ионов, доставляемых из объемной части зерна.

При большем значении энергии активации миграции в межзеренной области ( $E_{gb} = 2$  эВ) несколько ячеек, примыкающих к левой стороне межзеренной области, становятся почти полностью занятыми ионами кислорода, тогда как на правой стороне несколько ячеек становятся почти полностью вакантными, что создает очень высокое электрическое поле в межзеренной области. Ионы кислорода с левой стороны проталкиваются электрическим полем через межзеренную область и выбрасываются в объем зерна на правой стороне. Таким образом, сопротивление области границ зерен подавляется внутренним электрическим полем, и электрическое сопротивление системы полностью определяется сопротивлением объема зерен.

**Заключение.** Рассмотрена простая модель легированной разновалентными примесями оксидной керамики, содержащей зерно и межзеренные прослойки, и было выполнено моделирование по кинетическому методу Монте-Карло.

Моделирование выявило появление двойных электрических слоев на границах межзеренных областей. В состоянии равновесия или при слабом внешнем электрическом поле двойные слои появляются на обеих сторонах межзеренной области, а при более сильном поле единственный двойной слой образуется избыточными зарядами противоположных знаков на границах межзеренной области. Эти локальные отклонения от электронейтральности возникают вследствие затрудненного перехода ионов из объема зерен в межзеренную область и кулоновского межзеренного взаимодействия. В свою очередь, эти двойные слои производят достаточно сильное электрическое поле, которое проталкивает ионы через межзеренную область и в результате подавляет сопротивление межзеренных областей. Все ионы, которые попадают в область двойных слоев, быстро перемещаются через межзеренную область в направлении внешнего приложенного поля так, что полное сопротивление системы практически полностью определяется сопротивлением объема зерен.

Публикация содержит результаты исследований, выполненных при грантовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Беларуси (конкурсный проект № Ф16К-061) и Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (конкурсный проект № Ф73/113-2017), а также научной программы Евросоюза HORIZON-2020 (проект AMD-734276-CONIN) и Министерства образования Беларуси.

### Литература

1. Solid Oxide Fuel Cells: Materials Properties and Performance / J. Fergus [et al.] // CRC Press, 2016. 298 p.
2. Rechargeable Batteries: Grasping for the Limits of Chemistry / E. J. Berg [et al.] // *Journ. Electrochem. Soc.* 2015. Vol. 162, no. 14. P. A2468–A2475.
3. High-Energy All-Solid-State Lithium Batteries with Ultralong Cycle Life / X. Yao [et al.] // *Nano Lett.* 2016. Vol. 16, no. 11. P. 7148–7154.
4. Modak U., Lusk M. T. Kinetic Monte Carlo simulation of a solid-oxide fuel cell: I. Open-circuit voltage and double layer structure // *Solid State Ionics.* 2005. Vol. 176. P. 2181–2191.
5. Kröger F. A. *The Chemistry of Imperfect Crystals.* Amsterdam: North-Holland, 1964. 450 p.
6. Hahn K., Kärger J., Kukla V. Single-File Diffusion Observation // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 2762–2765.

### References

1. Zhang J., Hui R., Wilkinson D., Li X. *Solid Oxide Fuel Cells: Materials Properties and Performance.* CRC Press, 2016. 298 p.
2. Berg E. J., Villevieille C., Streich D., Trabesinger S., Novák P. Rechargeable Batteries: Grasping for the Limits of Chemistry. *Journ. Electrochem. Soc.*, 2015, vol. 162, no. 14, pp. A2468–A2475.
3. Yao X., Liu D., Wang C., Long P., Peng G., Hu Y., Li H., Chen L., Xu X. High-Energy All-Solid-State Lithium Batteries with Ultralong Cycle Life. *Nano Lett.*, 2016, vol. 16, no. 11, pp. 7148–7154.
4. Modak U., Lusk M. T. Kinetic Monte Carlo simulation of a solid-oxide fuel cell: I. Open-circuit voltage and double layer structure. *Solid State Ionics.*, 2005, vol. 176, pp. 2181–2191.
5. Kröger F. A. *The Chemistry of Imperfect Crystals.* Amsterdam, North-Holland, 1964. 450 p.
6. Hahn K., Kärger J., Kukla V. Single-File Diffusion Observation. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, pp. 2762–2765.

### Информация об авторах

**Ласовский Руслан Николаевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: lasovsky@tut.by

**Вихренко Вячеслав Степанович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической механики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: vvikhre@mail.ru

**Пацаган Тарас Николаевич** – кандидат физико-математических наук, докторант отдела теории растворов. Институт физики конденсированных систем НАН Украины (79011, г. Львов, ул. Свенцицкого, 1, Украина). E-mail: tarpa@icmp.lviv.ua

### Information about the authors

**Lasovsky Ruslan Nikolaevich** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Theoretical Mechanics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lasovsky@tut.by

**Vikhrenko Vyacheslav Stepanovich** – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Professor, the Department of Theoretical Mechanics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vvikhre@mail.ru

**Patsahan Taras Nikolaevich** – PhD (Physics and Mathematics), Doctoral candidate, the Department of Theory of Solutions. Institute for Condensed Matter Physics of NAS of Ukraine (1, Svientsitskii str., 79011, Lviv, Ukraine). E-mail: tarpa@icmp.lviv.ua

Поступила 10.03.2017

УДК 531.19

**Г. С. Бокун<sup>1</sup>, М. Ф. Головко<sup>2</sup>, В. С. Вихренко<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет<sup>2</sup>Институт физики конденсированных систем НАН Украины (г. Львов, Украина)**ЭКРАНИРОВАНИЕ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
В КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛАХ**

Для описания эффектов экранирования в твердом теле использован метод коллективных переменных. Куммулянтное разложение по перенормированным майеровским функциям использовано для формирования свободной энергии в виде функционала плотности и ячеечных потенциалов средних сил. Из условия экстремальности остатка в представлении конфигурационного интеграла рядом получена замкнутая система уравнений для расчета потенциалов средних сил. Ядра этих уравнений представлены дополнительными корреляторами, учитывающими эффекты близко- и дальнего действия. Для вычисления последних осуществлено усреднение гиббсовской функции распределения кулоновской системы по базисным состояниям идеального кристалла. В результате интегральные уравнения представлены в форме, содержащей экранированные потенциалы. Установлена связь между Фурье-образом экранированных потенциалов и моментами одночастичной функции распределения, содержащими потенциалы средних сил. Получено модифицированное выражение для радиуса Дебая. Рассмотрен переход к решеточной системе.

**Ключевые слова:** твердое тело, эффективный потенциал, свободная энергия, радиус Дебая, интегральные уравнения, коррелятивные функции, решеточная теория.

**G. S. Bokun<sup>1</sup>, M. F. Holovko<sup>2</sup>, V. S. Vikhrenko<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Belarusian State Technological University<sup>2</sup>Institute for Condensed Matter Physics of NAS of Ukraine (Lviv, Ukraine)**SCREENING OF THE COULOMB INTERACTION  
IN CRYSTALLINE MATERIALS**

To describe the screening effects in a solid, the collective variables method is used. The cumulant expansion in terms of renormalized Mayer functions was used to represent the free energy in the form of a density functional and cell potentials of mean forces. From the condition of extremity of the remainder in the representation of the configuration integral, a closed system of equations for calculating the potentials of the mean forces is obtained. The kernels of these equations are represented by additional correlators that take into account the effects of short and long range interactions. To calculate the latter, the Gibbs distribution function of the Coulomb system is averaged over the basis states of an ideal crystal. As a result, the integral equations are presented in a form containing screened potentials. A connection is established between the Fourier transform of the screened potentials and the moments of the one-particle distribution function, which contain potentials of the mean forces. The modified expression for the Debye radius is obtained. The transition to a lattice system is considered.

**Key words:** solid, effective potential, free energy, Debye radius, integral equations, correlative functions, lattice theory.

**Введение.** Широкое использование керамических твердотельных материалов в различных электрохимических системах, в частности, в высокотемпературных топливных элементах [1, 2], а также разработка полностью твердотельных электрохимических источников тока [3, 4] с целью повышения их безопасности путем исключения из их конструкций жидких электролитов и ионных жидкостей, определяют важность разработки надежных теоретических методов описания таких материалов. Одним из проблемных факторов, усложняющих их описание, является наличие действующих межмолекулярных кулоновских взаимодействий, требующих разработки надежных методов учета экранирования таких взаимодействий.

Предложенные ранее подходы к учету как действующих, так и короткодействующих взаимодействий в конденсированных средах [5] могут быть перенесены на описание кристаллических ионных систем и токопроводящих керамик, основные особенности которых хорошо воспроизводятся решеточной теорией [6], к которой можно при определенных аппроксимациях свести метод условных распределений [7]. Свойства таких систем можно передать, совмещая модель идеального кристалла с групповым разложением по перенормированным майеровским функциям, с помощью которых на свойстве идеального кристалла накладываются корреляции. Поэтому представляется оправданным объединить подходы,

разработанные в [5–7], для учета эффектов дальнего действия в существенно неоднородных средах, к которым и относятся токопроводящие керамики, являясь ионными системами. Важной здесь является возможность описания фазовых переходов, предоставляемая подходом [6, 7], дополненная возможностью учета дальнего действия [5], так как на этих эффектах основана работа различных электрохимических систем.

**Конфигурационный интеграл идеального кристалла при наличии кулоновских взаимодействий.** Сначала рассмотрим модель кристалла, когда его объем разбивается на  $N$  – по числу ионов – молекулярных ячеек, и каждая ячейка системы занята одним ионом, и введем в рассмотрение базисную систему, определяемую одночастичными потенциалами средних сил  $\varphi_j(i)$  [6, 7]. Представляя энергию системы парными межчастичными взаимодействиями  $\Phi(i, j)$  и  $V(i, j)$  близко- и дальнедействующих потенциалов, соответственно, для частиц в положениях  $q_i$  и  $q_j$ , представим конфигурационный интеграл  $Q_N$  системы в форме [6]

$$Q_N = Q_N^0 \left\langle \exp \left[ -\beta \sum_{i < j=1}^N V(i, j) \right] \prod_{i < j=1}^N (1 + f(i, j)) \right\rangle_0, \quad (1)$$

где

$$f(i, j) = \exp \left( -\beta (\Phi(i, j)) - \varphi_j(i) - \varphi_i(j) \right) - 1,$$

$$Q_N^0 = Q_i^N, \quad Q_i = \int_{v_i} \exp \left( -\beta \sum_{k \neq i} \varphi_k(i) \right) dq^i, \quad (2)$$

$Q_N^0$  – конфигурационный интеграл идеального кристалла, выраженный через одночастичные ячейные потенциалы средних сил  $\varphi_j(i)$ ;  $f(i, j)$  – перенормированная майеровская функция; угловые скобки  $\langle \dots \rangle_0$  означают усреднение по равновесным состояниям базисной системы.

Последующее куммулянтное разложение выражения (1) по функциям (2) позволяет записать с точностью до второго вириального коэффициента

$$\ln Q_N = \ln Q_L^0 + \ln Q_N^0 + \sum_{i, j} \langle f(i, j) g(i, j) \rangle_0 + \dots, \quad (3)$$

$$Q_L^0 = \left\langle \exp \left[ -\beta \sum_{i < j} V(i, j) \right] \right\rangle_0. \quad (4)$$

Усреднение в соотношениях (3) и (4) осуществляется произведением унарных функций распределения  $F_0(i)$  и  $F_0(j)$  [6, 7]:

$$F_0(i) = \frac{1}{Q_i} \exp \left( -\beta \sum_{k \neq i} \varphi_k(i) \right). \quad (5)$$

Особенностью соотношения (3) (в отличие от прежнего результата [6]) является то, что дальнедействующая часть взаимодействия в выражении (1) выделена в отдельные слагаемые. Поэтому перенормированная майеровская функция  $f(i, j)$  модулируется здесь бинарной функцией  $g(i, j)$  системы с кулоновским взаимодействием, последовательная схема расчета которой разработана в [5].

Применяя далее процедуру самосогласованного расчета потенциалов  $\varphi_j(i)$  согласно [6], приходим к замкнутой системе уравнений вида

$$\exp(-\beta \varphi_j(i)) = \frac{1}{Q_j} \int_{v_j} g(i, j) \exp(-\beta \Phi(i, j)) \times \exp \left( -\beta \sum_{k \neq i, j} \varphi_k(j) \right) dj. \quad (6)$$

Система уравнений (6) отличается от использованной ранее тем, что ее ядро, помимо точечного короткодействующего потенциала, содержит бинарную функцию для системы частиц с кулоновским взаимодействием, выражение для которой имеет вид [5]

$$F_2(i, j) = F_0(i) F_0(j) g(i, j), \\ g(i, j) = \exp(-\beta u(i, j)), \quad (7)$$

где  $u(i, j)$  – уже не кулоновский, а экранированный потенциал, что решает проблему расходимости интегралов при вычислении свободной энергии (3) из-за дальнего действия. В результате эффекты дальнего действия переносятся, в том числе и на перенормировку одночастичных ячейных потенциалов.

В выражении (7) выписаны начальные члены ряда, соответствующие дебаевскому описанию ионных систем. Более полное представление для соотношения (7) следует при вычислении функции распределения  $g(i, j)$  с помощью коллективных переменных [5]. Дополнительная особенность уравнений в рассматриваемом случае состоит в том, что функция  $g(i, j)$  определяется усреднением не по состояниям идеального газа, а по состояниям идеального кристалла, поскольку для перенормировки майеровских функций

$$f(i, j) = \exp(-\beta \Phi(i, j)) - 1 \quad (8)$$

в выражении (2) использованы одночастичные ячейные потенциалы.

Соответственно  $g(i, j)$ , например, при  $i = 1$ ,  $j = 2$ , определяется выражением, имеющим вид:

$$g(1, 2) = \int_{v_3} \dots \int_{v_N} \exp\left(-\beta \sum_{l < m=1}^N V(l, m)\right) \times \\ \times F_0(3), F_0(4) \dots F_0(N) d^3d_4 \dots d^3d_N. \quad (9)$$

Есть основания полагать, что появление дополнительных гауссианов в (9), вносимых функциями  $F_0$ , приведет к улучшению сходимости ряда (7), полученного в рамках метода коллективных переменных [5], так как аналогичная процедура оказалась успешной при конструировании описания с помощью эффективного потенциала [8].

**Кристалл при наличии вакансий.** При наличии вакансий средние значения чисел заполнения ячеек  $c = N / M < 1$ ,  $N$  – число частиц в системе, распределенных по  $M$  ячейкам. Расчеты и окончательные результаты приведем для случая, соответствующего однородному распределению вакансий по объему системы. Используем подход [5], разработанный для случая, когда в качестве базисной системы используется система твердых сфер, для усреднения по состояниям идеального кристалла. Повторяя процедуры, изложенные в [5], устанавливаем, что все полученные результаты справедливы и для рассматриваемого случая, так что коррелятор

$$g(i, j) = \exp[-\beta u(i, j)](1 + \dots). \quad (10)$$

Здесь  $u(i, j)$  – экранированный кулоновский потенциал, Фурье-образ которого имеет вид

$$u(k) = \frac{1}{N} \frac{a(k)}{1 + a(k)m_2(k)}, \quad (11)$$

где  $a(k)$  – Фурье-образ кулоновского потенциала

$$a(k) = 1 / k^2; \quad (12)$$

$m_2(k)$  – усредненное по базисному распределению произведение коллективных переменных

$$m_2(k) \equiv m_2(k, -k) = \langle \hat{\rho}_k \hat{\rho}_{-k} \rangle_0, \quad (13)$$

$$\hat{\rho}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \exp(ikq_i) - \sqrt{N} \delta_{k,0}, \quad (14)$$

где  $\delta_{k,0}$  – символ Кронеккера.

В уравнениях (11)–(14) в качестве единицы длины используется параметр Бьерума  $r_B = e^2 \beta / 4\pi \epsilon \epsilon_0$ , где  $e$  – заряд иона,  $\beta = 1 / k_B T$  – обратная температура,  $\epsilon$  и  $\epsilon_0$  – диэлектрическая и электрическая постоянные, соответственно.

Рассмотрим последовательно расчет отдельных членов, образующихся при подстановке

соотношения (14) в  $m_2(k_1, k_2)$ , Поскольку  $\hat{\rho}_0 = 0$ , расчеты выполним при  $(k_1, k_2) \neq 0$ :

$$\langle \sum_{i=1}^N \exp(i(k_1 + k_2)q_i) \rangle_0 = \\ = c \sum_{l=1}^M \int_{\vartheta_l} \exp(i(k_1 + k_2)q^l) F_0(q^l) dq^l. \quad (15)$$

Здесь и далее используются обозначения:  $q^l$  – координата произвольной молекулы,  $q_l$  – фиксированной.

Учитывая периодичность функции  $F_0(q)$ , запишем

$$q^l = R_l + r_l, \quad (16)$$

где  $R_l$  – радиус-вектор  $l$ -го узла решетки,  $r_l$  отсчитывается от центра  $l$ -й ячейки.

Подставив (16) в (15), получим

$$\left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i(k_1 + k_2)q_i} \right\rangle_0 = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M e^{i(k_1 + k_2)R_l} f(k_1 + k_2), \quad (17)$$

где

$$f(k) = \int_{\vartheta_l} e^{ikr_l} F_0(r_l) dr_l. \quad (18)$$

Поскольку  $k$  в уравнении (17) принадлежит первой зоне Бриллюэна, а  $R_l$  – вектор основной решетки, имеют место условия [9]:

$$\sum_{i=1}^M e^{ikR_i} = M \delta_{k,0}, \quad (19)$$

$$\left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i(k_1 + k_2)q_i} \right\rangle_0 = \\ = \delta_{k_1 + k_2, 0} f(k_1 + k_2) = f(0). \quad (20)$$

Действуя аналогичным образом, находим

$$\left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N e^{i(k_1 q_i + k_2 q_j)} \right\rangle_0 = \\ = M c f(k_1) f(k_2) \delta_{k_1, 0} \delta_{k_2, 0} - \\ - c \delta(k_1 + k_2) f(k_1) f(k_2). \quad (21)$$

В результате находим

$$m_2(k_1, k_2) = \delta_{k_1 + k_2, 0} (f(k_1 + k_2) - \\ - c f(k_1) f(k_2)) \quad (22)$$

или

$$m_2(k, -k) \equiv m_2(k) = f(0) - c f(k) f(-k). \quad (23)$$

Для дальнейшего расчета  $m_2(k)$  и описания системы в терминах радиуса Дебая рассмотрим разложение Фурье-образа одночастичной функции (18) в ряд по переменной  $k$ .

Так как  $F_0(r_i)$  нормирована на единицу и симметрична по переменной  $r_i$ , можно записать

$$f(k) = 1 - Jk^2 + Wk^4, \quad (24)$$

где  $J$  и  $W$  – второй и четвертый моменты унарной функции распределения, соответственно

$$J = \frac{1}{2} \int_{v_i} (l_k \cdot r_i)^2 F_0(r) dr_i, \quad (25)$$

$$W = \frac{1}{4!} \int_{v_i} (l_k \cdot r_i)^4 F_0(r_i) dr_i, \quad (26)$$

где  $l_k = k / |k|$  – единичный вектор вдоль направления  $k$ .

Разложение (24) позволяет записать

$$m_2(k) = (1 - c) + k^2 c (2J - k^2 (2W + J)). \quad (27)$$

Теперь, подставив (27) и (12) в выражение (13), находим, что Фурье-образ экранированного потенциала имеет вид

$$u(k) = \left[ (1 + 2Jc) \left( \frac{(1 - c)}{(1 + 2Jc)} + k^2 - k^4 \frac{c}{(1 + 2Jc)} \right) \right]^{-1}. \quad (28)$$

Из (28) следует, что при малых значениях  $k$  можно записать

$$u(k) = \left[ \left( k^2 + \frac{(1 - c)}{(1 + 2Jc)} \right) (1 + 2Jc) \right]^{-1}. \quad (29)$$

Из (29) находим, что радиус Дебая будет определяться формулой

$$r_D = R_D \sqrt{\frac{1 + 2Jc}{(1 - c)}}, \quad R_D = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0 h^3}{c \beta e^2}}, \quad (30)$$

где  $h$  – параметр решетки.

Из соотношения (30) следует, что при предельных значениях  $c = 0$  или  $1$   $r_D \rightarrow \infty$ , и экранирование отсутствует из-за невозможности перемешивания частиц по объему системы в этих предельных случаях. С другой стороны, теория содержит эффекты экранирования при переходе к решеточному описанию, когда не учитываются колебания частиц относительно узлов решетки. Тогда при  $J = 0$ , согласно (29), находим

$$\beta u(k) = \frac{1}{k^2 + (1 - c)}, \quad (31)$$

что позволяет записать

$$\beta u(r_{ij}) = \frac{r_b}{r_{ij}} \exp(-v r_{ij}), \quad v = \frac{\sqrt{1 - c}}{R_D}, \quad (32)$$

где  $r_{ij}$  – расстояние между молекулами в  $i$ -й и  $j$ -й ячейках.

Для перехода к решеточному описанию функции, зависящие от координат, заменяются их значениями в узлах решетки. Соответственно интегральные уравнения для потенциалов средних сил переходят в алгебраические. При записи и решении этих уравнений удобно систему с вакансиями описывать как двухкомпонентную, обозначая, как и ранее, сорта компонентов греческими буквами. Система уравнений, определяющая потенциалы средних сил, имеет такой же вид, как и рассмотренная ранее [6], но в данном случае параметры  $W_{ij}^\gamma$  следует заменить на произведение  $W_{ij}^\gamma V_{ij}^\gamma$ , где

$$W_{ij}^\gamma = \exp(-\beta \Phi_{ij}^\gamma), \quad V_{ij}^\gamma = \exp(-\beta u_{ij}^\gamma). \quad (33)$$

В свою очередь,

$$\beta u_{ij}^\gamma = \frac{r_b}{R_{ij}} \exp(-v R_{ij}) \delta_{\gamma,1} \delta_{\eta,1}. \quad (34)$$

В формуле (34)  $R_{ij}$  – расстояние между центрами  $i$  и  $j$  ячеек, занятых соответственно частицами  $\gamma$  и  $\eta$  сортов. Величины  $\gamma$  и  $\eta$  принимают значения 1 либо 0, если соответствующий узел занят молекулой или вакантен.

Однако более целесообразно в решеточных моделях учесть тепловые колебания частиц вблизи узлов кристаллической решетки. Одночастичные функции распределения могут быть вычислены в рамках других подходов, например, на основе метода условных распределений [7], и в простейшем случае аппроксимированы гауссовыми зависимостями. Поэтому радиус экранирования кулоновского потенциала будет определяться зависимостью (30), и можно будет оценить влияние тепловых колебаний частиц на параметры экранирования. С другой стороны, при моделировании диффузионных процессов по методу Монте-Карло в решеточном варианте можно будет использовать аналитическую оценку экранированного кулоновского взаимодействия, что позволит существенно сократить затраты машинного времени на выполнение моделирования.

**Заключение.** Схема описания экранирования взаимодействия в конденсированном состоянии перенесена на согласованный учет вкладов от коротко- и дальнедействующих сил в твердотельном состоянии вещества. Получена замкнутая система интегральных уравнений

для потенциалов средних сил, определяющих коррелятивные функции распределения. Ядра этой системы выражаются через точечный короткодействующий межмолекулярный потенциал и экранированный кулоновский потенциал. Получены соотношения, связывающие между собой Фурье-образ экранированного потенциала с Фурье-образом унарной функции распределения, выраженной через потенциалы средних сил, которые замыкают систему интегральных уравнений для последних. Выполнено разложение полученных выражений по волновому вектору, что позволило представить экранирова-

ние в дебаевской форме с модифицированным соответствующим образом выражением для радиуса Дебая.

Публикация содержит результаты исследований, выполненных при грантовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Беларуси (конкурсный проект № Ф16К-614) и Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (конкурсный проект № Ф73/113-2017), а также научной программы Евросоюза HORIZON-2020 (проект AMD-734276-CONIN) и Министерства образования Беларуси.

### Литература

1. Solid oxide fuel cells: materials properties and performance. Ed. by J. Fergus, R. Hui, X. Li, D. P. Wilkinson, J. Zhang. London: CRC Press, 2009. 296 p.
2. Gür T. M. Comprehensive review of methane conversion in solid oxide fuel cells: Prospects for efficient electricity generation from natural gas // *Progr. Energy Comb. Sci.* 2016. Vol. 54. P. 1–64.
3. All-solid-state lithium batteries with inorganic solid electrolytes: Review of fundamental science / X. Yao [et. al] // *Chinese Physics B.* 2016. No. 1. P. 018802–018816.
4. All-solid-state lithium batteries with ultralong cycle life / X. Yao [et. al] // *Nano Lett.* 2016. Vol. 16. P. 7148–7154.
5. Юхновский И. Р., Головкин М. Ф. Статистическая теория классических равновесных систем. Киев: Наукова думка, 1980. 372 с.
6. Вихренко В. С., Грода Я. Г., Бокун Г. С. Равновесные и диффузионные характеристики интеркационных систем на основе решеточных моделей. Минск: БГТУ, 2008. 326 с.
7. Ротт Л. А. Статистическая теория молекулярных систем. М.: Наука, 1979. 280 с.
8. Ма Ш. Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980. 304 с.
9. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978. 790 с.

### References

1. Solid oxide fuel cells: materials properties and performance. Ed. by J. Fergus, R. Hui, X. Li, D. P. Wilkinson, J. Zhang. London, CRC Press, 2009. 296 p.
2. Gür T. M. Comprehensive review of methane conversion in solid oxide fuel cells: Prospects for efficient electricity generation from natural gas. *Progr. Energy Comb. Sci.*, 2016, vol. 54, pp. 1–64.
3. X. Yao, B. Huang, Y. Yin, G. Peng, Z. Huang, C. Gao, D. Liu, X. Xu. All-solid-state lithium batteries with inorganic solid electrolytes: Review of fundamental science. *Chin. Phys. B.*, 2016, vol. 25, no. 1, pp. 018802–018816.
4. X. Yao, D. Liu, Ch. Wang, P. Long, Y. Sh. Hu, H. Li, L. Chen, X. Xu. All-solid-state lithium batteries with ultralong cycle life. *Nano Lett.*, 2016, vol. 16, no. 11, pp. 7148–7154.
5. Yuhnovskiy I. R., Golovko M. F. *Statisticheskaya teoriya klassicheskikh ravnovesnykh sistem* [Statistical Theory of Classical Equilibrium Systems]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1980. 372 p.
6. Vikhrenko V. S., Groda Ya. G., Bokun G. S. *Ravnovesnye i diffuzionnye kharakteristiki interkalyatsionnykh sistem na osnove reshetochnykh modeley* [Equilibrium and Diffusion Characteristics of Intercalation Systems on the Basis of Lattice Models]. Minsk, BGTU Publ., 2008. 326 p.
7. Rott L. A. *Statisticheskaya teoriya molekulyarnykh sistem* [Statistical Theory of Molecular Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 280 p.
8. Ma Sh. *Soyremennaya teoriya kriticheskikh yavleniy* [Modern theory of critical phenomena]. Moscow, Mir Publ., 1980. 304p.
9. Kittel Ch. *Vvedenie v fiziku tverdogo tela* [Introduction to Solid State Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 790 p.

### Информация об авторах

**Бокун Георгий Станиславович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической механики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: gBokun@mail.ru

**Головко Мирослав Федорович** – доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАН Украины, профессор, главный научный сотрудник отдела теории мягкой материи. Институт физики конденсированных систем НАН Украины (79011, г. Львов, ул. Свенцицкого, 1, Украина). E-mail: holovko@icmp.lviv.ua

**Вихренко Вячеслав Степанович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической механики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: vvikhre@mail.ru

#### **Information about the authors**

**Bokun Georgiy Stanislavovich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Theoretical Mechanics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gBokun@mail.ru

**Holovko Myroslav Fedorovich** – DSc (Physics and Mathematics), Corresponding Member of the NAS of Ukraine, Professor, Chief Researcher, the Department of Soft Matter Theory. Institute for Condensed Matter Physics of the NAS of Ukraine (1, Svientsitskii str., 79011, Lviv, Ukraine). E-mail: holovko@icmp.lviv.ua

**Vikhrenko Vyacheslav Stepanovich** – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Professor, the Department of Theoretical Mechanics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vvikhre@mail.ru

*Поступила 20.04.2017*



УДК 538.91:621.793.182; 620.197

**В. В. Чаевский<sup>1</sup>, Н. Вишняков<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет

<sup>2</sup>Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса

## **СТРУКТУРА И ФАЗОВЫЙ СОСТАВ ZrC-Ni-УДА-ПОКРЫТИЙ ФРЕЗЕРНОГО ИНСТРУМЕНТА**

Определены параметры синтеза и сформированы комбинированные ZrC-Ni-УДА-покрытия на твердосплавных ножах дереворежущего инструмента. ZrC-Ni-УДА-покрытия содержат отдельные фазы никеля, Ni-УДА, графитоподобные фазы ультрадисперсных алмазов, а также фазы карбида циркония ZrC. Поверхность покрытия неоднородна, содержит поры и включения (частицы). Структура нижнего слоя Ni-УДА влияет на морфологию поверхности ZrC-Ni-УДА-покрытия: отдельные частицы УДА присутствуют в порах комбинированного покрытия.

**Ключевые слова:** структура, покрытие, режущий инструмент, ультрадисперсные алмазы, никель, карбид циркония.

**V. V. Chayevski<sup>1</sup>, N. Višniakov<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Belarusian State Technological University

<sup>2</sup>Vilnius Gediminas Technical University

## **THE STRUCTURE AND PHASE COMPOSITION OF ZrC-Ni-UDD-COATINGS OF A MILLING TOOL**

The parameters of the synthesis of combined ZrC-Ni-UDD-coatings have been determined as well as the coatings have been formed on hard alloy knives of a woodcutting tool. The ZrC-Ni-UDD-coatings consist of separate phases of nickel, Ni-UDD, ultradisperse diamonds phases similar to the graphite phase and zirconium carbide ZrC-phase. The surface morphology of the coating shows a pattern with pits, pores, and dots (particles). The structure of the bottom layer of Ni-UDD affects the morphology of the surface of the ZrC-Ni-UDD coating: separated UDD particles are present in the pores of the combined coating.

**Key words:** structure, coating, cutting tool, ultradisperse diamonds, nickel, zirconium carbide.

**Введение.** Некоторые традиционные твердые керамики, такие как нитриды, карбиды, бориды и оксиды переходных металлов (TiAlN, TiC, TiB<sub>2</sub> и др.), которые применяются для защиты твердосплавных (на основе карбида вольфрама WC, легированного кобальтом) режущих инструментов от повреждений в различных областях промышленности, обладая повышенной износостойкостью и химической стабильностью, не способны сохранять свои свойства при тяжелых условиях резания. Срок службы твердосплавных инструментов может значительно увеличиваться наноструктурированными многослойными покрытиями, такими как TiCN, TiCrN, AlCrN, TiAlN, CrZrN и др., синтезированными методом физического осаждения из паровой фазы с помощью катодного дугового испарения (CAE-PVD), и обладающими превосходными механическими свойствами [1–3]. Кроме того, использование ультрадисперсных алмазов (УДА), получаемых детона-

цией взрывчатых веществ, в качестве композиционного материала в электрохимических и химических металл-алмазных покрытиях приводит к повышению их износостойкости, существенной адгезии, значительному снижению коэффициента трения [4]. Было доказано, что обработка твердосплавных ножей комбинированными гальваническим методом и методом CAE-PVD обеспечивает увеличение периода стойкости срока службы режущих инструментов с ZrN-Ni-Co-покрытием при фрезеровании ламинированных древесно-стружечных плит (ЛДСП) [5].

В связи с этим целью данной работы было сформировать методами CAE-PVD и электрохимического осаждения градиентные комбинированные ZrC-Ni-УДА-покрытия на поверхности твердосплавных лезвий ножей из карбида вольфрама WC дереворежущего инструмента и исследовать структуру, фазовый и элементный состав сформированных слоев.

**Основная часть.** Гальванические Ni-УДА композиционные электрохимические покрытия наносили на подготовленную поверхность лезвий твердосплавных ножей фирмы Leitz (Германия) на экспериментальной установке с применением источника постоянного тока марки НУ3005-3 при плотностях тока  $1\text{--}24\text{ А/дм}^2$  в гальваностатическом и импульсном режимах электролиза из электролитов следующих составов:  $\text{NiSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O} - 300\text{ г/дм}^3$ ,  $\text{NiCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O} - 40\text{ г/дм}^3$ ,  $\text{H}_3\text{BO}_3 - 30\text{ г/дм}^3$ , УДА  $- 2\text{--}5\text{ г/дм}^3$ . Кислотность электролита составляла  $\text{pH} = 4,5$ . В качестве дисперсной фазы использовали УДА (ТУ РБ 28619110.001-95), являющиеся продуктом детонационного превращения взрывчатых веществ размером  $3\text{--}5\text{ нм}$ , развитой удельной поверхностью  $200\text{--}450\text{ м}^2/\text{г}$ . КЭП формировались при температуре  $40\text{--}50^\circ\text{C}$  и постоянном перемешивании электролита-суспензии для поддержания частиц УДА во взвешенном состоянии. Толщина покрытий не превышала  $10\text{ мкм}$ .

Ионно-плазменные ZrC-покрытия осаждались методом САЕ-PVD на поверхность ножей с Ni-УДА-покрытием на установке ВУ-1Б «Булат» по стандартной методике [6]: с предварительной обработкой ионами циркония подложки в вакууме  $10^{-3}\text{ Па}$  при потенциале подложки, равном  $-1\text{ кВ}$ , и последующим нанесением покрытий при токе горения дуги катода  $-100\text{ А}$  и опорном напряжении, равном  $-100\text{ В}$ , в атмосфере углеводорода  $\text{CH}_4$  при давлении  $10^{-1}\text{ Па}$ . Температура при осаждении соответствовала  $400\text{--}450^\circ\text{C}$ . Толщина ZrC-покрытий не превышала  $1,5\text{ мкм}$ .

Фазовый состав полученных покрытий исследовался методом рентгеноструктурного анализа (РСА) при помощи дифрактометра Ultima IV (Rugaku, Япония) в  $\text{Cu-K}_\alpha$  излучении.

Морфология поверхности образцов изучалась методами растровой электронной микроскопии (РЭМ) и сканирующей электронной микроскопии (СЭМ) с использованием микроскопа LEO-1455 VP, который также применялся для определения элементного состава полученных покрытий методами СЭМ и рентгеноспектрального микроанализа (РСМА).

Рентгенограммы ZrC-Ni-УДА-покрытия (рис. 1) показывают наличие отдельных фаз никеля, Ni-УДА, графитоподобных фаз ультрадисперсных алмазов, а также фазы карбида циркония ZrC. Присутствие на рентгенограммах при касательных съемках ZrC-Ni-УДА-покрытия рефлекса алмаза C (111), характерного для УДА порошков, и рефлексов, соответствующих фазам ZrC, никеля, свидетельствует о наличии фазы Ni-УДА, а также об аморфизации и мелкокристалличности структуры сформированной ZrC-Ni-УДА-системы. Кроме того, наличие более интенсивного пика Ni (111) при  $2\Theta = 44^\circ$  по сравнению с пиком Ni (200) при  $2\Theta = 52^\circ$  является характерным для покрытий, содержащих Ni-УДА [7].

РЭМ-снимок поверхности покрытия, представленный на рис. 2, показывает типичную морфологию для структур, сформированных методом САЕ-PVD из-за характерной для него высокой скорости осаждаемого вещества: наличие следов капельной фазы металла (рис. 2, а), ям, пор и точек (частиц) (рис. 2, б).

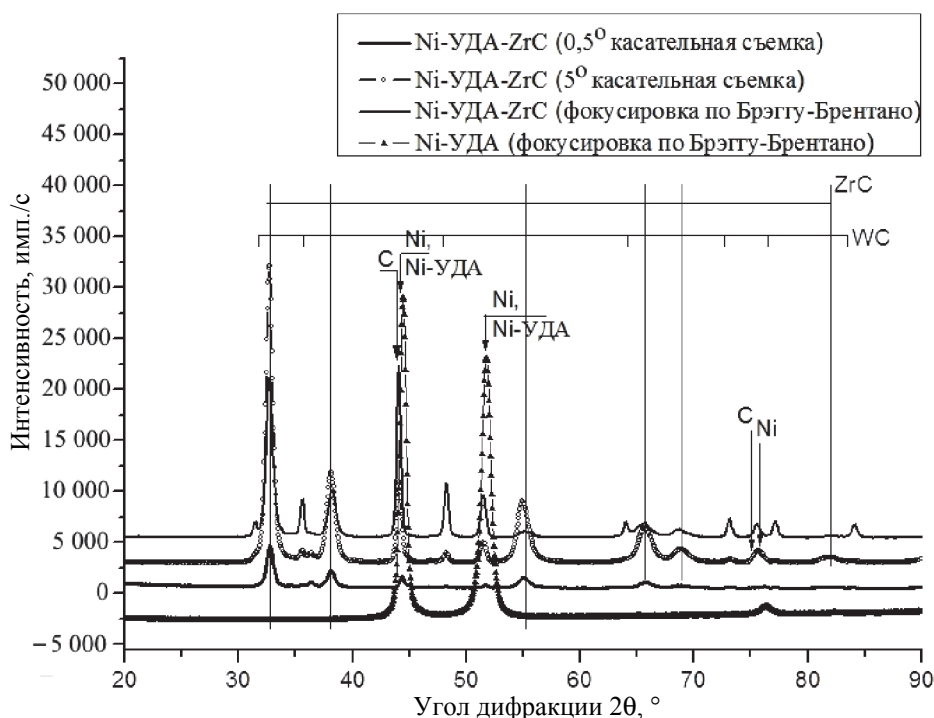


Рис. 1. Рентгенограммы ZrC-Ni-УДА-, Ni-УДА-покрытий

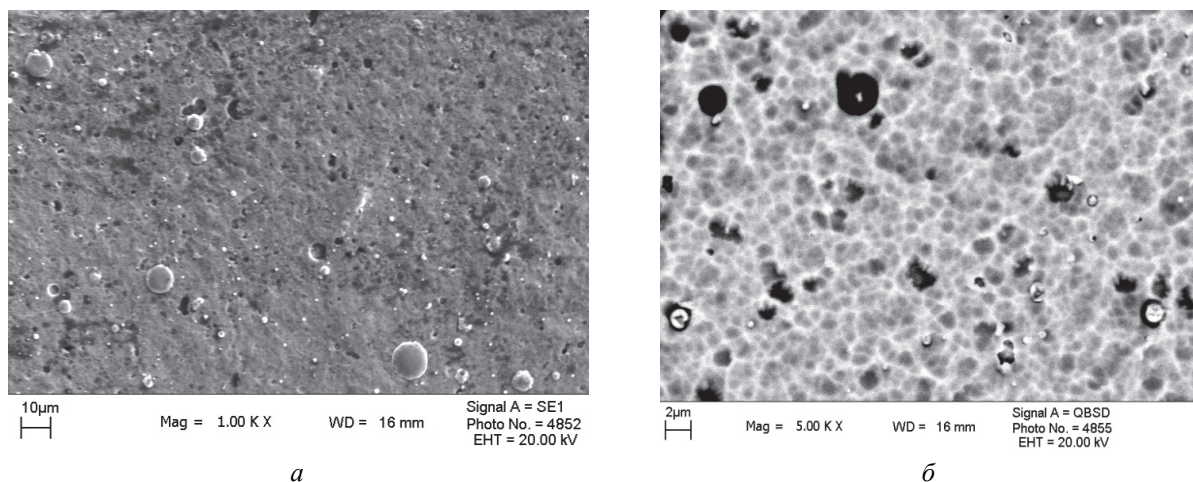


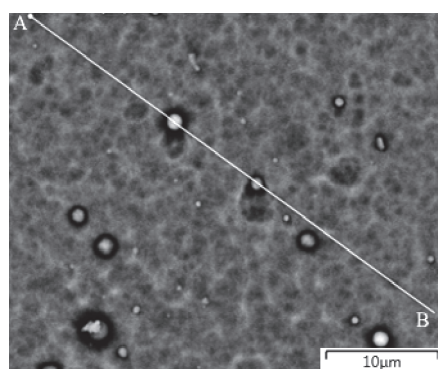
Рис. 2. РЭМ-снимки поверхности ZrC-Ni-УДА-покрытия

Отсутствие никеля в поверхностном слое ZrC-Ni-УДА-покрытия согласно данным РСМА (таблица) свидетельствует, что слой ZrC плотно покрывает Ni-УДА-покрытие и основу.

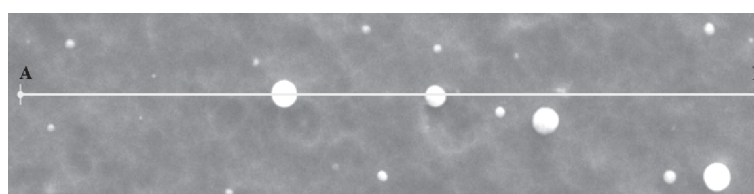
СЭМ-исследование поверхности покрытия показало (рис. 3), что в порах покрытия присутствуют частицы, содержащие углерод, которые не взаимодействуют с цирконием (рис. 3, а, б, в) и не являются элементами твердосплавной основы WC (рис. 3, г).

#### Элементный состав поверхности ZrC-Ni-УДА-покрытия

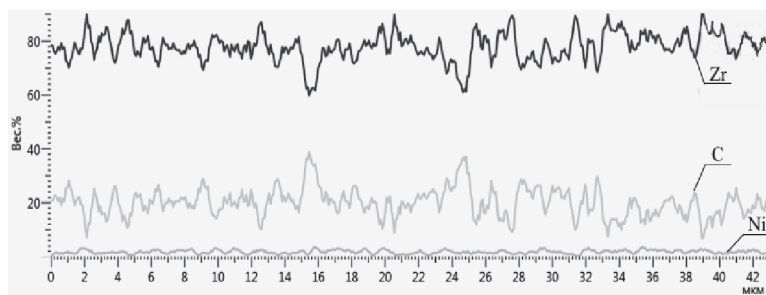
Элемент	Концентрация, вес. %	Концентрация, ат. %
C	14,88	52,38
O	3,61	9,54
Ni	1,13	0,82
Zr	80,38	37,26



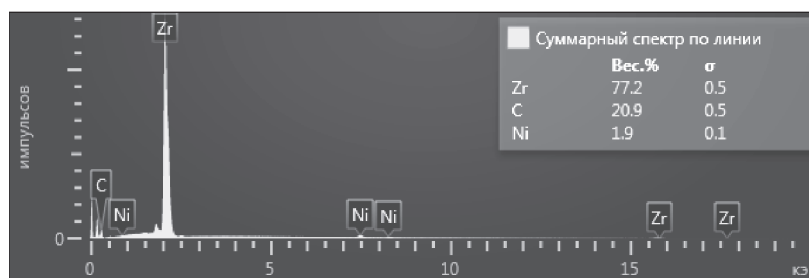
а



б



в



г

Рис. 3. СЭМ-снимок поверхности покрытия (а), распределение концентрации элементов (Zr, Ni, C) (б) и спектр элементного состава (в) при сканировании вдоль линии АВ

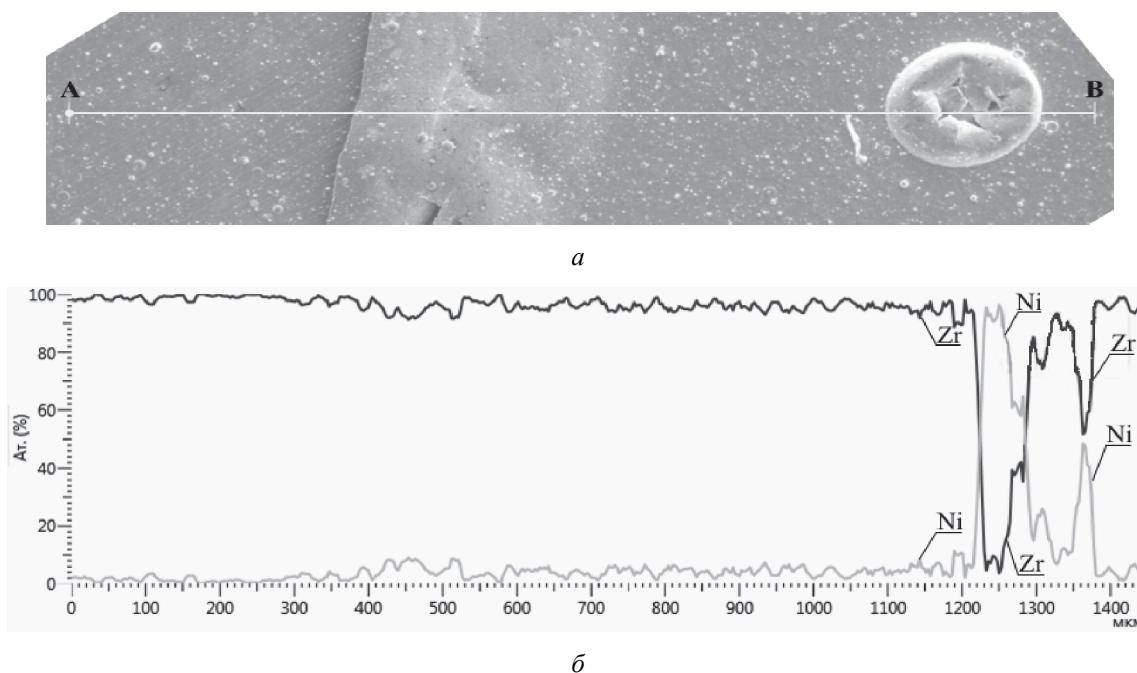


Рис. 4. СЭМ-снимок поверхности покрытия (а), распределение концентрации элементов (Zr, Ni) (б) при сканировании вдоль линии АВ

Кроме того, СЭМ-исследование дефекта в покрытии (рис. 4) выявило наличие Ni-УДА-слоя (рис. 4, б).

Наличие углерода в порах ZrC-Ni-УДА-покрытия (рис. 3) объясняется тем, что Ni-УДА-покрытия имеют характерную структуру, формируемую кластерами наноалмазов [8]. Частицы наноалмазов адгезионно активны и могут формировать кластеры размером до 10 мкм. В результате углерод (наноалмазы) распределяются по поверхности Ni-УДА-слоя в виде кластеров.

**Заключение.** Комбинированные ZrC-Ni-УДА-покрытия, осажденные на твердосплавные из карбида вольфрама WC ножи дереворежущего инструмента, обладают мелкокристаллической структурой и содержат отдельные

фазы никеля, Ni-УДА, графитоподобную фазу УДА, а также фазу ZrC. Поверхность покрытия имеет характерную морфологию для структур, сформированных методом САЕ-PVD. Структура нижнего Ni-УДА-слоя влияет на морфологию поверхности ZrC-Ni-УДА-покрытия: отдельные частицы УДА присутствуют в порах покрытия.

Осажденные на твердосплавные ножи дереворежущего фрезерного инструмента ZrC-Ni-УДА-покрытия благодаря их специфической структуре (чередующиеся слои разного состава, мелкокристалличность, наличие твердого карбида циркония ZrC) могут быть использованы для увеличения периода стойкости инструмента при резании ЛДСП на станках с ЧПУ.

### Литература

1. The effects of the H/E ratio of various Cr-N interlayers on the adhesion strength of CrZrN coatings on tungsten carbide substrates / Hye-Kun Kim [et al.] // *Surface & Coatings Technology*. 2015. № 284. P. 230–234.
2. Kumar T. Sampath, Prabu S. Balasivanandha, Manivasagam G. Metallurgical Characteristics of TiAlN/AlCrN Coatings Synthesized by the PVD Process on a Cutting Insert // *Journal of Materials Engineering and Performance*. 2014. Vol. 23 (8). P. 2877–2884.
3. Structural characterization and adhesion appraisal of TiN and TiCN coatings deposited by CAE-PVD technique on a new carbide composite cutting tool / A. A. Matei [et al.] // *Journal of Adhesion Science and Technology*. 2015. Vol. 29 (23). P. 2576–2589.
4. Долматов В. Ю. Ультрадисперсные алмазы детанационного синтеза: свойства и применение // *Успехи химии*. 2001. Т. 70, № 7. С. 687–708.
5. Influence of high energy treatment on wear of edges knives of wood-cutting tool / V. Chayeuski [et al.] // *MM (Modern Machinery) Science Journal*. 2016. № 6. P. 1519–1523.
6. Эффективность применения TiN-, ZrN-, Ti-Zr-N- и Ti-покрытий на твердосплавных резцах при обработке ламинированных древесно-стружечных плит концевыми фрезами / А. А. Гришкевич [и др.] // *Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика*. 2008. Вып. XVI. С. 52–54.

7. Тырышкина Л. Е., Чиганова Г. А., Абкрян А. К. Влияние наноалмазов на микроструктуру никелевых покрытий // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. 2014. № 2. С. 54–58.

8. Дисперсное упрочнение наночастицами алмазного композиционного электрохимического покрытия / Н. И. Полушин [и др.] // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. 2011. № 4. С. 49–53.

### References

1. Kim Hoe-Kun, La Joung-Hyun, Kim Kyu-Sung, Lee Sang-Yul. The effects of the H/E ratio of various Cr-N interlayers on the adhesion strength of CrZrN coatings on tungsten carbide substrates. *Surface & Coatings Technology*, 2015, no. 284, pp. 230–234.

2. Kumar T. Sampath, Prabu S. Balasivanandha, Manivasagam G. Metallurgical Characteristics of TiAlN/AlCrN Coatings Synthesized by the PVD Process on a Cutting Insert. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 2014, vol. 23 (8), pp. 2877–2884.

3. Matei A. A., Pencea I., Stanciu S. G., Hristu R., Antoniac I., Ciovisa E., Sfat C. E., Stanciu G. A. Structural characterization and adhesion appraisal of TiN and TiCN coatings deposited by CAE-PVD technique on a new carbide composite cutting tool. *Journal of Adhesion Science and Technology*, 2015, vol. 29 (23), pp. 2576–2589.

4. Dolmatov V. Yu. Detonation synthesis ultradispersed diamonds: properties and applications. *Uspekhi Khimii* [Russian Chemical Reviews], 2001, vol. 70, no. 7, pp. 687–708 (In Russian).

5. Chayeuski V., Zhyllinskiy V., Grishkevich A., Rudak P., Barcik Š. Influence of high energy treatment on wear of edges knives of wood-cutting tool. *MM (Modern Machinery) Science Journal*, 2016, no. 6, pp. 1519–1523.

6. Grishkevich A. A., Chayeuski V. V., Uglov V. V., Kuleshov A. K. Efficiency of use of TiN-, ZrN-, Ti-Zr-N-, and Ti-coatings on hard alloy during machining of laminated woodchip board using tail cutters. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2008, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 52–54 (In Russian).

7. Tyryshkina L. E., Chiganova G. A., Abkaryan A. K. Influence of Nanodiamonds on Microstructure of Nickel Coatings. *Izvestiya Vuzov. Poroshkovaya Metallurgiya i Funktsional'nye Pokrytiya* [Universities Proceedings. Powder Metallurgy and Functional Coatings], 2014, no. 2, pp. 54–58 (In Russian).

8. Polushin N. I., Kudinov A. V., Zhuravlev V. V., Stepareva N. N., Maslov A. L. Dispersed hardening of diamond composite electrochemical coating by nanoparticles. *Izvestiya Vuzov. Poroshkovaya Metallurgiya i Funktsional'nye Pokrytiya* [Universities Proceedings. Powder Metallurgy and Functional Coatings], 2011, no. 4, pp. 49–53 (In Russian).

### Информация об авторах

**Чаевский Вадим Витальевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tchaievsky@tut.by

**Вишняков Николай** – кандидат технических наук, заведующий лабораторией факультета механики. Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса (03224, г. Вильнюс, ул. Басанавичюса, 28, Литва). E-mail: nikolaj.visniakov@vgtu.lt

### Information about the authors

**Chayeuski Vadzim Vitalievich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: chayeuski@belstu.by

**Višniakov Nikolaj** – PhD (Engineering), Major research worker of Scientific Laboratory of the Faculty of Mechanics. Vilnius Gediminas Technical University (28, Basanaviciaus str., 03224, Vilnius, Lithuania). E-mail: nikolaj.visniakov@vgtu.lt

Поступила 26.04.2017

УДК 538.9

**Е. В. Фарафонтова**

Белорусский государственный технологический университет

**ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
ДВУХУРОВНЕВОГО МОЛЕКУЛЯРНО-СТАТИСТИЧЕСКОГО ПОДХОДА  
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕШЕТОЧНЫХ БИНАРНЫХ СПЛАВОВ**

В работе используются статистические уравнения и формулы для неоднородных многокомпонентных систем, полученные в рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода, который базируется на одновременном применении метода коррелятивных функций Боголюбова – Борна – Грина – Ивона (ББГКИ) и метода условных распределений Ротта, а также метода термодинамических функционалов плотности. В частности, в развиваемом статистическом подходе однокомпонентная система с тепловыми вакансиями рассматривается как гипотетическая двухкомпонентная, которая состоит из реальных частиц сорта *a* и фиктивных частиц сорта *b*. Фиктивные частицы используются для учета вкладов от тепловых вакансий в кристаллическом состоянии вещества. Выражения для унарной и бинарной функций распределения молекул неоднородной системы, определяющие ее свободную энергию, в данной работе используются для изучения микроструктуры однородной бинарной системы, которая описывается в рамках классической решеточной модели с парным взаимодействием между атомами сортов *a* и *b*. Проведено сопоставление выражения для чисел заполнения в двухуровневом молекулярно-статистическом подходе с ранее полученными вероятностными функциями, которые описывают ближний порядок в решеточных однородных бинарных сплавах с учетом взаимодействия только ближайших соседей.

**Ключевые слова:** двухуровневый молекулярно-статистический подход, потенциалы средних сил, свободная энергия, числа заполнения, решеточный бинарный сплав, вероятностная функция ближнего порядка.

**E. V. Farafontova**

Belarusian State Technological University

**APPLICATION OF FUNCTIONS OF DISTRIBUTION OF SYSTEMS  
IN CASE OF USING TWO-LEVEL MOLECULAR-STATISTICAL APPROACH  
FOR RESEARCHING OF LATTICE BINARY ALLOYS**

In the work statistical equations and formulas for heterogeneous multicomponent systems are used, obtained in case of using two-level molecular-statistical approach, which is based on the simultaneous application of the Borolyubov-Born-Green-Yvon correlation method (BBGKI) and the Rott method of conditional distributions together with thermodynamics density functionals. In particular in developed statistical approach one-component system with thermal vacancies is considered as two-component one, which consists of real particles of *a*-type and fictitious particles of *b*-type. Fictitious particles are used for accounting for contributions of thermal vacancies in crystal state of the substance. Expressions for unary and binary distribution functions of molecules of one-component homogeneous system with vacancies, determining its free energy, in this work are applied for examining of binary alloy, which is described in a classical lattice model with pair interaction between atoms of types *a* and *b*. The matching of expressions for two-celled occupation numbers of two-level molecular-statistical approach with probability functions of close-order in lattice homogeneous binary alloys is made only for conditions of close-members interaction.

**Key words:** a two-level molecular-statistical approach, average power potential, free energy, occupation numbers, lattice binary alloy, probability function of short-range order.

**Введение.** В рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода [1], который базируется на одновременном использовании метода коррелятивных функций Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ) (см., например, [2, 3]), метода условных распределений Л. А. Ротта [4] и метода термодинамических функционалов плотности [5, 6], получены

общие статистические уравнения и формулы, описывающие микро- и микроструктуру, а также равновесные термодинамические характеристики неоднородных конденсированных многокомпонентных молекулярных систем [1, 7, 8]. В соответствии с методом условных распределений весь объем *V* системы делится на *M* равных микроячеек объемом  $\omega$  ( $\omega = V / M$ ) так,

чтобы число ячеек было больше числа  $N$  молекул системы ( $M > N$ ). Эти ячейки могут быть заняты реальными молекулами разных сортов  $\mu$  ( $\mu = a, b, \dots$ ), либо быть свободными (тепловые вакансии в кристаллах), которые в развиваемой статистической схеме считаются занятыми фиктивными частицами сорта  $l$ , не взаимодействующими между собой и с реальными молекулами ( $\mu$  и  $\nu = a, b, \dots, l$ ).

После обрыва бесконечной цепочки интегро-дифференциальных уравнений [1, 7] на втором уравнении (приближение бинарных корреляций) получают приближенные выражения для нормированных на единицу унарной  $\hat{F}_{11}(\bar{q}_i^\mu)$  и бинарной  $\hat{F}_{11}^{(1)}(\bar{q}_i^\mu, \bar{q}_j^\nu)$  функций распределения частиц сортов  $\mu$  и  $\nu$ , которые содержат одночастичные потенциалы средних сил  $\phi_{ik}$  и  $\phi_{jk}$  и парный потенциал  $\Phi_{ij}^{\mu\nu}$  для двух частиц сортов  $\mu$  и  $\nu$ , находящихся в двух разных ячейках с номерами  $i$  и  $j$ :

$$\hat{F}_{11}(\bar{q}_i^\mu) = \frac{1}{Q_i^\mu} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} \sum_{k \neq i}^M \phi_{ik}(\bar{q}_i^\mu) \right\}, \quad (1)$$

$$\hat{F}_{11}^{(1)}(\bar{q}_i^\mu, \bar{q}_j^\nu) = \frac{1}{Q_{ij}^{\mu\nu}} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} \left[ \Phi_{ij}^{\mu\nu} (|\bar{q}_i^\mu - \bar{q}_j^\nu|) + \sum_{k \neq i, j}^M \phi_{ik}(\bar{q}_i^\mu) + \sum_{k \neq i, j}^M \phi_{jk}(\bar{q}_j^\nu) \right] \right\}, \quad (2)$$

где  $\bar{q}_i^\mu$  и  $\bar{q}_j^\nu$  – радиус-векторы частиц сортов  $\mu$  и  $\nu$ , статистически распределенных в ячейках с одинаковыми объемами  $\omega_i$  и  $\omega_j$  соответственно ( $\omega_i = \omega_j$ );  $\phi_{ik}(\bar{q}_i^\mu)$  – одночастичный потенциал средних сил взаимодействия частицы в ячейке  $\omega_i$  ( $\bar{q}_i^\mu \subset \omega_i$ ) с частицей, распределенной в ячейке  $\omega_k$ , которая с определенной вероятностью может оказаться занятой молекулой либо вакантной, а потенциал  $\phi_{jk}(\bar{q}_j^\nu)$  аналогичен  $\phi_{ik}(\bar{q}_i^\mu)$ ;  $\theta = kT$  – приведенная температура;  $k$  – постоянная Больцмана. Нормирующие множители  $1/Q_i^\mu$  и  $1/Q_{ij}^{\mu\nu}$  определяются следующими выражениями:

$$Q_i^\mu = \int_{\omega_i} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} \sum_{k \neq i}^M \phi_{ik}(\bar{q}_i^\mu) \right\} d\bar{q}_i^\mu, \quad (3)$$

$$Q_{ij}^{\mu\nu} = \int_{\omega_i} \int_{\omega_j} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} \left[ \Phi_{ij}^{\mu\nu} (|\bar{q}_i^\mu - \bar{q}_j^\nu|) + \sum_{k \neq i, j}^M \phi_{ik}(\bar{q}_i^\mu) + \sum_{k \neq i, j}^M \phi_{jk}(\bar{q}_j^\nu) \right] \right\} d\bar{q}_i^\mu d\bar{q}_j^\nu. \quad (4)$$

Одночастичные потенциалы  $\phi$  средних сил неоднородной многокомпонентной системы находятся из решения замкнутой системы интегральных уравнений [1, 8, 9]:

$$\frac{n_i^\mu}{Q_i^\mu} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} \phi_{ij}(\bar{q}_i^\mu) \right\} = \sum_\nu \frac{n_{ij}^{\mu\nu}}{Q_{ij}^{\mu\nu} \omega_j} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} \left[ \Phi_{ij}^{\mu\nu} + \sum_{k \neq i, j}^M \phi_{jk}(\bar{q}_j^\nu) \right] \right\} d\bar{q}_j^\nu. \quad (5)$$

Здесь  $n_i^\mu$  – числа заполнения одиночных ячеек  $\omega_i$  частицами сорта  $\mu$  ( $\mu = a, b, \dots, l$ ), которые определяют вероятность того, что в ячейке объемом  $\omega_i$  статистически распределена частица сорта  $\mu$ ;  $n_{ij}^{\mu\nu}$  – двухъячеечные числа заполнения пар ячеек с номерами  $i$  и  $j$ , которые определяют вероятность того, что частица сорта  $\mu$  находится в ячейке с номером  $i$ , а другая частица сорта  $\nu$  находится в ячейке с номером  $j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, M$ ).

Приведенные выше общие статистические соотношения в приближении бинарных корреляций использовались ранее для описания свойств однокомпонентной системы с учетом наличия вакансий в кристаллическом состоянии или исключенного объема во флюидном, т. е. жидком и газообразном состояниях [8]. Для этого предварительно была выполнена перенормировка одночастичных потенциалов [9], что позволило систему интегральных уравнений (5) привести к виду, удобному для ее численного решения методом итераций. В данной работе аналогичные преобразования проведены для статистического описания бинарной системы, состоящей из частиц (атомов или молекул) сортов  $a$  или  $b$  и имеющую идеальную кристаллическую структуру (без деформаций и вакансий). Для такой системы ранее в работе [10] были получены явные выражения для вероятностных функций  $P_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = a, b$ ), описывающих ближний порядок в приближении регулярных твердых растворов, которые широко используются при построении микроскопической теории взаимной диффузии в металлах и сплавах [10, 11]. Например, функция  $P_{ab}$  имеет следующий вид:

$$P_{ab} = c_a c_b (1 + c_a c_b \Delta\Phi / \theta), \quad (6)$$

$$P_{aa} + P_{ab} = c_a, \quad P_{bb} + P_{ba} = c_b, \quad (7)$$

$$\Delta\Phi = \Phi_{aa} + \Phi_{bb} - 2\Phi_{ab}. \quad (8)$$

Здесь  $c_\mu = M_\mu / M$  – концентрации атомов сортов  $\mu = a, b$  однородного кристаллического

сплава ( $M_\mu$  – число атомов сорта  $\mu$ ,  $M = M_a + M_b$  – общее число атомов в системе, равное числу узлов в решетке), а величина  $\Delta\Phi$  определяет энергию смешения для твердого бинарного раствора ( $E_{см} = \Delta\Phi / 2$ ),  $\Phi_{\mu\nu}$  – потенциал взаимодействия атомов сортов  $\mu$  и  $\nu$ , расположенных в ближайших соседних узлах решетки (приближение ближайших соседей).

Выражение для свободной энергии  $F$  системы, как известно из термодинамики, имеет вид

$$F = U - TS, \quad (9)$$

где  $U$  и  $S$  – внутренняя энергия и энтропия системы соответственно.

В приближении центрального взаимодействия и при учете взаимодействия только с ближайшими соседями (расположенными на первой координационной сфере радиуса  $r$ ) внутренняя энергия  $U$  бинарного сплава имеет вид

$$U = \frac{1}{2} ZM \{ P_{aa} \Phi_{aa} + P_{bb} \Phi_{bb} + 2P_{ab} \Phi_{ab} \}, \quad (10)$$

где  $Z$  – первое координационное число.

Энтропия  $S$  такой системы представляется в виде [10, 11]

$$S = S_{ид} + \Delta S \approx k(M \ln M - M_a \ln M_a - M_b \ln M_b). \quad (11)$$

Здесь  $S_{ид}$  – энтропия идеальной бинарной системы (сплава), а величина  $\Delta S = 0$  для регулярных твердых растворов.

Поскольку атомы в описываемом приближении считаются фиксированными в узлах решетки (решеточная модель), то это означает, что амплитуды колебаний атомов малы, т. е. функции распределения сильно локализованы вблизи узлов и в общих статистических уравнениях и формулах (1)–(5) их можно заменить на дельта-функции.

**Основная часть.** Учитывая вышеизложенное, воспользуемся общим статистическим выражением для функционала свободной энергии неоднородной двухкомпонентной системы частиц сортов  $a$  и  $b$ , которое получено в рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода с учетом вакантных ячеек (вакансий):

$$F\{n_i^\varepsilon\} = -\theta \left\{ \sum_{i=1}^M n_i^\varepsilon \ln \omega_i - \sum_{i=1}^M \left[ \sum_{\mu=a,b,v} n_i^\mu \ln \frac{Q_i^\mu}{n_i^\mu} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \sum_{\mu, \nu=a,b,v} n_{ij}^{\mu\nu} \ln \frac{Q_{ij}^{\mu\nu} n_i^\mu n_j^\nu}{Q_i^\mu Q_j^\nu n_{ij}^{\mu\nu}} \right] \right\}, \quad (12)$$

$\mu, \nu, \varepsilon = a, b, l.$

При описании однородного бездефектного бинарного твердого (кристаллического) раствора примем во внимание, что числа заполнения  $n_i^\mu$  и  $Q_i^\mu$  для частиц сорта  $\mu = a, b$  не зависят от номеров ячеек ( $n_i^\mu = n_\mu$ ), а числа  $n_i^l = 0$ , т. к. отсутствуют вакансии. В этом случае в приближении ближайших соседей выражение (12) упрощается и принимает следующий вид:

$$F(n) = \theta M \left\{ n \ln \frac{Q_a}{n} + (1-n) \ln \frac{Q_b}{1-n} + \frac{Z}{2} \left( n_{aa} \ln \frac{n^2 Q_{aa}}{n_{aa} Q_a^2} + n_{bb} \ln \frac{(1-n)^2 Q_{bb}}{n_{bb} Q_b^2} + 2n_{ab} \ln \frac{n(1-n) Q_{ab}}{n_{ab} Q_a Q_b} \right) \right\}, \quad (13)$$

где величины  $Q_i^\mu \equiv Q_\mu$  и  $Q_{ij}^{\mu\nu} \equiv Q_{\mu\nu}$  для двух ближайших ячеек определяются по формулам (3), (4) при  $\mu, \nu = a, b$ , числа заполнения  $n_a = n$  определяют концентрацию частиц сорта  $a$  для однородного бинарного кристаллического сплава, а двухъячеечные числа  $n_{\mu\nu}$  заполнения соседних пар ближайших ячеек определяются следующими соотношениями [7, 9]:

$$n_{aa} = n - n_{ab}, \quad n_{bb} = 1 - n - n_{ab}, \quad (14)$$

$$n_{ba} = 1 - n - n_{bb},$$

$$n_{ab} = \frac{1}{2} \left\{ -A^{-1} + \sqrt{(-A^{-1})^2 + 4n_a n_b A_{ij}^{-1}} \right\}, \quad (15)$$

$$A = Q_{aa} Q_{bb} / Q_{ab} Q_{ba} - 1. \quad (16)$$

Для однородной бинарной решеточной системы, в которой атомы сортов  $a$  и  $b$  статистически распределены по узлам решетки, величины  $Q_{\mu\nu}$  удовлетворяют следующим условиям, которые вытекают из общих выражений (4) после усреднения с помощью дельта-функций:

$$Q_{\mu\nu} \sim \exp \left\{ -\frac{\Phi_{\mu\nu} + (Z-1)\Phi_\mu(0) + (Z-1)\Phi_\nu(0)}{\theta} \right\}. \quad (17)$$

В результате бинарный коррелятор  $A$  с учетом условий (17) для решеточной системы в приближении ближайших соседей после соответствующих сокращений примет следующий вид:

$$A = \exp \left\{ -\frac{\Phi_{aa} + \Phi_{bb} - 2\Phi_{ab}}{\theta} \right\} - 1 = \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} \Delta\Phi \right\} - 1. \quad (18)$$

Выражение (15) для вероятности  $n_{ab} = n_{ba}$  заполнения пар соседних узлов перепишем в следующем виде:



$$n_{ab} = \frac{1}{2A_{ij}} \left\{ -1 + \sqrt{1 + 4n_a n_b A} \right\}. \quad (19)$$

Разложив квадратный корень в выражении (19) в ряд Маклорена по  $x = 4n_a n_b A$ , учтем первые три члена этого разложения:

$$\begin{aligned} n_{ab} &\approx \frac{1}{2A} (-1 + 1 + 2n_a n_b A - 4n_a^2 n_b^2 A^2) = \\ &= n_a n_b - 2n_a^2 n_b^2 A. \end{aligned} \quad (20)$$

В выражении (18) для коррелятора  $A$  разложим экспоненту в ряд Маклорена по  $x = \Delta\Phi/\theta$ , и учтем первые два члена:

$$A \approx 1 - \frac{1}{\theta} \Delta\Phi - 1 = -\frac{1}{\theta} \Delta\Phi. \quad (21)$$

В результате окончательные выражения для вероятностей  $n_{\mu\nu}$  заполнения пар соседних узлов примут вид:

$$n_{ab} = n_a n_b (1 + n_a n_b \Delta\Phi / \theta), \quad (22)$$

$$n_{aa} + n_{ab} = n_a, \quad n_{bb} + n_{ba} = n_b. \quad (23)$$

Полученные в рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода выражения (22), (23) для вероятностей заполнения соседних пар ячеек в случае однородной решеточной системы совпадают с соответствующими выражениями (6), (7) для вероятностных функций  $P_{\mu\nu}$  двух ближайших узлов в решеточной модели в приближении взаимодействия только с ближайшими соседями.

**Сопоставление термодинамических характеристик бинарной системы в развиваемом подходе и решеточного бинарного сплава.** Проведем сопоставление выражения для свободной энергии бинарного бездефектного сплава, состоящего из атомов двух сортов  $a$  и  $b$  [10, 11], с аналогичным выражением, полученным в рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода для однородной системы без вакансий. Для этого рассмотрим бинарный сплав  $a$ - $b$ , имеющий идеальную кристаллическую решетку, в которой все  $M$  узлов заняты атомами. Учтем, что концентрации  $c_a$  и  $c_b$  атомов сорта  $a$  и  $b$ , соответственно, определяются выражениями:

$$c_a = M_a / M, \quad c_b = M_b / M, \quad c_a + c_b = 1. \quad (24)$$

Выражение (11) для энтропии  $S$  регулярного бинарного сплава преобразуем с учетом соотношения (24):

$$\begin{aligned} S &= kM (\ln M - c_a \ln(c_a M) - c_b \ln(c_b M)) = \\ &= -kM (c_a \ln c_a + c_b \ln c_b). \end{aligned} \quad (25)$$

В результате выражение для свободной энергии сплава с учетом выражений (9), (10), (25) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} F &= U - TS \approx \\ &\approx M \left[ \frac{1}{2} Z (P_{aa} \Phi_{aa} + P_{bb} \Phi_{bb} + 2P_{ab} \Phi_{ab}) + \right. \\ &\quad \left. + kT (c_a \ln c_a + c_b \ln c_b) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Для сопоставления выражения (13) для свободной энергии однородной бинарной системы без вакансий, полученного в рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода, с выражением (26) учтем, что при понижении температуры амплитуды колебаний атомов вблизи узлов кристаллической решетки уменьшаются, т. е. функции распределения становятся сильно локализованными вблизи узлов. Поэтому, если соответствующие усреднения выполнить с помощью дельта-функций, то для решеточной системы в приближении ближайших соседей получим:

$$\begin{aligned} Q_a &\sim \exp \left\{ -\frac{Z}{\theta} \phi_a(0) \right\}, \\ Q_b &\sim \exp \left\{ -\frac{Z}{\theta} \phi_b(0) \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{Q_{\mu\nu}}{Q_\mu Q_\nu} &\sim \\ &\sim \frac{\exp \left\{ -(\Phi_{\mu\nu} + (Z-1)\phi_\mu(0) + (Z-1)\phi_\nu(0)) / \theta \right\}}{\exp \left\{ -(Z\phi_\mu(0) + Z\phi_\nu(0)) / \theta \right\}} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} (\Phi_{\mu\nu} - \phi_\mu(0) - \phi_\nu(0)) \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда выражение (13) для свободной энергии однородной бинарной системы примет следующий вид:

$$\begin{aligned} F(n) &= M \left[ \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^M n_{ij}^{\mu\nu} \Phi_{ij}^{\mu\nu} + \theta [n \ln n + \right. \\ &\quad \left. + (1-n) \ln(1-n) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^M \sum_{\mu, \nu=a, b} n_{ij}^{\mu\nu} \ln \frac{n_{ij}^{\mu\nu}}{n_i^\mu n_j^\nu} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

**Заключение.** Можно отметить, что выражение (29) для свободной энергии, полученное в развиваемом двухуровневом молекулярно-статистическом подходе, содержит величину

$$\Delta S = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^M \sum_{\mu, \nu=a, b} n_{ij}^{\mu\nu} \ln \frac{n_{ij}^{\mu\nu}}{n_i^\mu n_j^\nu},$$

которая для однородного регулярного бинарного сплава равна нулю.

### Литература

1. Наркевич И. И. Молекулярно-статистическая теория неоднородных конденсированных сред: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.14. СПб., 1993. 242 л.
2. Физика простых жидкостей. Статистическая теория / Под ред. Г. Темперли, Дж. Роулинсона, Дж. Рашбрука. М: Мир. 1971. 308 с.
3. Крокстон К. Физика жидкого состояния. Статистическое введение. М.: Мир, 1978. 400 с.
4. Ротт Л. А. Статистическая теория молекулярных систем. М.: Наука, 1979. 280 с.
5. Evans R. The nature of liquid-vapour interface and other topics in the statistical mechanics of non-uniform, classical fluids // *Advances in Physics*. 1979. Vol. 28, no. 2. P. 143–200.
6. Abraham F. F. On the thermodynamics, structure and phase stability of the nonuniform fluid state // *Physics reports*. 1979. Vol. 53, no. 2. P. 93–156.
7. Наркевич И. И. Метод множителей Лагранжа в проблеме нормировки коррелятивных функций многокомпонентного кристалла с вакансиями // *Высокочистые вещества*. 1990. № 1. С. 67–75.
8. Наркевич И. И., Фарафонтова Е. В. Единая статистическая модель кристаллического, жидкого и газообразного состояний вещества // *Вести НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук*. 2011. № 3. С. 71–79.
9. Наркевич И. И. Интегральное уравнение для потенциалов средних сил и свободная энергия однокомпонентной неоднородной системы в рамках двухуровневого молекулярно-статистического метода // *Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика*. 2017. № 1 (194). С. 32–38.
10. Боровский И. Б., Гуров К. П., Марчукова И. Д., Угасте Ю. Э. Процессы взаимной диффузии в сплавах. М.: Наука, 1973. 360 с.
11. Гуров К. П. Упорядочение атомов и его влияние на свойства сплавов. Киев: Наукова думка, 1968. 68 с.

### References

1. Narkevich I. I. *Molekulyarno-statisticheskaya teoriya neodnorodnykh kondensirovannykh sred. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk* [Molecular-statistical theory of the non-homogeneous condensed matter. Doct. Diss.]. St. Petersburg, 1993. 242 p.
2. *Fizika prostykh zhidkostey. Statisticheskaya teoriya* [Physics of simple liquids. Statistical theory]. Ed. by G. Temperly, G. Rowlinson, G. Rushbrook. Moscow, Mir Publ., 1971. 308 p.
3. Krokston K. *Fizika zhidkogo sostoyaniya. Statisticheskoe vvedenie* [Physics of liquid state. Statistical introduction]. Moscow, Mir Publ., 1978. 400 p.
4. Rott L. A. *Statisticheskaya teoriya molekulyarnykh sistem* [Statistical theory of molecular systems]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 280 p.
5. Evans R. The nature of liquid-vapour interface and other topics in the statistical mechanics of non-uniform, classical fluids. *Advances in Physics*, 1979, vol. 28, no. 2, pp. 143–200.
6. Abraham F. F. On the thermodynamics, structure and phase stability of the nonuniform fluid state. *Physics reports*, 1979, vol. 53, no. 2, pp. 93–156.
7. Narkevich I. I. Lagrange multiplier method in the problem of normalization of the correlation functions of multicomponent crystal with vacancies. *Vysokochistye veshchestva* [High-Purity substances], 1990, no. 1, pp. 67–75 (In Russian).
8. Narkevich I. I., Farafontova E. V. Optional statistical model of crystalline, liquid and gaseous states of matter. *Vesti NAN Belarusi* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus], series Physical-mathematical sciences, 2011, no. 3, pp. 71–79 (In Russian).
9. Narkevich I. I. Integral equations for the potentials secondary forces and free energy inhomogeneous one-component system within two-level molecular-statistical methods. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physical-mathematical sciences, 2017, no. 1 (194), pp. 32–38 (In Russian).
10. Borovskiy I. B., Gurov K. P., Marchukova I. D., Ugaste U. E. *Protsessy vzaimnoy diffuzii v splavakh* [Processes of mutual diffusion in alloys]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 360 p.
11. Gurov K. P. *Uporyadochenie atomov i ego vliyanie na svoystva splavov* [Organization of atoms and its influence on alloy properties]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1968. 68 p.

### Информация об авторе

**Фарафонтова Елена Валерьевна** – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: farafontova@belstu.by

### Information about the author

**Farafontova Elena Valer'yevna** – PhD (Physics and Mathematics), assistant, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: farafontova@belstu.by

Поступила 26.04.2017

УДК 539.1.06:539.23.234

**В. В. Тульев<sup>1</sup>, И. С. Ташлыков<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет<sup>2</sup>Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка**СОСТАВ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ПО ГЛУБИНЕ В ПОКРЫТИЯХ, ПОЛУЧЕННЫХ ИОННО-АССИСТИРУЕМЫМ ОСАЖДЕНИЕМ ТИТАНА И КРЕМНИЯ НА СТАЛЬ МАРКИ 40X**

На подложки из стали марки 40X наносились тонкие пленки на основе титана и титана с кремнием методом ионно-ассистируемого осаждения в вакууме. Для реализации этого метода использовался ионный источник, создающий плазму вакуумного электродугового разряда, в которой одновременно генерируются положительные ионы и нейтральная фракция из материала электродов. Ионно-ассистируемое нанесение покрытий осуществлялось при ускоряющих напряжениях 15 кВ. Плотность ионного тока составляла  $\sim 3\text{--}5$  мкА/см<sup>2</sup>, а интегральный поток облучающих ионов  $(1\text{--}6) \cdot 10^{16}$  ион/см<sup>2</sup>. В рабочей камере в процессе осаждения покрытий поддерживался вакуум при давлении  $\sim 10^{-2}$  Па. Для дополнительного контроля элементного состава осаждаемого на мишень покрытия использовались образцы-свидетели из бериллия.

Элементный состав и распределение элементов по глубине в сформированных на стали и бериллии покрытиях изучались методом Резерфордского обратного рассеяния ионов гелия в сочетании с компьютерным моделированием, методом резонансных ядерных реакций и методом резонансного упругого рассеяния ионов гелия.

Установлено независимыми и взаимодополняющими методами, что в состав покрытий входят атомы осаждаемого материала (10–30 ат. %), атомы железа из подложки (20–30 ат. %), атомы технологических примесей кислорода (10–30 ат. %) и углерода (5–10 ат. %).

**Ключевые слова:** ионно-ассистируемое осаждение, сталь, тонкие пленки, бериллий, кремний, титан.

**V. V. Tul'ev<sup>1</sup>, I. S. Tashlykov<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Belarusian State Technological University<sup>2</sup>Maxim Tank Belarusian State Pedagogical University**THE ELEMENTS COMPOSITION AND DISTRIBUTION BY DEPTH IN COVERINGS OBTAINED WITH THE USE OF ION-BEAM ASSISTED TITANIUM AND SILICON DEPOSITION ON STEEL 40X**

Thin films were applied on steel 40X substrates on the basis of titanium and titanium with silicon using the method of the ion-assisted deposition in vacuum. Ion-assisted deposits were prepared using 15 kV ions irradiation during the deposition on beryllium neutral fraction generated from vacuum arc plasma. The density of ionic current at the deposition of the covering has changed in the range of 3 to 5  $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ , and the ion flow has changed in the range of  $1 \cdot 10^{16}$  to  $6 \cdot 10^{16}$   $\text{cm}^{-2}$ . The deposition of the covering has occurred at the vacuum in the working chamber  $\sim 10^{-2}$  Pa. For additional control of the elemental composition of the coating deposited on the target, beryllium witness samples were used.

Rutherford back scattering and computer simulation RUMP code, and resonant nuclear reactions, and method of resonant elastic scattering of helium ions were applied to investigate the elemental composition and distribution of elements along the depth of the formed covering.

With the help of independent and complementary methods it was found that the covering composition includes atoms of the deposited material (10–30 at. %), atoms of Fe from the substrate (20–30 at. %), atoms of technological impurity oxygen (10–30 at. %) and carbon (5–10 at. %).

**Key words:** ion-beam assisted deposition, steel, thin film, beryllium, titanium, silicon.

**Введение.** Ионно-ассистируемое осаждение покрытий позволяет одновременно в процессе осаждения пленки облучать ускоренными ионами поверхность формируемой структуры. При таком нанесении покрытий происходит перемешивание атомов поверхностного слоя мишени с атомами осаждаемого покрытия, в результате чего формируется покрытие с высо-

кой степенью адгезии к основе [1–3]. Для реализации этого метода использовался резонансный вакуумно-дуговой ионный источник [4]. При осаждении элементов из вакуумно-дуговой плазмы, в состав покрытия входят технологические примеси – кислород и углерод [4–6]. Источником этих примесей является летучая фракция вакуумного масла паромасляного диффузионного

насоса, используемого для создания вакуума. Для определения элементного состава и распределения элементов по глубине в сформированных структурах используется метод резерфордовского обратного рассеяния ионов гелия. В ряде случаев, когда подложка состоит из тяжелых атомов (например, Fe, Mo, W и др.), определение и количественный расчет легких примесей (C, O) затруднен из-за слабого сигнала от этих элементов на фоне сигнала от подложки. В данной работе для установления содержания технологических примесей C и O в сформированных покрытиях, использовались, помимо резерфордовского обратного рассеяния, и другие ядерно-физические методы исследования твердых тел.

**Основная часть.** В качестве материала подложки использовалась сталь марки 40X. Образцы для осаждения покрытий были изготовлены в виде цилиндров диаметром 12 мм и толщиной 2–3 мм, которые шлифовались на наждачном круге разной зернистости, а затем подвергались полированию с применением окиси хрома и алмазных паст. После полировки образцы отжигались при  $t = 900^\circ\text{C}$  в течение 1,5 ч и охлаждались на воздухе. Ионно-ассистируемое осаждение титана и титана с кремнием осуществлялось при ускорителем напряжении  $U = 15$  кВ. Плотность ионного тока составляла  $\sim 3\text{--}5$  мкА/см<sup>2</sup>, а интегральный поток ассистирующих ионов –  $(1\text{--}6) \cdot 10^{16}$  ион/см<sup>2</sup>. В рабочей камере в процессе осаждения поддерживался вакуум при давлении  $\sim 10^{-2}$  Па. В эксперименте осаждались покрытия одновременно на стальные образцы и на образцы-свидетели из бериллия. Этот прием в силу малой массы атомов бериллия позволит, применяя метод резерфордовского обратного рассеяния, контролировать состав осаждаемого на мишень покрытия по всем элементам (кроме водорода) [7].

Изучение элементного состава сформированных структур методом резерфордовского обратного рассеяния (РОР) ионов гелия проводился при следующих параметрах: энергия ионов гелия  $E_0 = 1,5$  МэВ, угол рассеяния  $\theta = 145^\circ$ , угол влета  $\theta_1 = 40^\circ$  и угол вылета  $\theta_2 = 80^\circ$ . Относительная погрешность  $\epsilon$  при определении слоевого содержания рассеивающих атомов составляла порядка 5%. Спектры РОР ионов гелия от образца из стали марки 40X до и после ионно-ассистируемого осаждения титана представлены на рис. 1.

На спектре РОР для образца с осажденным покрытием наблюдается сдвиг сигнала от атомов железа в сторону меньших номеров каналов. Такой эффект свидетельствует о появлении тонкой пленки на поверхности образцов. Этот сдвиг составляет  $\sim 12$  каналов, что соответствует толщине покрытия  $\sim 10\text{--}11$  нм. Также

на сигнале от атомов железа наблюдается ступенька, что свидетельствует о наличии в покрытии легких примесей. Стрелочками в интервале 70–100 каналов показаны области выхода обратно рассеянных ионов гелия от атомов углерода и кислорода соответственно. Как видно из спектра РОР (рис. 1), достоверно определить сигналы от атомов углерода и кислорода не представляется возможным. Для определения слоевых концентраций этих элементов было проведено моделирование экспериментальных спектров РОР с применением программы RUMP [8]. Полученные данные об элементном составе и распределении элементов по глубине представлены на рис. 2.

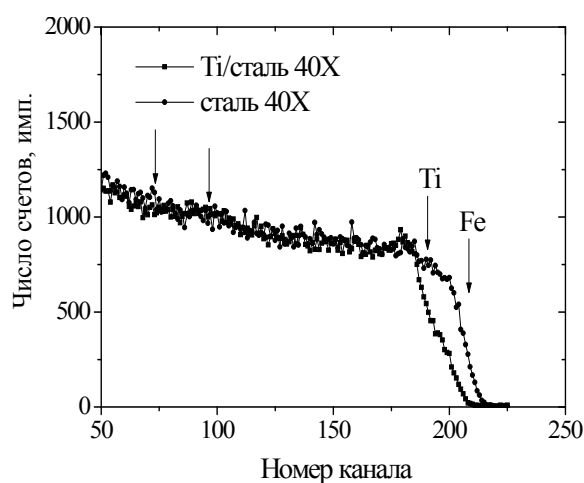


Рис. 1. Спектры РОР ионов гелия от образца из стали марки 40X до и после осаждения титана

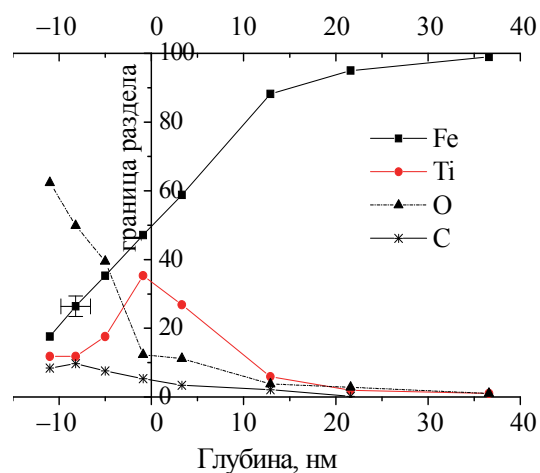


Рис. 2. Концентрационные профили распределения элементов по глубине в стали марки 40X после осаждения

Из рис. 2 видно, что в состав осажденного покрытия на образец из стали марки 40X входят атомы осажденного металла (титана), атомы кислорода и углерода, а атомы железа – из подложки. Максимум профиля распределения

титана находится на глубине в области межфазной границы. Пространственное распределение кислорода имеет явно выраженный максимум на поверхности и не согласуется с глубинным профилем титана. Содержание кислорода в приповерхностной области подложки толщиной 10 нм отвечает приблизительному составу  $Me(Ti,Fe)O_2$ . Распределение углерода характеризуется наибольшей концентрацией в области покрытия (~8 ат. %), и последующим снижением концентрации в стальной подложке до 1 ат. % на глубине 20 нм.

На рис. 3 представлены спектры РОР ионов гелия от образцов-свидетелей из бериллия, снятые до и после ионно-ассистируемого осаждения титана и титана с кремнием.

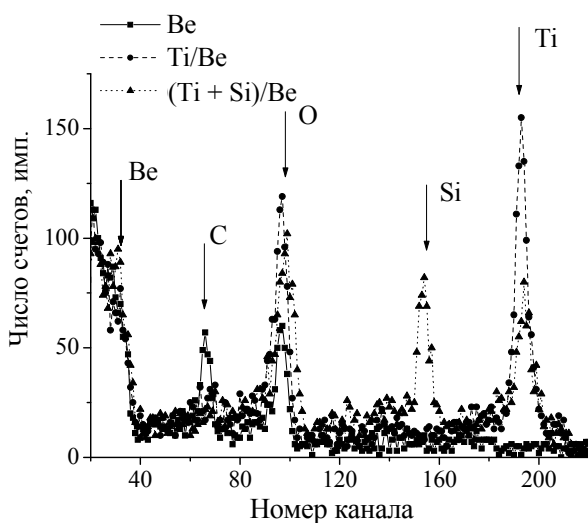


Рис. 3. Спектры РОР ионов гелия от образцов-свидетелей из бериллия, снятые до и после осаждения покрытий на основе Ti и Ti + Si

Соответствующие сигналы на спектрах РОР от бериллиевых образцов (рис. 3) свидетельствуют о том, что осажденные на бериллий покрытия содержат атомы материалов основы покрытия (Ti, Ti + Si), атомы технологических примесей O и C, атомы бериллия из подложки. Этот факт косвенно подтверждает данные о наличии в сформированных на стали марки 40X покрытиях атомов углерода и кислорода, полученные при моделировании спектров РОР от стальных образцов с осажденным покрытием (рис. 2). При обработке спектров от образцов из бериллия были рассчитаны слоевые концентрации элементов покрытия. Данные представлены в таблице.

Из представленных данных следует, что на поверхности исходного бериллия содержатся кислород и углерод примерно в равной слоевой концентрации, которая составляет  $(2,4-2,5) \cdot 10^{16}$  ат/см<sup>2</sup>. Поэтому можно считать, что одним из источников углерода в осаждаемых покрытиях явля-

ется углерод на исходной поверхности матрицы, так как его содержание в покрытии по сравнению с исходными образцами практически не изменяется (таблица). В то же время установлено, что содержание кислорода в покрытии увеличивается с ростом интегрального потока ассистирующих ионов. Поэтому можно считать, что дополнительным источником кислорода в осажденных покрытиях являются остаточные газы в вакуумной камере [4, 6].

**Слоевые концентрации элементов в покрытиях, сформированных на Be, при различных интегральных потоках ассистирующих ионов**

Образец	$\Phi, 10^{16} \text{ см}^{-2}$	Слоевые концентрации, $10^{16} \text{ ат/см}^2$			
		C	O	Si	Ti
Be	–	2,5	2,4	–	–
Ti/Be	1,0	2,5	9,1	–	1,1
	2,0	2,6	6,5	–	1,2
	6,0	2,3	5,3	–	2,8
(Ti + Si)/Be	2,0	2,4	4,9	0,5	0,3
	3,0	2,9	6,8	0,9	0,5
	6,0	2,2	7,1	1,6	0,7

Для непосредственного установления наличия углерода в сформированных покрытиях были проведены эксперименты с применением метода резонансных ядерных реакций. Для этого использовалась резонансная ядерная реакция  $^{12}\text{C}(p,\gamma)^{13}\text{N}$ . Профиль концентрации углерода в модифицированном образце определялся с помощью измерения выхода  $\gamma$ -квантов с энергией 2,36 МэВ из резонансной ядерной реакции  $^{12}\text{C}(p,\gamma)^{13}\text{N}$  при энергии протонов больше 0,4 МэВ.

Экспериментальные результаты, полученные от образца с осажденным (Ti + Si) покрытием на сталь марки 40X, представлены на рис. 4.

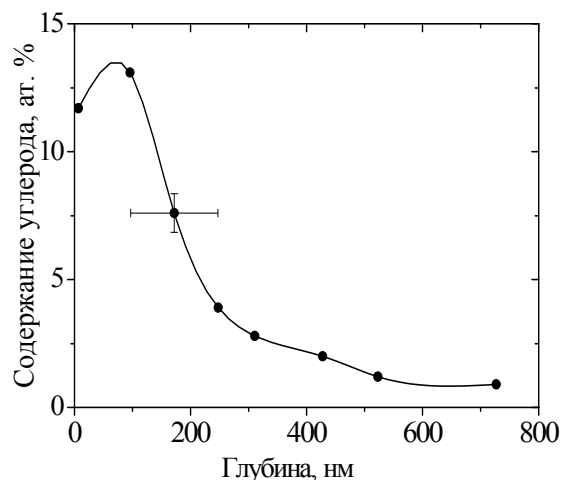


Рис. 4. Концентрационный профиль распределения углерода по глубине в стали марки 40X после осаждения титана с кремнием

Они подтверждают данные моделирования RUMP о наличии углерода в покрытии, осажденном на сталь. Причем профиль распределения углерода по глубине в сформированном покрытии, полученный методом резонансных ядерных реакций, качественно подобен профилю, полученному моделированием спектра РОР (рис. 2).

Содержание кислорода в покрытии определялось методом резонансного упругого рассеяния ионов He на ядрах  $^{16}\text{O}$  при энергии 3,047 МэВ. Эксперимент показал, что слоевая концентрация кислорода в покрытии составляет  $\sim 5 \cdot 10^{16}$  ат/см<sup>2</sup>, а толщина оксидного слоя  $\sim 5$  нм.

**Заключение.** Исследования методами резерфордовского обратного рассеяния ионов гелия в сочетании с компьютерным моделирова-

нием RUMP, резонансных ядерных реакций и методом резонансного упругого рассеяния ионов He показали, что при нанесении покрытий на основе титана и титана с кремнием на сталь марки 40Х методом ионно-ассистируемого осаждения при ускоряющей разности потенциалов 15 кВ и с интегральными потоками  $(1-6) \cdot 10^{16}$  ион/см<sup>2</sup>, формируются тонкопленочные структуры толщиной  $\sim 10$  нм, содержащие атомы осаждаемого материала Ti и Si, атомы технологических примесей С и О, атомы Fe из подложки.

Установлено независимыми и взаимодополняющими методами, что в состав покрытий входят атомы осаждаемого материала (10–30 ат. %), атомы Fe из подложки (20–30 ат. %), атомы технологических примесей кислорода (10–30 ат. %) и углерода (5–10 ат. %).

### Литература

1. Тульев В. В., Касперович А. В. Элементный состав, структура и фрикционные характеристики поверхности резины, модифицированной ионно-ассистируемым осаждением покрытий на основе Mo, W // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. 2009. Вып. XVII. С. 54–56.
2. Структура, термостойкость и микротвердость покрытий ZrO<sub>2</sub>, полученных разными методами / С. Г. Валухов [и др.] // Неорганические материалы. 2016. Т. 52. № 4. С. 457–463.
3. Трегубов И. М., Смолякова М. Ю., Каширин М. А. Адгезионная прочность композитных покрытий на основе железа // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2017. Т. 13. № 2. С. 92–96.
4. Бобрович О. Г., Тульев В. В. Анализ композиционного состава и химических связей элементов металлосодержащих (Zr,W) покрытий // Физика. Известия высших учебных заведений. 2011. № 1/3. С. 350–354.
5. Формирование состава приповерхностных слоев углеродистой стали в зависимости от ускоряющего напряжения импульсного облучения ионами Cr<sup>+</sup> / В. Л. Воробьев [и др.] // Химическая физика и мезоскопия. 2014. Т. 16. № 2. С. 257–462.
6. Implantation of titanium, chromium, yttrium, molybdenum, silver, hafnium, tantalum, tungsten and platinum ions generated by a metal vapour vacuum ion source into 440C stainless steel / J. Sasaki [et. al.] // Surf. Coat. Technol. 1992. Vol. 51. P. 166–175.
7. Тульев В. В., Ташлыков И. С. Элементный состав и распределение компонентов по глубине в структурах Me/Be, полученных методом ионно-ассистируемого осаждения // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физико-математические науки и информатика. С. 107–111.
8. Doolittle L. R. A semiautomatic algorithm for rutherford backscattering analysis // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 1986. Vol. B15. P. 227–234.

### References

1. Tul'ev V. V., Kasperovich A. V. Element composition, structure and friction characteristics of rubber surface modified by ion-assisted deposition of coatings based on Mo, W. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physical-mathematical sciences and informatics, 2009, issue VII, pp. 54–56 (In Russian).
2. Valyuhov S. G., Stognej O. V., Filatov M. S., Kashirin M. A. Structure, thermal resistance and microhardness of ZrO<sub>2</sub> coatings obtained by different methods. *Neorganicheskie materialy* [Inorganic Materials], 2016, vol. 52, no. 4, pp. 457–463 (In Russian).
3. Tregubov I. M., Smolyakova M. Yu., Kashirin M. A. The adhesion strength of the composite coatings based iron. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Voronezh State Technical University], 2017, vol. 13, no. 2, pp. 92–96 (In Russian).
4. Bobrovich O. G., Tul'ev V. V. Analysis of composite composition and chemical bonds of metal elements (Zr, W) of coatings. *Fizika. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy* [Russian Physics Journal], 2011, no. 1/3, pp. 350–354 (In Russian).
5. Vorobiev V. L., Bykov P. V., Bayankin V. Ya., Novoselov A. A., Bureev O. A., Shushkov A. A., Vakhrushev A. V. Composition of surface layers of carbon steel depending on accelerating voltage pulse

Cr<sup>+</sup> ion radiation. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya* [Chemical physics and mesoscopy], 2014, vol. 16, no. 2, pp. 257–262 (In Russian).

6. Sasaki J., Hayashi K., Sugiyama K., Ichiko O., Hashiguchi Y. Implantation of titanium, chromium, yttrium, molybdenum, silver, hafnium, tantalum, tungsten and platinum ions generated by a metal vapour vacuum ion source into 440C stainless steel. *Surf. Coat. Technol.*, 1992, vol. 51, pp. 166–175.

7. Tul'ev V. V., Tashlykov I. S. Elemental composition and depth distribution of components of structures me/be constructed by ion-beam assisted deposition. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physical-mathematical science and informatics, pp. 107–111 (In Russian).

8. Doolittle L. R. A semiautomatic algorithm for rutherford backscattering analysis. *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.*, 1986, vol. B15, pp. 227–234.

#### Информация об авторах

**Тул'ев Валентин Валентинович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tvv69@mail.ru

**Ташлыков Игорь Серафимович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики. Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка (220050, Минск, ул. Советская, 18, Республика Беларусь). E-mail: tashl@bspu.unibel.by

#### Information about the authors

**Tul'ev Valentin Valentinovich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tvv69@mail.ru

**Tashlykov Igor Serafimovich** – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Professor, the Department of Physics. Maxim Tank Belarusian State Pedagogical University (18, Sovetskaya str., 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tashl@bspu.unibel.by

Поступила 14.04.2017

УДК 537.633.2

**В. Р. Мадьяров**

Белорусский государственный технологический университет

**БЕСКОНТАКТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ  
ПОЛУПРОВОДНИКОВ В СВЧ-ДИАПАЗОНЕ**

Для исследования электронных свойств полупроводников применяются бесконтактные методы на основе зондирования излучением сверхвысоких частот. Во многих бесконтактных методах определения подвижности или эффективной массы носителей заряда в полупроводниках (например, с помощью магнитооптических эффектов) необходимо знать удельную проводимость и диэлектрическую проницаемость образца в постоянном поле или на низких частотах. Эти параметры следует измерять, не прибегая к формированию электрических контактов в образце. В данной работе предложена методика определения удельной проводимости и диэлектрической проницаемости кремниевых пластинок с помощью интерферометрических измерений фазового сдвига и коэффициента пропускания зондирующего излучения. Измерения фазового сдвига проводились с использованием фазовращателя интерферометра. Удельная проводимость определялась по величине коэффициента пропускания излучения с учетом многократных внутренних отражений от граней кристаллического образца. Коэффициенты отражения и затухания зондирующего излучения измерялись для двух образцов слаболегированного кремния с различной толщиной. Из-за конечной проводимости измеренное значение коэффициента отражения оказывается несколько выше значения, полученного путем расчета по формуле, обычно применяемой для границы раздела с непроводящей диэлектрической средой. Зависимость коэффициента отражения от температуры близка к линейно возрастающей. Измеренная зависимость удельной проводимости от температуры в диапазоне 290–350 К хорошо согласуется с расчетными данными в предположении больцмановского распределения носителей заряда с учетом внутренних отражений от граней зондируемого образца.

**Ключевые слова:** бесконтактные измерения, волны миллиметрового диапазона, удельная проводимость, коэффициент пропускания, диэлектрическая проницаемость.

**V. R. Madiarov**

Belarusian State Technological University

**CONTACTLESS MEASUREMENT OF ELECTRIC PARAMETERS  
OF SEMICONDUCTORS IN A MICROWAVE RANGE**

Contactless methods using microwave probing radiation are used to study the electronic properties of the semiconductors. In many such methods (for example, using magnetooptic effect) the specific conductivity and stationary or low frequency dielectric permeability data of the sample must be known to obtain the mobility or effective mass values of the semiconductor charge carriers. These parameters must be measured without forming ohmic contacts at the sample. In the present paper the technique is proposed to measure the specific conductivity and dielectric permeability of the silicon wafers based on the measurements of phase shift and transmission coefficient of the probing radiation. The phase shift has been measured using the waveguide phase shifter of the interferometer. Specific conductivity has been obtained by transmission coefficient value of the probing radiation taking into account multiple internal reflections from both lateral sides of the crystal sample. The reflection coefficient and attenuation constant of probing radiation were measured using two samples of lightly doped silicon of different thickness. Because of finite conductivity of the sample the measured value of reflection coefficient appears to be slightly above compared to that obtained by calculation using the usual formula for nonconducting dielectric medium interface. The dependence of reflection coefficient on temperature is found to be close to the linear. The measured dependence of specific conductivity on temperature in temperatures range between 290 and 350 K is in good agreement with the data calculated in the assumption of Boltzmann distribution of charge carriers taking into account multiple internal reflections from lateral sides of the sample.

**Key words:** contactless measurements, microwave range, specific conductivity, transmission factor, dielectric permeability.

**Введение.** Для измерения кинетических параметров полупроводников, таких как время жизни и скорость поверхностной рекомбинации носителей заряда, применяются бесконтактные методы с применением СВЧ-излучения [1, 2].

Информацию о подвижности носителей заряда и времени релаксации дают методы, основанные на применении магнитооптического эффекта или на определении изменений характеристик электромагнитных волн после отражения



или прохождения волны через полупроводник. Для интерпретации данных таких измерений обычно необходимо знать удельную проводимость и диэлектрическую проницаемость исследуемого образца в стационарном поле или на частоте зондирующей волны. Эти параметры целесообразно измерять, не прибегая к формированию электродов на поверхности полупроводникового образца и не нарушая расположения образца по отношению к фронту падающей волны. В данной работе представлены результаты измерений удельной проводимости, диэлектрической проницаемости и коэффициента отражения для образцов *n*-Si с помощью зондирования излучением СВЧ-диапазона.

**Основная часть.** Для определения диэлектрической проницаемости использовались измерения сдвига фазы волны, прошедшей через образец. Удельная проводимость определялась из измерений коэффициента пропускания в СВЧ-области.

Модель, описывающая распространение СВЧ-волны в полупроводнике с напряженностями электрического и магнитного поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , основывается на дифференциальных уравнениях, учитывающих токи проводимости и смещения [3]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial(\mu_0 \vec{H})}{\partial t} = -i\omega\mu_0 \vec{H}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} = i\omega\epsilon\epsilon_0 \vec{E} + \sigma \vec{E}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $\omega$  – частота зондирующего излучения;  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость полупроводниковой среды образца;  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная;  $\sigma$  – удельная проводимость.

Удельная проводимость среды, в которой распространяется волна с частотой  $\omega$ , определяется соотношением, полученным в приближении сферических энергетических поверхностей:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad (2)$$

где  $\tau$  – время релаксации носителей заряда. В области частот до  $\sim 100$  ГГц выполняется условие  $(\omega\tau)^2 \ll 1$ . Поэтому в данном диапазоне можно пренебречь зависимостью удельной проводимости и диэлектрической проницаемости от частоты, а поглощение зондирующей волны обусловлено главным образом свободными носителями [4].

В измерениях коэффициента пропускания использовался плоский образец, на который направлялась волна  $H_{10}$ , распространяющаяся в прямоугольном металлическом волноводе. Измеряемыми параметрами являются изменение фазы волны  $\Delta\varphi$ , зависящее от  $\epsilon$ , и результи-

рующее затухание  $\beta$  при прохождении образца толщиной  $d$ . Изменение фазы определялось с помощью фазовращателя интерферометра, а значение  $\beta$  – из измерений коэффициента затухания  $\alpha$ . Изменение фазы волны  $\Delta\varphi$  и затухание волны  $\beta$  выражаются формулами:

$$\Delta\varphi = (k - k_0)d, \quad \beta = \alpha d. \quad (3)$$

В формулах (3)  $k$  и  $k_0$  – соответственно волновые числа для волны, распространяющейся в плече интерферометра, содержащем полупроводник, и в свободном плече (где  $\sigma \approx 0$ ). Выражение для постоянной распространения  $\gamma$ , которое следует из решения уравнений (1), содержит комплексную проницаемость  $\epsilon^*$ :

$$\gamma = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon^* - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}, \quad (4)$$

где  $\lambda$  – длина волны зондирующего излучения;  $a$  – ширина волновода.

Для большинства полупроводников (Si, Ge, GaAs, CdS и др.) значения  $\epsilon$  лежат в пределах от 12 до 20, а отношение  $\lambda/2a < 1$ , так как  $\lambda < \lambda_c$ , где  $\lambda_c = 2a$  – критическая длина волны  $H_{10}$ . Поэтому можно считать  $\epsilon \gg \lambda/2a$ , а формулу (4) можно упростить и после выделения вещественной и мнимой частей  $\gamma$  получить следующие соотношения для  $k$  и  $\alpha$ :

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} F_+(s), \quad \alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} F_-(s), \quad (5)$$

где параметр  $s = \sigma(\epsilon\epsilon_0\omega)^{-1}$ ,  $c$  – скорость света в вакууме. С учетом первого из соотношений (3) формула для фазового сдвига  $\Delta\varphi$  волны, прошедшей полупроводник толщиной  $d$ , примет вид

$$\Delta\varphi = \frac{\omega d}{c} \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} (F_+(s) - 1). \quad (6)$$

Из соотношений (5) следует система уравнений относительно  $\sigma$  и  $\epsilon$ :

$$F_+^2(s) - F_-^2(s) = 2, \quad F_+(s)F_-(s) = s. \quad (7)$$

Решая систему уравнений (7) и используя (6), можно получить соотношения, устанавливающие связь между измеряемыми значениями фазового сдвига и коэффициента затухания с удельной проводимостью и диэлектрической проницаемостью:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c\Delta\varphi\sqrt{2}}{\omega d} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha c}{\omega} \right)^2, \\ \sigma &= 2c\epsilon_0\alpha \sqrt{\epsilon + \left( \frac{\alpha c}{\omega} \right)^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

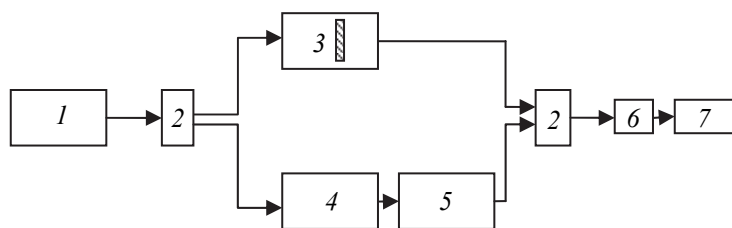


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1 – СВЧ-генератор (Г4-142); 2 – разветвитель; 3 – образец; 4 – аттенуатор; 5 – образцовый фазовращатель; 6 – приемник (термопара); 7 – микровольтметр Ф136

На рис. 1 представлена схема основных узлов экспериментальной установки.

Зондирующая волна через волновод подавалась в разветвитель, а после него – на секцию с образцом и на фазовращатель. Выравнивание амплитуд прошедшей волны в обоих плечах обеспечивалось с помощью аттенуатора. Прошедшее излучение регистрировалось полупроводниковой термопарой, подключенной к микровольтметру Ф136 с предельной чувствительностью 100 нВ/дел. Значение диэлектрической проницаемости рассчитывалось по измеренному фазовому сдвигу  $\Delta\varphi$  прошедшей волны по формулам (8). Значение  $\Delta\varphi$  определялось по шкале фазовращателя при появлении минимального сигнала с детектора. Точность определения фазового угла составляла около  $0,5^\circ$ . Измерения проводились на образце кремния *n*-типа толщиной  $d = 0,5$  мм.

Коэффициент затухания  $\alpha$  в формулах (8) для однократного прохождения волной образца определялся по измеренному значению коэффициента пропускания  $\chi$ , т. е. отношению интенсивности зондирующего излучения, прошедшего через образец, к интенсивности излучения, падающего на образец:

$$\alpha = \frac{1}{d} \ln \frac{1}{\chi}. \quad (9)$$

Расчет коэффициента пропускания с учетом многократных отражений зондирующей волны от граней образца приводит к формуле [5]:

$$\chi = \frac{(1-\rho)^2}{e^{\alpha d} - \rho^2 e^{-\alpha d}}, \quad (10)$$

где  $\rho$  – коэффициент отражения зондирующего излучения от поверхности образца. Решая уравнение (10) относительно  $\alpha$  и учитывая, что для полупроводников в области частот 10–100 ГГц справедливо неравенство  $\rho^2 e^{-\alpha d} \ll 1$ , получим:

$$\alpha d = 2 \ln \frac{1-\rho}{\chi}. \quad (11)$$

Для определения коэффициентов  $\alpha$  и  $\rho$  применялся дополнительно образец с толщиной

$2d = 1,0$  мм. Оба исследуемых образца вырезались из одной заготовки. Для образцов с толщиной  $d$  и  $2d$  согласно (11) составим систему уравнений относительно коэффициентов  $\alpha$  и  $\rho$ , решение которой дает:

$$\rho = 1 - \frac{\chi_1^2}{\chi_2}, \quad \alpha = \frac{1}{d_1} \ln \frac{\chi_1}{\chi_2}, \quad (12)$$

где  $\chi_1$  и  $\chi_2$  – коэффициенты затухания, измеренные для образцов с толщиной  $d$  и  $2d$ , соответственно.

На рис. 2 представлена зависимость измеренной диэлектрической проницаемости от температуры. Значение  $\epsilon$  при комнатной температуре согласуется с известными данными для кремния ( $\epsilon = 12,4$ ). Наблюдаемое уменьшение диэлектрической проницаемости можно объяснить на основе классической модели электронного переноса носителей заряда. В приближении сферических энергетических поверхностей диэлектрическая проницаемость в области частот  $\omega\tau \ll 1$  определяется выражением

$$\epsilon = \epsilon_s - \frac{\sigma\tau}{\epsilon_0}, \quad (13)$$

где  $\epsilon_s$  – диэлектрическая проницаемость образца в постоянном поле. Слагаемое, содержащее произведение  $(\sigma\tau)$  в формуле (13), растет с температурой. Увеличение удельной проводимости с ростом температуры несколько компенсируется уменьшением времени релаксации.

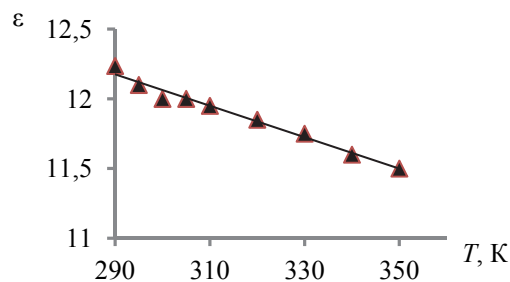


Рис. 2. Зависимость диэлектрической проницаемости *n*-Si от температуры, полученная из измерений фазового сдвига на частоте 60 ГГц

На рис. 3 приведена зависимость удельной проводимости образца от температуры. Значение  $\sigma$  рассчитывалось по формуле (8) для двух значений коэффициента затухания  $\alpha$ , полученных для однократного прохождения излучения через образец ( $d = 1,0$  мм) по формуле (9), и с учетом многократных внутренних отражений, рассчитанных с использованием (12).

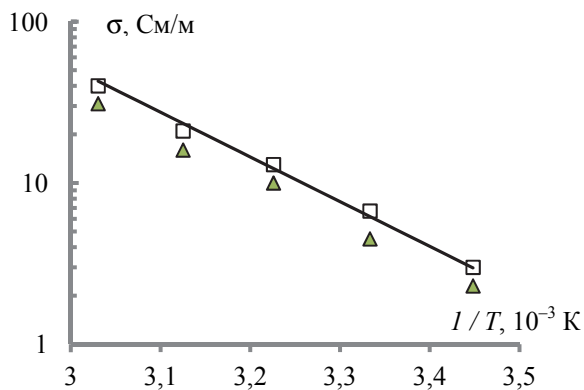


Рис. 3. Зависимость удельной проводимости  $n$ -Si от обратной температуры, полученная из измерений коэффициента пропускания зондирующей волны на частоте 60 ГГц:  $\Delta$  – данные получены без учета внутренних отражений волны от граней образца;  $\square$  – с учетом многократных внутренних отражений; сплошная линия – расчет с использованием бoльцмановского распределения

Данные, полученные с использованием значений коэффициента затухания, найденного по формуле (12) с учетом многократных внутренних отражений, лучше согласуются с температурной зависимостью, рассчитанной с использованием бoльцмановского распределения по формуле

$$\ln \frac{\sigma}{\sigma(T_2)} = -\frac{1}{T} \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{\sigma(T_1)}{\sigma(T_2)}, \quad (14)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  равны 290 и 350 К, соответственно.

Коэффициент отражения  $\rho$  от обеих кремниевых пластин определялся по формуле (12). Зависимость коэффициента  $\rho$  от температуры в диапазоне 290–350 К на частоте зондирующего излучения 60 ГГц близка к линейной (рис. 4).

Данные, полученные для коэффициента  $\rho$ , оказываются несколько выше значения, полученного путем расчета по формуле для отражения от границы раздела с непроводящей диэлектрической средой ( $\rho = 0,31$ ). Для частоты 60 ГГц наблюдается возрастание  $\rho$  с повыше-

нием температуры, которое составляет примерно 15%. Такая же зависимость наблюдалась во всем исследуемом диапазоне частот (от 50 до 75 ГГц) и на образце толщиной 1 мм. Аналогичное увеличение коэффициента отражения в СВЧ-области и его соответствие с теоретическими оценками концентрации свободных носителей заряда отмечалось в работе [6] для частоты 150 ГГц. Очевидно, что наблюдаемое увеличение коэффициента отражения с температурой обусловлено повышением проводимости образца.

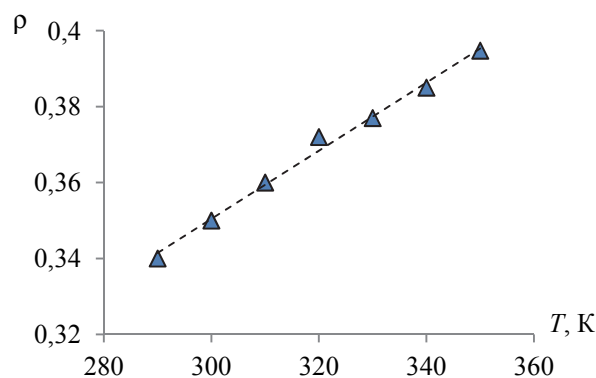


Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения  $n$ -Si от температуры, полученная из измерений коэффициента пропускания на двух образцах (частота 60 ГГц, толщина образца 0,5 мм)

**Заключение.** Предложена методика измерений удельной проводимости и диэлектрической проницаемости полупроводников с удельной проводимостью при комнатной температуре около 100 См/м, в основе которой используется определение коэффициента пропускания и сдвига фазы зондирующего излучения в области частот 50–70 ГГц. Установлено, что в данном диапазоне частот на результаты измерений удельной проводимости заметно влияют внутренние отражения от граней образца  $n$ -Si с толщиной порядка 0,5 мм. Измеренные зависимости удельной проводимости и диэлектрической проницаемости от температуры объясняются классической моделью электронного переноса в полупроводниках в приближении сферических энергетических зон. Значения коэффициента отражения от слаболегированных кремниевых пластин несколько выше предсказываемых по классической формуле для диэлектрических сред. С повышением температуры коэффициент отражения полупроводникового образца увеличивается вследствие роста его удельной проводимости.

### Литература

1. Palais O., Arcari A. Contactless measurement of bulk lifetime and surface recombination velocity in silicon wafers // J. Appl. Phys. 2003. Vol. 93, № 8, P. 4686–4690.

2. Ahrenkiel R. K., Dashdorj J. Interface recombination velocity measurement by a contactless microwave technique // *J. Vac. Sci. and Technol. B.* 2004. № 4. P. 2063–2067.
3. Ансельм А. И. Введение в теорию полупроводников. М.: Наука, 1978. 616 с.
4. Зеегер К. Физика полупроводников. М.: Мир, 1977. 615 с.
5. Murata K., Hanawa A., Nozaki R. Broadband complex permittivity measurement techniques of materials with thin configuration at microwave frequencies // *J. Appl. Phys.* 2005. Vol. 98, № 8. P.084107/1–084107/8.
6. Биленко Д. В., Кац Л. И., Малинин Л. В. Отражение электромагнитной энергии от полупроводников в миллиметровом диапазоне длин волн // *Физика и техника полупроводников.* Т. 3, № 1. 1968. С. 44–47.

### References

1. Palais O., Arcari A. Contactless measurement of bulk lifetime and surface recombination velocity in silicon wafers. *J. Appl. Phys.*, 2003, vol. 93, no. 8, pp. 4686–4690.
2. Ahrenkiel R. K., Dashdorj J. Interface recombination velocity measurement by a contactless microwave technique. *J. Vac. Sci. and Technol. B.*, 2004, no. 4, pp. 2063–2067.
3. Anselm A. I. *Vvedenie v teoriyu poluprovodnikov* [Introduction to the theory of semiconductors]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 616 p.
4. Zeeger K. *Fizika poluprovodnikov* [Physics of semiconductors]. Moscow, Mir Publ., 1977. 615 p.
5. Murata K., Hanawa A., Nozaki R. Broadband complex permittivity measurement techniques of materials with thin configuration at microwave frequencies. *J. Appl. Phys.*, 2005, vol. 98, no. 8, pp. 084107/1–084107/8.
6. Bilenko D. V., Katz L. I., Malinin L. V. Electromagnetic energy reflection from semiconductors in microwave region. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Semiconductor physics and engineering], 1968, vol. 3, no. 1, pp. 44–47 (In Russian).

### Информация об авторе

**Мадьяров Владимир Рафкатович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: Madyarov@belstu.by

### Information about the author

**Madiarov Vladimir Rafkatovich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Madyarov@belstu.by

Поступила 17.04.2017

# ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

---

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

---

УДК 681.53

**Н. М. Олиферович, Д. А. Гринюк, И. О. Оробей**  
Белорусский государственный технологический университет  
**АЛГОРИТМЫ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ  
ДЛЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ  
И ИХ АПРОБАЦИЯ НА ТЕПЛОВОМ ОБЪЕКТЕ**

В статье анализируются возможности использования непрерывной частотной идентификации технологических объектов. Отмечается, что алгоритмы работы системы идентификации могут варьироваться в зависимости от скорости изменения параметров динамики объектов управления. При малых скоростях изменения параметров объекта наиболее стабильно будет давать результат решение с использованием многопериодного усреднения.

В случае, если изменения достаточно быстры, а вычислительные ресурсы микропроцессорной системы управления ограничены, то хорошим решением может быть формирование последовательной серии контрольных гармоник. Для данного решения проанализированы различные варианты формирования серий и их влияние на точность определения. Доказано, что понижение частот контрольных гармоник позволяет уменьшить погрешность идентификации параметров объекта. При переходе на новый цикл измерения для самой высокочастотной гармоники требуется выдержка 6–10 периодов для обеспечения достоверности результатов.

Еще быстрее можно получать данные о параметрах объекта, если формировать воздействие ансамбля контрольных гармоник. Для данного подхода предложены алгоритмы использования с кратными и некратными периодами. На основании численного моделирования сделан вывод о преимуществе использования гармонической идентификации с использованием ансамбля из контрольных гармоник с кратными периодами.

Приведены результаты апробации гармонической идентификации для воздушного теплообменника с использованием метода гармонической идентификации.

**Ключевые слова:** объект управления, амплитудно-частотная характеристика, квадратурный демодулятор, идентификация, гармоническая идентификация.

**N. M. Oliferovich, D. A. Hryniuk, I. O. Orobei**  
Belarusian State Technological University  
**HARMONIC IDENTIFICATION ALGORITHMS  
FOR TECHNOLOGICAL OBJECTS AND THEIR APPROBATION  
ON A THERMAL OBJECT**

The possibilities of using continuous frequency identification of technological objects are analyzed in the article. It is noted that the algorithms of the identification system can vary depending on the rate of change in the parameters of the dynamics of control objects. At low rates of change in the parameters of the object, the solution with multiperiod averaging using will be most stable.

If the changes are fast enough, and the computer power of the microprocessor control system is limited, then a formation of series of control harmonics can be a good solution. For this solution, different variants of series formation and their influence on the accuracy of the determination are analyzed. It is proved that lowering the frequencies of the control harmonics makes it possible to reduce the error in identifying object's parameters. When switching to a new measurement cycle for the highest-frequency harmonic, an exposure of 6–10 periods to ensure the confidence of the results is required.

It is possible to receive data about the parameters of the object even faster, if the effect of the group of control harmonics is formed. For this approach, algorithms for use with multiple and non-multiple periods are proposed. On the basis of numerical modeling, the conclusion about the advantage of using harmonic identification with using of reference harmonic's group with multiple periods is made.

The results of approbation of harmonic identification for air heat exchanger using the method of harmonic identification are presented.

**Key words:** control object, amplitude-frequency characteristic, quadrature demodulator, identification, harmonic identification.

**Введение.** При построении систем управления реальными технологическими процессами актуальной является задача идентификации динамики каналов регулирования и возмущения. Основные вопросы постановки задачи идентификации были сформированы в 70-х годах [1]. С прикладной точки зрения задачей идентификации является получение параметров модели, которая устанавливает связь между основными переменными, характеризующими динамические и статические свойства объекта управления. Существует много типов моделей. Для решения вопросов, связанных с управлением производственным процессом, оператор должен знать параметры модели. Для применения современных систем и теории управления необходимо использовать математические модели, описывающие взаимосвязи между системными переменными в терминах разностных или дифференциальных уравнений. Идентификация системы (процесса) – это область математического моделирования из тестовых или экспериментальных данных.

**Основная часть.** В работе [2] были показаны существенные преимущества использования активной частотной идентификации в сравнении с меандровой в условиях ограничения на отклонения выходного параметра. Сравнение методов проводилось в условиях вычислительного эксперимента в пакете MatLab. Частотная идентификация была реализована с использованием нескольких контрольных гармоник (КГ), параметры которых выбирались исходя из критерия минимизации взаимного влияния КГ вследствие прохождения через квантователь. Для выделения параметров модели применялось классическое решение – усреднение путем использования фильтра низкой частоты с большой постоянной времени. Методика, использованная в [2], применима для объектов, у которых скорость изменения параметров модели значительно меньше, чем полоса пропускания усредняющих фильтров. С другой стороны, фильтры с большой постоянной времени позволяют нивелировать влияние возмущений на объект управления.

Для объектов с быстрой динамикой надо использовать другие подходы. Программируемые логические контроллеры (ПЛК) и другие микропроцессорные средства позволяют в пол-

ной мере воспользоваться достоинствами цифровой обработки данных.

**Алгоритмы гармонической идентификации.** Последовательная гармоническая идентификация (ПГИ). Для объектов со сравнительно быстроменяющимися свойствами могут быть предложены различные подходы. Ограничение на время усреднения не позволяет просто напрямую нивелировать влияние одной контрольной гармоники на другую, как это делалось в [2]. Одним из простых решений может быть формирование последовательности гармоник одной за другой и разделение идентификации по частоте. Для обеспечения точности идентификации и уравнивания влияния квантователя требуется осуществлять выбор амплитуды на каждой частоте таким образом, чтобы на выходе при разных частотах значения амплитуд не отличались более чем на 10–15%.

Это уменьшит требования по вычислительной мощности для реализации алгоритмов. Данное решение легко реализуется с помощью ПЛК средней мощности.

Метод имеет некоторые особенности. При переходе с одной частоты на другую будет наблюдаться переходной процесс. Для объекта с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} \quad (1)$$

уравнение для динамики при ступенчатом изменении частот будет иметь общий вид

$$y(t) = a \sin(\omega t + \varphi) + b \exp\left(\frac{-t}{T_1}\right) + c \exp\left(\frac{-t}{T_2}\right), \quad (2)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  – постоянные времени;  $p$  – оператор дифференцирования  $d/dt$ .

Расчеты для  $T_1$  и  $T_2$  со значениями 100 и 500 с показали следующую зависимость погрешности в определении амплитуды на разных периодах после перестройки частоты (рис. 1–2). Для получения графиков использовалось условие, что значение амплитуды после прохождения должно оставаться одинаковым.

Графики показывают, что при использовании данного алгоритма лучше начинать с низкой частоты. Для большинства технологических решений определять коэффициент пере-

дачи можно уже на первом периоде. Наибольшая погрешность наблюдается при кратности частот 1,6–1,7. При начале нового цикла измерения амплитуд, фиксировать коэффициент передачи на наиболее высокочастотной КГ можно будет только на 6–9 периоде.

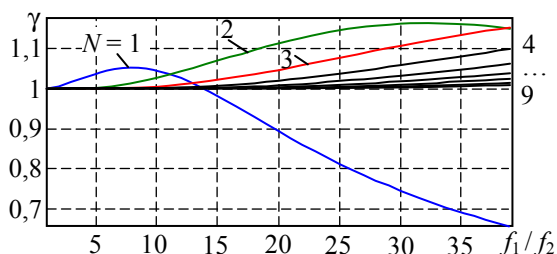


Рис. 1. Зависимость относительной погрешности  $\gamma$  от отношения частот до  $f_2$  и после  $f_1$  при их ступенчатом повышении на разных периодах  $N$  определения амплитуды

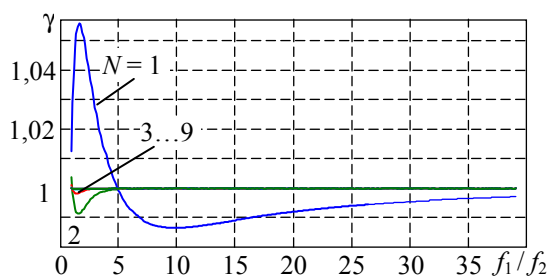


Рис. 2. Относительная погрешность  $\gamma$  от отношения частот до  $f_2$  и после  $f_1$  при ступенчатом понижении на разных периодах  $N$  определения амплитуды

Произведено моделирование системы с ПГИ с повторением после каждого изменения частоты двух (рис. 3) и одного периодов при повышении частоты и семи периодов перед повышением. Коэффициент передачи определялся по последнему периоду перед изменением частоты.

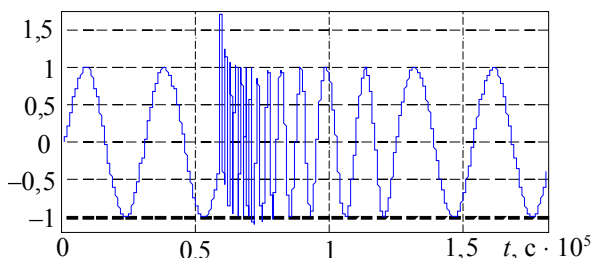


Рис. 3. Переходной процесс при перестройке частот

Из-за переходных процессов при перестройке частоты относительное отклонение амплитуды и фазы от исходного значения на двух периодах максимально при переходе от самой высокочастотной к следующей – 0,7%, и менее 0,02% – во всех остальных случаях. При одном периоде в

ССИ погрешность возрастает до 3,6% при переходе от самой высокочастотной к следующей и меньше 1% – во всех остальных случаях.

*Смешанная гармоническая идентификация (СГИ).* Другим решением будет использование процедуры разложения в ряд Фурье для всех гармоник по периоду самой медленной. Однако следует учитывать, что при выборе контрольных гармоник с некратной частотой для снижения эффекта квантования потребуется корректировка результатов на каждом периоде для уменьшения влияния одной контрольной гармоники на другую.

Так для объекта второго порядка при использовании пяти контрольных гармоник на активном изменении амплитудночастотных характеристик (АЧХ) погрешность может достигать до 30% (рис. 4). Больше всего этому подвержены высокочастотные гармоники. При усреднении по большому количеству тактов идентификации значение сходится. Для нивелирования данной погрешности следует рассчитывать поправочные коэффициенты путем одновременного моделирования и разложения. Алгоритм работы данной процедуры похож на известное решение – управление по модели. Другим решением может быть использование контрольных гармоник с кратными периодами.

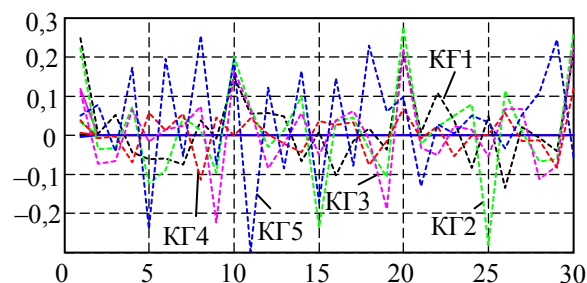


Рис. 4. Вариации амплуд КГ на различных тактах определения

**Постановка вычислительного эксперимента.** Для сравнения двух последних решений произведено моделирование в пакете MatLab при работе в одинаковых условиях. Для динамической системы с близкими к тепловому объекту свойствами установлено влияние на точность определения амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) при различных значениях уровня квантования. Объект идентификации представлял аperiodическое звено второго порядка с постоянными времени 500 и 100 с. Соответственно, для первого решения (V1) периоды гармоник были  $A_2 = [8784 \ 4184 \ 1992 \ 1020 \ 460]$  с, а для варианта два (V2)  $A_1 = [T \ T/2 \ T/4 \ T/8 \ T/16]$ , где  $T$  – период самой медленной КГ (рис. 5). Во втором случае фазы КГ были различными, соответственно  $[0, \pi, \pi/2, \pi/4, \pi/8]$ .

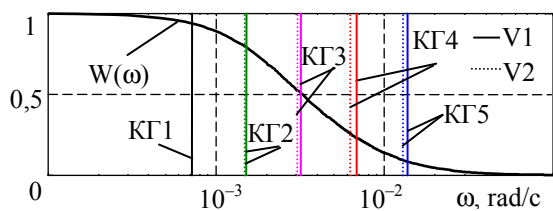


Рис. 5. Модельный объект с выбранным КГ

Отличия в фазах контрольных гармоник позволяют исключить большие отклонения при идентификации. В вычислительном эксперименте это позволяет обеспечивать максимально одинаковые условия прохождения сигнала через квантователь (рис. 6). Амплитуды были подобраны с учетом коэффициента передачи объекта, чтобы на выходе они были одинаковыми. Уровень квантования  $Z$  задавался исходя из полного размаха исходного сигнала.

Моделирование проводилось на протяжении 20 периодов самой медленной КГ. На каждом периоде определялись параметры амплитуды и фазы гармоник. Относительная ошибка  $\gamma$  определялась на каждом периоде для объекта с передаточной функцией (1) как разница между значением амплитуды на выходе до и после квантователя, отнесенная к истинному. Для вычисления результирующего значения  $\gamma$  и дисперсии (рис. 7–10) использовалось среднее значение за все периоды, за вычетом первого, для исключения влияния переходных процессов, указанного ранее.

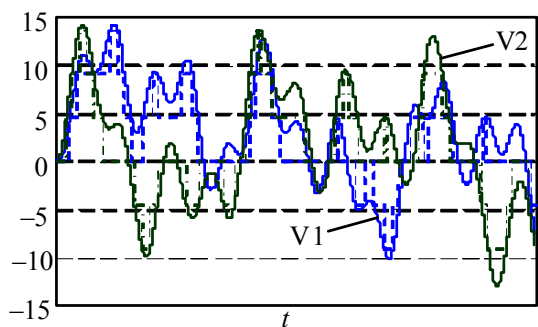


Рис. 6. Выходные тренды до и после квантователя для двух вариантов формирования КГ

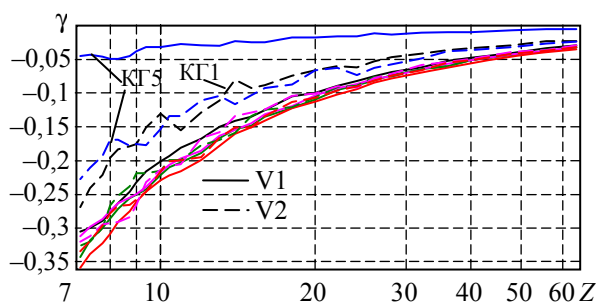


Рис. 7. Зависимость  $\gamma$  амплитуды от уровня квантования для КГ

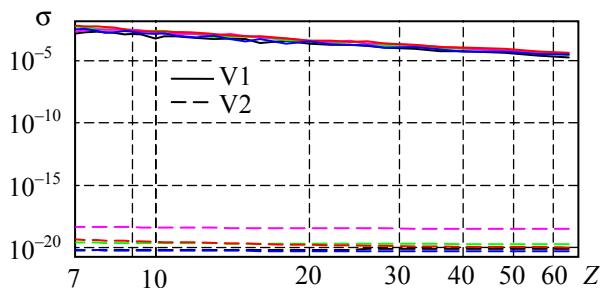


Рис. 8. Дисперсия ошибки определения амплитуды от уровня квантования

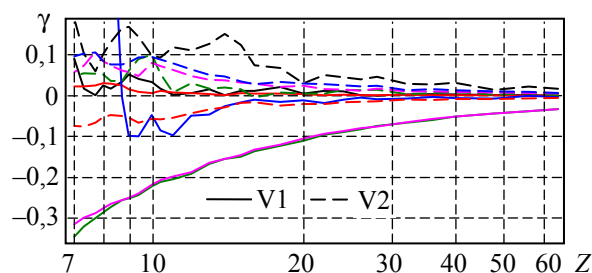


Рис. 9. Зависимость ошибки определения фазы от уровня квантования

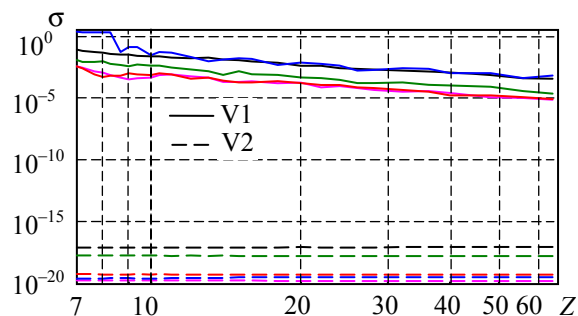


Рис. 10. Дисперсия ошибки определения фазы от уровня квантования

**Результаты и обсуждение математических экспериментов.** Уменьшение количества разрядов квантователя на амплитуду сигналов приводит к увеличению ошибки. При этом кривые хорошо аппроксимируются функцией вида

$$\gamma(Z) = \exp(k \ln Z + b). \quad (3)$$

Это следует учитывать при проведении идентификации на реальных объектах. Одним вариантом может быть совместное моделирование с использованием квантователя и учет через минимизацию рассогласования. Второй вариант – определение коэффициентов  $k$  и  $b$  заранее.

Квантование по уровню в меньшей степени оказывает влияние на самую высокочастотную и низкочастотную КГ. При этом влияние уровня при непропорциональных периодах более существенно по сравнению с другими вариантами. Еще больше отличий наблюдается при рассмотрении дисперсии отклонений амплитуды и фазы. Отличие в значениях между двумя



вариантами достигает нескольких порядков. Однако следует отметить, что такие отличия наблюдаются только в условиях вычислительного эксперимента. Шумовые составляющие в измерительном тракте, которые всегда присутствуют на реальных объектах, практически уравнивают различия между алгоритмами.

Но в целом, следует констатировать, что для практического использования лучше рекомендовать контрольные гармоники с пропорциональными периодами.

**Проверка на тепловом объекте.** Тестирование метода гармонической идентификации предполагалось осуществить на базе учебного стенда. Он представляет собой модель воздушного теплообменника. Выходным параметром является температура, а каналом управления – изменение расхода воздуха. Для изменения расхода воздуха используется частотный привод. Объект обладает нелинейными свойствами как по статическому коэффициенту передачи, так и по динамическим свойствам. Интеграция системы управления объектом с пакетом Matlab позволила проводить анализ предложенных алгоритмов. Помимо частотной идентификации (рис. 11), были проведены измерения путем формирования меандрового сигнала (рис. 11–13).

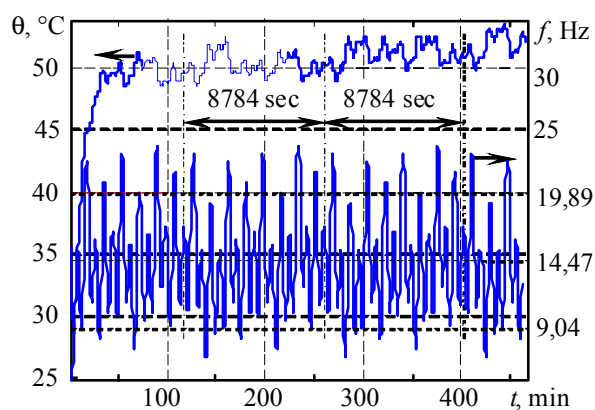


Рис. 11. Тренд частотной идентификации

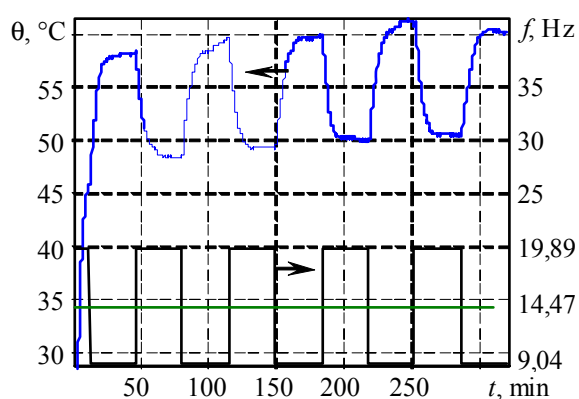


Рис. 12. Тренд идентификации при периоде меандра 8368 с

В процессе эксперимента стенд подвергался неконтролируемым возмущениям: изменение гидродинамических и теплофизических параметров воздуха вокруг стенда (отопление, проветривание, изменение погоды).

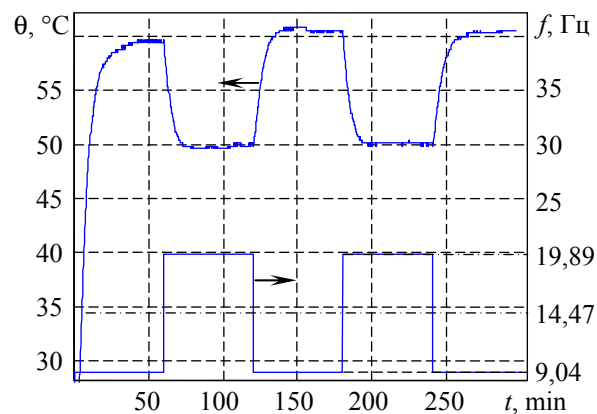


Рис. 13. Тренд идентификации при периоде меандра 14400 с

При определении параметров передаточных характеристик (1) по тренду (рис. 12) разброс значений составил более 40%. Параметры  $k$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  находились путем минимизации среднеквадратического отклонения экспериментальных данных от теоретического. АЧХ передаточных функции объекта, которые получены при удлинении периода меандра до 14400 с, представлены на рис. 14. Увеличение длительности периода переходного процесса позволило уменьшить разброс параметров передаточной функции объекта.

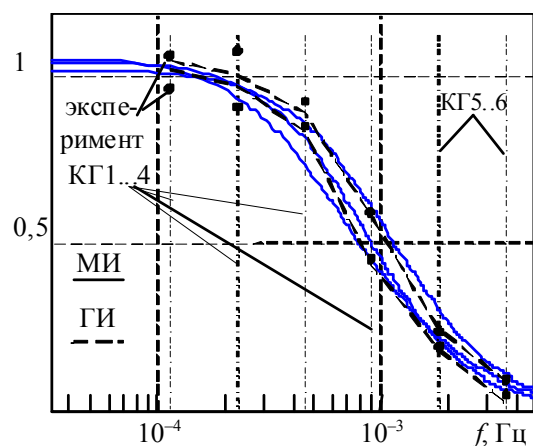


Рис. 14. АЧХ теплового объекта, определенного гармонической идентификацией (ГИ) и с помощью меандра (МИ)

При обработке ГИ доступными были только два такта идентификации ввиду ограничения на время работы. Как и при МИ, кривая имеет устойчивый повышающий тренд (рис. 11). Это, вместе с помехами, нашло отражение при оп-

ределении низкочастотных составляющих параметров АЧХ. Высокочастотные КГ, которые для разработанного алгоритма имеют многократное усреднение, обладают небольшим разбросом. Низкочастотные составляющие (КГ2 и КГ3) имеют максимальное отклонение по отношению к результирующей АЧХ, которое получено по результатам эксперимента. Результирующее АЧХ (рис. 14) получалось, как и для МИ, путем минимизации отклонения от заданного вида в соответствии с (1).

АЧХ ПГИ дали несколько лучшие результаты по низкочастотной части спектра в сравнении с ГИ и значительно худшие для высокочастотной. Доступное время работы эксперимен-

тальной установки позволяло провести только один цикл идентификации.

Следует отметить, что из-за ограничения на управляющее воздействие для МИ и ГИ не было возможности для обеспечения равноценных мощностей тестовых сигналов, как это было в [2].

**Заключение.** 1. Доработаны и опробованы на практике различные алгоритмы гармонической идентификации, показана их работоспособность.

2. В случае подверженности объекта влиянию помех, сравнимым с периодом самой низкочастотной контрольной гармоники, следует увеличивать время идентификации.

### Литература

1. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления: Оценивание параметров и состояний. М.: Мир, 1975. 680 с.
2. Oliferovich N., Hryniuk D., Orobei I. Harmonic identification of technological objects in real time // 2016 Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream 2016), Vilnius, Lithuania, 21 April 2016, pp. 1–4.

### References

1. Eykhoff P. System Identification: Parameter and State Estimation. New York, John Wiley & Sons, 1974. 674 p. (Russ. ed.: Eykhoff P. *Osnovy identifikatsii sistem upravleniya: Otsenivanie parametrov i sostoyaniy*. Moscow, Mir Publ., 1975. 680 p.).
2. Oliferovich N., Hryniuk D., Orobei I. Harmonic identification of technological objects in real time. 2016 Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream 2016), Vilnius, Lithuania, 21 April 2016, pp. 1–4.

### Информация об авторах

**Олиферович Надежда Михайловна** – ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: bogosnadya@rambler.ru

**Гринюк Дмитрий Анатольевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: hryniuk@tut.by

**Оробей Игорь Олегович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: orobei@tut.by

### Information about the authors

**Oliferovich Nadezhda Mihaylovna** – assistant lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bogosnadya@rambler.ru

**Hryniuk Dmitry Anatolyevich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hryniuk@tut.by

**Orobei Igor Olegovich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: orobei@tut.by

Поступила 25.04.2017

УДК 681.53

**Д. А. Гринюк, И. Г. Сухорукова, Н. М. Олиферович**  
Белорусский государственный технологический университет

### **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ СГЛАЖИВАНИЯ ТРЕНДОВ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ**

Статья посвящена вопросам адаптивной фильтрации при измерении сигналов со сложной динамикой. Примерами таких сигналов могут служить: преобразователь измерения скорости капиллярного впитывания; величина протечки при диагностике запорной арматуры. Для данных случаев предлагается изменять тип сглаживания в зависимости от динамики. Динамика оценивается с помощью аппроксимации текущих значений линейной, параболической или другой зависимостью.

Представлены результаты математического моделирования работы цифрового фильтра, бегущего среднего, а также сглаживания с помощью линейной и параболической зависимости при различных частотах полезного сигнала, проведенного с помощью пакета MatLab. Эффективность фильтра оценивалась по среднеквадратическому отклонению от исходного синусоидального сигнала. Проведенные исследования показали, что применение локальной линейной или параболической аппроксимации позволяет существенно улучшить сглаживание. Их использование также позволяет одновременно следить за динамикой и строить адаптивные схемы; одновременно контролировать параметры шума, бороться с импульсными помехами. По результатам предложен алгоритм адаптации для измерительного преобразователя впитывания.

**Ключевые слова:** адаптивная фильтрация, сглаживание, измерительный преобразователь.

**D. A. Hryniuk, I. G. Suhorukova, N. M. Olinerovich**  
Belarusian State Technological University

### **THE USE OF ALGORITHMIC APPROACHES FOR SMOOTHING OF MEASUREMENT INFORMATION**

The article is devoted to adaptive filtering in signal's with complex dynamics measurement. Examples of such signals are: the wetting speed of the capillary soaking time converter; the leakage value during the stop valve diagnosing. For these cases, it is suggested to change the type of smoothing depending on the dynamics. The dynamics is estimated by approximating current values by linear, parabolic or other dependencies.

The results of mathematical modeling of a digital filter's operation, a running average filter, and smoothing by linear and parabolic dependence at various frequencies of a useful signal, carried out with the help of MatLab, are presented. The filter efficiency was estimated from the root-mean-square deviation from the original sine signal. The conducted researches have shown, that application of local linear or parabolic approximation allows essentially to improve smoothing. Their use also allows to simultaneously monitor the dynamics and build adaptive schemes; one-time to control the noise parameters, to deal with impulse noise. Based on the results, an adaptation algorithm for the soaking measuring transducer is proposed.

**Key words:** adaptive filtering, smoothing, measuring transducer.

**Введение.** На сегодняшний день на практике применяется ряд устройств, принцип работы которых основан на преобразовании физических параметров во временные характеристики напряжения (тока). Помимо полезного сигнала, первичные преобразователи генерируют случайный. Для его устранения в измерительных схемах применяют различные варианты сглаживания и фильтрации.

Существуют два подхода в идентификации первичной информации: параметрический и непараметрический. Параметрические методы основаны на знании с определенной точностью модели восстанавливаемой зависимости. Непараметрические методы идентификации не используют такую модель. Другими словами, для преобразователей с информативным сигналом

синусоидальной формы не возникает сложностей с интерпретацией результатов параметрической и непараметрической фильтрации. Временной сдвиг в этом случае можно легко учесть. При сложных моделях динамики сигнала могут возникать погрешности.

**Основная часть.** Измерительные преобразователи скорости капиллярного впитывания [1] и величины протечки [2] характеризуются сложной динамикой. При использовании конструкции измерительного бумажного конденсатора [3] с чередованием металлизированных и неметаллизированных колец динамика может оказаться еще более сложной (рис. 1–2). Также бумага имеет стохастический характер расположения каналов движения жидкости, и динамику измерительного преобразователя впитывания трудно прогнозировать.

Одним из эффективных методов непараметрической фильтрации может быть метод локальной аппроксимации (МЛА) [4]. Суть этого метода состоит в использовании скользящих локально-параметрических моделей. Для обеспечения максимального качества сглаживания требуется определить порядок локальности и выбрать локально-параметрическую модель.

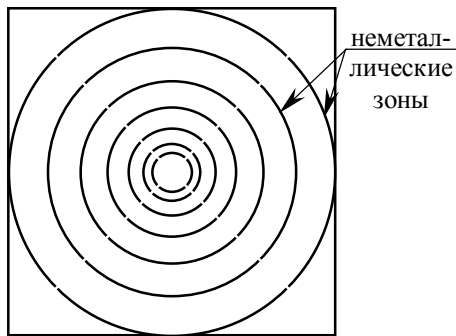


Рис. 1. Геометрия измерительного конденсатора

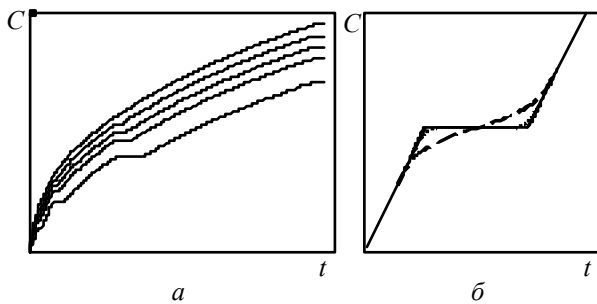


Рис. 2. Динамика изменения емкости измерительного преобразователя:

*a* – при наличии неметаллических полос разной ширины; *б* – фрагмент вариации динамики около полосы от флуктуации фронта пропитки;  
 (—) – идеальная динамика;  
 (---; - - -) – динамика при флуктуации фронта пропитки

Наиболее часто на практике для сглаживания применяются фильтры бегущего среднего и низких частот. Практика их реализации хорошо отработана. Фильтры бегущего среднего используются как простейшие формулы

$$y_i = \frac{x_i + x_{i-1} + \dots + x_{i-N+1} + x_{i-N}}{N}, \quad (1)$$

так и как формулы с весовыми коэффициентами

$$y_i = \frac{a_i x_i + a_{i-1} x_{i-1} + \dots + a_{i-N+1} x_{i-N+1} + x_{i-N}}{N}, \quad (2)$$

при условии

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N = N,$$

где  $y_i$  – выход;  $x_i$  – текущее измерение;  $N$  – порядок (диапазон) усреднения.

Методы локальной аппроксимации могут иметь различные варианты весовых функций. Однако это сопряжено с большими требованиями по мощности вычислений. Для применения в автономном режиме в реальном времени с невысокими требованиями по мощности, приемлемым вариантом является использование прямоугольных финитных функций. В качестве локальных моделей предлагается использовать линейную и квадратичную аппроксимации:

$$y(t) = c_1 + c_2 t; \quad (3)$$

$$y(t) = d_1 + d_2 t + d_3 t^2, \quad (4)$$

где

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 & w_1 \\ w_3 & w_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_3 & w_2 & w_1 \\ w_4 & w_3 & w_2 \\ w_5 & w_4 & w_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}; \quad (6)$$

$$w_j = (t_1)^{j-1} + (t_2)^{j-1} + \dots + (t_N)^{j-1}; \quad (7)$$

$$b_j = (t_1 x_1)^{j-1} + (t_2 x_2)^{j-1} + \dots + (t_N x_N)^{j-1}; \quad (8)$$

$$t_k = [0 \ \Delta t \ 2\Delta t \ \dots \ (N-2)\Delta t \ (N-1)\Delta t], \quad (9)$$

$\Delta t$  – время квантования.

Система уравнений (5)–(6) является результатом применения метода наименьших квадратов. В отличие от других весовых функций, не требует большого количества вычислений.

Для формирования выходного значения  $y_i$  может быть использовано любое значение  $t = t_S$  в диапазоне аппроксимации  $[0 \ (N-1)\Delta t]$ . В зависимости от величины  $N$  и особенности шумов  $t_k$  имеет свое оптимальное значение. Проведенные исследования показали, что

$$|y_i(t_S) - y_S| \quad (10)$$

имеет параболическую зависимость, минимум которой находится в первой половине диапазона аппроксимации, где  $y_S$  – истинное значение параметра. При использовании (3) и значении  $t_S$ , равном половине диапазона аппроксимации, сглаживание будет соответствовать методу бегущего среднего (2).

Зачастую после аналогово-цифрового преобразователя в измерительных данных вместе с шумом первичного преобразователя возникают значения с большими отклонениями. Это является следствием либо внешних импульсных помех, либо наличия паразитивных связей в измерительной схеме. Для борьбы с такими явлениями обычно используют медианный фильтр и т. д. Путем локальной аппроксимации можно также бороться с импульсными помеха-

ми типа шпоры. Сравнивая величины отклонения  $x_i \dots x_{i-N+1}$  от результатов аппроксимации с некоторыми значениями, можно существенно уменьшить влияние данного типа помех на сглаживание. Впервые обнаруженные плохие значения можно фиксировать и не использовать в последующих аппроксимациях.

Моделирование проводилось с помощью математического пакета MatLab. Генерировались синусоидальный сигнал с разными значениями частоты [0 0,0001 0,001 0,01 0,05] Гц. Значение времени квантования составляло 1 с. Первичный сигнал смешивался с шумами различных типов. Сглаживание проводилось с помощью фильтра бегущего среднего, фильтра низких частот, и аппроксимации (3) и (4). В качестве фильтра низких частот (ФНЧ) использовался фильтр Баттерворта 3-го порядка. Частота среза для каждого случая определялась отдельно путем минимизации среднеквадратического отклонения

$$|y_i - y_s| \rightarrow \min. \quad (12)$$

Диапазон для бегущего среднего и аппроксимации выбирался из значений  $N = [3, 5, 9, 11, 15, 21, 25]$ .

Некоторые из полученных результатов сглаживания различных типов фильтров можно видеть на рис. 3–8. На графиках представлены варианты работы фильтров с лучшими настройками. Так при минимальной частоте лучшие параметры по сглаживанию дает фильтр низких частот (рис. 3).

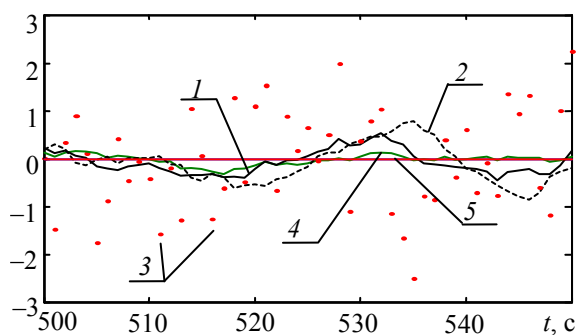


Рис. 3. Сглаживание на частоте 0 Гц для различных фильтров при наилучших параметрах:

- 1 – линейная аппроксимация; 2 – параболическая аппроксимация; 3 – исходные данные; 4 – бегущего среднего; 5 – фильтр низких частот

Но при заметной динамике среднеквадратическое отклонение для параболической аппроксимации становится сравнимым с результатом фильтра низкой частоты (рис. 4). При дальнейшем увеличении частоты параболическая аппроксимация дает лучшее сглаживание. При компенсации временной задержки отличия от

других вариантов становятся значительными. С ростом частоты уменьшается оптимальное окно аппроксимации. Результат линейной аппроксимации дает лучшие результаты на высоких частотах исследованного диапазона и высоком уровне шумов в измерительном канале.

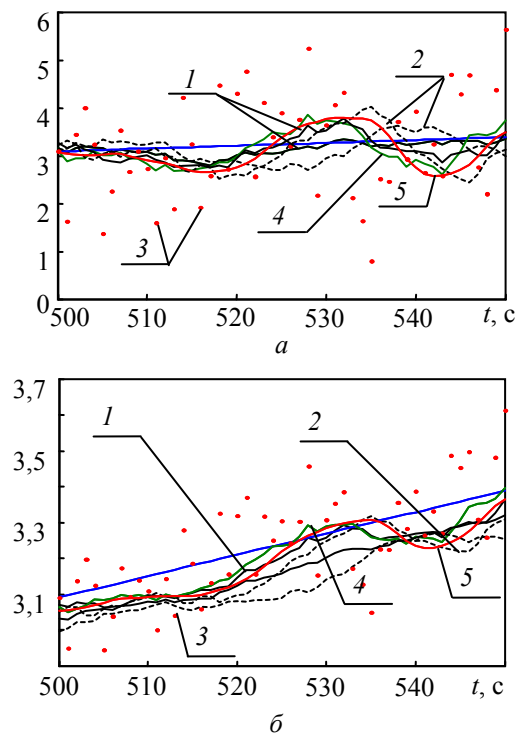


Рис. 4. Сглаживание на частоте 0,0001 Гц при высоком (а) и низком (б) уровне шума для различных фильтров:

- 1 – линейная аппроксимация ( $N = 15, 25$ );  
2 – параболическая аппроксимация ( $N = 25, 15$ );  
3 – исходные данные;  
4 – бегущего среднего ( $N = 25$ ); 5 – ФНЧ

Дисперсия отклонения от синусоидальной формы для параболической и линейной аппроксимаций имеет меньшее значение, начиная с частоты 0,001 Гц.

При произведении вычислений использовался алгоритм решения системы уравнения с помощью метода Гаусса. При его реализации на микроконтроллерах следует учитывать существующие ограничения при выполнении операций умножения и деления, которые могут оказывать влияние на точность результатов.

Автономная работа адаптации предполагает проведение постоянных расчетов по линейной или параболической аппроксимации. Результаты моделирования показали, что окно аппроксимации  $N$  не стоит увеличивать более чем на 20. Слежение за коэффициентами  $d_2$  и  $c_2$  позволяет определять текущую динамику и в зависимости от этого осуществлять выбор вида и параметров сглаживания.

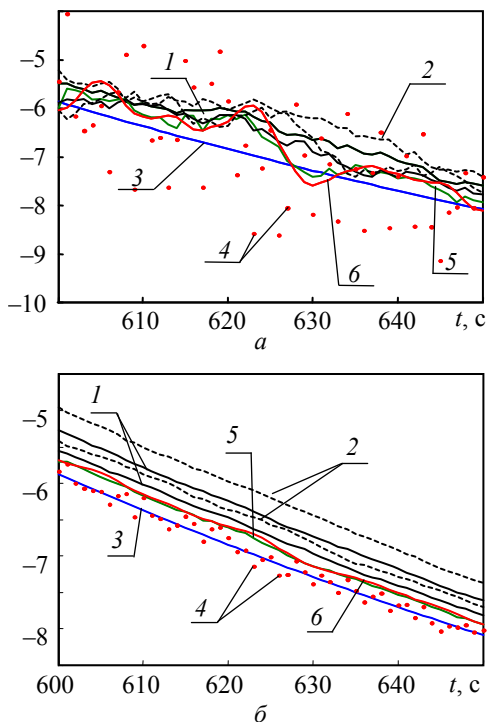


Рис. 5. Сглаживание на частоте 0,001 Гц при высоком (а) и низком (б) уровне шума для различных фильтров:  
 1 – линейная аппроксимация ( $N = 15, 21$ );  
 2 – параболическая аппроксимация ( $N = 15, 21$ );  
 3 – первичный сигнал; 4 – исходные данные;  
 5 – бегущего среднего ( $N = 15$ ); 6 – ФНЧ

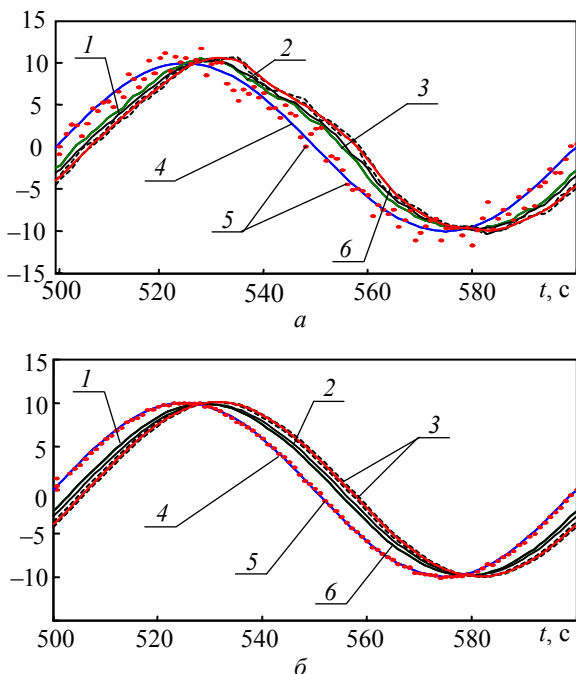


Рис. 6. Сглаживание на частоте 0,01 Гц при высоком (а) и низком (б) уровне шума для различных фильтров:  
 1 – линейная аппроксимация ( $N = 11, 15$ );  
 2 – бегущего среднего ( $N = 11$ ); 3 – параболическая аппроксимация ( $N = 11, 15$ ); 4 – первичный сигнал;  
 5 – исходные данные; 6 – ФНЧ

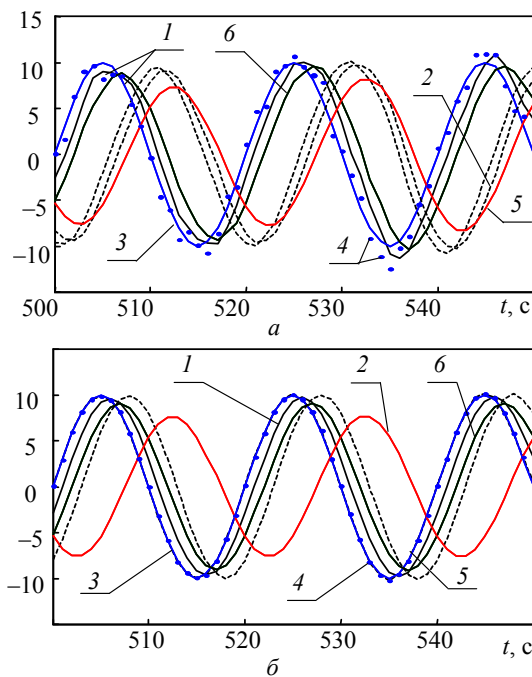


Рис. 7. Сглаживание на частоте 0,05 Гц при высоком (а) и низком (б) уровне шума для различных фильтров:  
 1 – линейная аппроксимация ( $N = 3, 5$ ); 2 – ФНЧ;  
 3 – первичный сигнал; 4 – исходные данные;  
 5 – параболическая аппроксимация ( $N = 9, 11$ );  
 6 – скользящее среднее ( $N = 5$ )

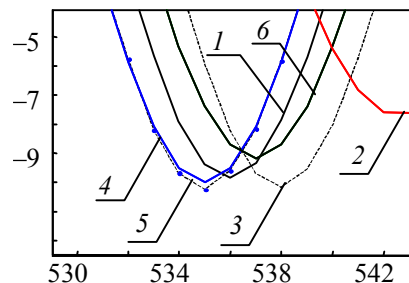


Рис. 8. Сглаживание на частоте 0,05 Гц при низком уровне шума для различных фильтров (увеличенный фрагмент):  
 1 – линейная аппроксимация ( $N = 3, 5$ );  
 2 – ФНЧ; 3 – первичный сигнал;  
 4 – исходные данные;  
 5 – параболическая аппроксимация ( $N = 9, 11$ );  
 6 – скользящее среднее ( $N = 5$ )

По причине флуктуации параметров  $d_2$  и  $c_2$  переход на новый вид или параметры фильтра лучше осуществлять с использованием триггерных алгоритмов.

Вычисление величины дисперсии отклонения значений от аппроксимированных кривых не является сложной задачей. Слежение за ней позволяет характеризовать текущие параметры шумов в измерительном канале. Это позволит осуществлять выбор между линейной и квадратичной аппроксимацией и их параметрами.

Алгоритм борьбы с импульсными помехами был представлен выше. Данный алгоритм хорошо применим для измерительного преобразователя скорости капиллярного впитывания.

Кроме метода наименьших квадратов могут быть применены другие функции метода МЛА. Использование экспоненциальных и логарифмических зависимостей потребует еще большей вычислительной мощности. Для уменьшения вычислительной мощности может быть использована квадратичная или линейная аппроксимация по методу средних.

Принцип использования расчетных формул для проведения вычислений по методу средних не отличается от метода наименьших квадратов. Матрицы для вычислений могут иметь различный вид. С учетом того, что в цифровых системах есть ограничения на вычислительную точность, следует рекомендовать разбивать исходные уравнения на приблизительно равные группы.

Пусть  $r, n, m$  – натуральные числа, равные  $r \approx N/3, n \approx N/3, m \approx N/3$  при  $r + n + m = N$ , тогда для квадратичной зависимости

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 & y_2 & y_1 \\ y_6 & y_5 & y_4 \\ y_9 & y_8 & y_7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$y_1 = r; \quad y_4 = n; \quad y_7 = m; \quad (13a)$$

$$y_2 = \sum_{i=1}^r t_i; \quad y_5 = \sum_{i=1+r}^n t_{r+i}; \quad y_8 = \sum_{i=1+r+n}^N t_{r+n+i}; \quad (13b)$$

$$y_3 = \sum_{i=1}^r t_i^2; \quad y_6 = \sum_{i=1+r}^n t_{r+i}^2; \quad y_9 = \sum_{i=1+r+n}^N t_{r+n+i}^2; \quad (13c)$$

$$s_1 = \sum_{i=1}^r x_i; \quad s_2 = \sum_{i=1}^n x_{r+i}; \quad s_3 = \sum_{i=1+r+n}^N x_{r+n+i}. \quad (14)$$

При линейной зависимости

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 & v_1 \\ v_4 & v_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где

$$v_1 = z; \quad v_3 = N - z; \quad (16a)$$

$$v_2 = \sum_{i=1}^z t_i; \quad v_4 = \sum_{i=1+z}^N t_{z+i}; \quad (16b)$$

$$q_1 = \sum_{i=1}^z x_i; \quad q_2 = \sum_{i=1+z}^N x_{z+i}. \quad (14)$$

Значение  $z$  должно быть натуральным числом и равным примерно половине  $N$ .

**Закключение.** 1. Использование локальной линейной или параболической аппроксимации позволяет существенно улучшить сглаживание. При этом временная задержка контролируется и может быть исключена при любой форме сигнала.

2. Инструмент линейной или параболической аппроксимации позволяет одновременно следить за динамикой и строить адаптивные схемы.

3. Линейная или параболическая аппроксимации позволяют одновременно контролировать параметры шума, бороться с импульсными помехами.

## Литература

1. Богослав Н. М., Гринюк Д. А., Оробей И. О. Экспериментальное исследование динамики круговой пропитки // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 99–103.
2. Сухорукова И. Г., Гринюк Д. А., Оробей И. О. Повышение чувствительности измерителя протечек запорной арматуры // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 132–136.
3. Oliferovich N., Hryniuk D., Orobei I. Measuring the speed of capillary soaking with adaptation regarding coordinates // 2015 Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream 2015), Vilnius, Lithuania, 21 April 2015, pp. 1–4.
4. Катковник В. Я. Непараметрическая идентификация и сглаживание данных: метод локальной аппроксимации. М.: Наука, 1985. 336 с.
5. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. 3-е изд. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат литературы, 1967. 368 с.

## References

1. Bogoslav N. M., Hryniuk D. A., Orobei I. O. Experimental research of the dynamics of circular impregnation. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 99–103 (In Russian).
2. Suhorukova I. H., Hryniuk D. A., Orobei I. O. Increased sensitivity stand leaks stop valves. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 132–136 (In Russian).

3. Oliferovich N., Hryniuk D., Orobei I. Measuring the speed of capillary soaking with adaptation regarding coordinates. 2015 Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream 2016), Vilnius, Lithuania, 21 April 2015, pp. 1–4.

4. Katkovnik V. Ya. *Neparametricheskaya identifikatsiya i sglazhivanie dannykh: metod lokal'noy approksimatsii* [Nonparametric Identification and Data Smoothing: Method of Local Approximation]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 336 p.

5. Demidovich B. P., Maron I. A., Shuvalova E. Z. *Chislennyye metody analiza: priblizhenie funktsiy, differentsial'nye i integral'nye uravneniya* [Numerical methods of analysis: approximation of functions, differential and integral equations]. Moscow, Nauka Publ., Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1967. 368 p.

### Информация об авторах

**Гринюк Дмитрий Анатольевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: hryniuk@tut.by

**Сухорукова Ирина Геннадьевна** – ассистент кафедры информационных технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: irina\_x@rambler.ru

**Олиферович Надежда Михайловна** – ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: bogosnadya@rambler.ru

### Information about the authors

**Hryniuk Dmitry Anatolyevich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hryniuk@tut.by

**Suhorukova Irina Gennadyevna** – assistant lecturer, the Department of Information Technology. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: irina\_x@rambler.ru

**Oliferovich Nadezhda Mihaylovna** – assistant lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bogosnadya@rambler.ru

Поступила 25.04.2017



# ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ

---

УДК 316.776

G. Jaber, N. V. Patsei

Belarusian State Technological University

## INFORMATION CENTRIC NETWORKING FOR WEB-BASED CONTENT DISTRIBUTION AND MANIPULATION

Modern Internet architecture is based on the model of interaction with the host-center, which was convenient at the initial stage of the Internet development. However, today most users are interested in receiving (often it is huge amounts) information, regardless of its physical location. This shift paradigm in the Internet model, as well as the need to improve security and mobility support, led to a radical revision of the future Internet architecture. In this connection a lot of researches have appeared. In particular, these are some models with an information-centric network (ICN) organization. There are a lot of open questions in ICN. Some of which are discussed in this article. First, these are the basic functional capabilities of ICN architectures. Secondly, it is naming and data routing organization. Thirdly, these are issues of security and caching.

**Key words:** web-content, Information-Centric networks, architecture, model, naming, routing, caching.

**Introduction.** At the recent years, the field of Internet networking has replenished with a new paradigm – Content-Centric (CCN) or Information-Centric networks (ICN). While the architecture of packet-switching networks was based on a host-to-host communication path, the architecture of the ICN is based on making a connection between users and contents (or information) [1]. The term “content” means video, audio, web pages, software and the like. In a content-centric information world, what the user wants is becoming more important than where the server is located. In this case, the content becomes the starting point. Information is named, addressed and delivered regardless of location (it can be located anywhere in the network [2–6]). Instead of host specifying, the information name is indicated. As a result of the transformation from the host naming model to the information naming model, the receiver searches for information (in the existing Internet architecture, the sender controls the data exchange). In ICN, after sending a request, the network is responsible for finding the best source that can provide information. So, the information routing request seeks the best source of information based on a location-independent name. For example, communication in ICN is initiated by receivers that request for Named Data Objects (NDOs). The senders, on the other side, provide the required NDOs for receivers by means of publishing the objects. The ICN can identify the users’ requests from any resource having a copy of the object. This ability enables caching [2, 7].

So, the main aims of ICN networking architecture are providing better services regarding content

distribution, improving mobility of the network, while the networks are more resistant against disruptions and breakdowns [8–9].

**Theoretical base.** The related projects with the ICN are: Data Oriented Network Architecture (DONA) project; Publish-Subscribe Internet Technology (PURSUIT); Publish-Subscribe Internet Routing Paradigm (PSIRP); Scalable and Adaptive Internet solutions (SAIL); 4WARD architecture (as the ancestor of SAIL); Content Mediator architecture for content-aware networks (COMET); CONVERGENCE; Named Data Networking (NDN); Content Centric Networking (CCN); Mobility; ANR Connect. The above-mentioned projects and architectures are still under development, and they all share a number of major functionalities.

DONA is one of the first complete ICN architectures. Each piece of information (or services) is associated with the “principal”. Names consist of a cryptographic hash, is flat, self-certifying (they allow the subscriber to verify that the received data matches the requested name) and uniquely identifying information. Name resolution in DONA is provided by specialized logical servers – Resolution Handlers (RHs) (Fig. 1).

Publisher (principal) sends a “Register” message with the object’s name to its RH, who stores a pointer to the principal. The RH then propagates registration to the other RHs, following the established routing policies. Subscriber sends a “Find” message to RH, until a matching registration entry is found. When a “Find” message reaches an appropriate publisher, the “Data” can be directly sent to the subscriber using IP routing and forwarding

(Fig. 1). DONA supports on-path caching via the RH infrastructure (data will be cached there).

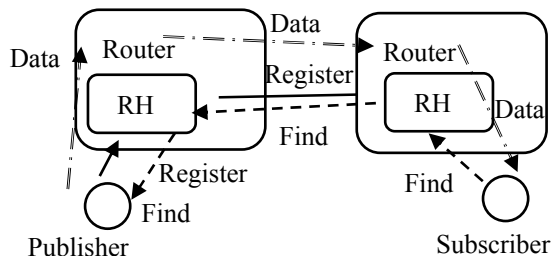


Fig. 1. DONA architecture

NDN provides for the rebuilding of the Internet protocol stack. In NDN a “strategy” layer mediates between the named “data” layer and the underlying network technologies, while a “security” layer applies security functionalities directly on “named” data. Names in NDN are hierarchical and may be similar or not to URLs. In NDN subscribers send “Interest” messages to request information objects which arrive in the form of “Data” messages (Fig. 2).

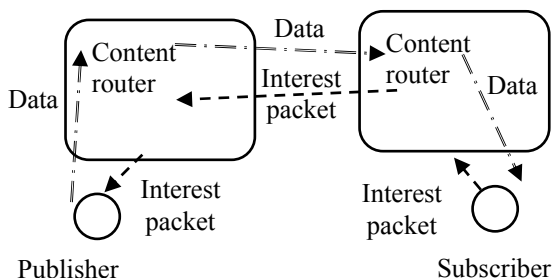


Fig. 2. NDN architecture

All messages are forwarded by Content Routers (CRs). Each “Data” message contains a signa-

ture (name and the information included in the message) and information about the public key (to produce the signature). This allows any node and CRs to verify that the information comes from an authorized source. NDN supports on-path caching.

Information objects in PURSUIT are identified by a unique pair of IDs: the “scope” ID (related information object) and the “rendezvous” ID (identity for a particular piece of information). PURSUIT can support both on-path and off-path caching and the Packet Level Authentication (PLA) technique for encrypting and signing individual packets.

The SAIL architecture combines elements present in the NDN and PURSUIT approaches and can even operate in a hybrid mode. Information object names in SAIL provide structure and can be hierarchical, but they do not carry location or organizational information. Hash values are included in names, which allows self-certification. In addition to on-path caching at the Content Routers (CRs) SAIL, has the deployment of large scale information object caching and replication mechanisms.

The core component of the COMET architecture is a Content Mediation Plane (CMP) which mediates between the network providers and the information servers. Information names are provided by a Content Resolution System (CRS) when the information is registered by the publishers. COMET adopts security techniques from other ICN architectures and on-path and off-path caching.

In CONVERGENCE object names consist of a “namespace ID” and a “name part”, whose format is determined by the “namespace ID”. The default format of CONVERGENCE names is similar to DONA, hierarchical names may also be used as in NDN or URLs. Each “Data” message contains a digital signature.

**Functionalities implementation in ICN architectures**

Functionalities / ICN	DONA	NDN	PURSUIT	SAIL	COMET	CONVERGENCE
Naming	Flat	Hierarchical	Flat/hierarchical	Flat	Unspecified	Flat/hierarchical
Caching	On-path caching at resolution handlers Off-path caching requires additional registrations		On-path caching Off-path caching requires additional registrations			On-path caching at content routers Offpath caching relies on unspecified name resolution system
Mobility	Subscriber mobility via new requests				Specialized mobility-aware content routers at access network	Subscriber mobility via new requests
Security	Principal is hash of public key	Signatures included in packets	Packet level authentication Names can be self-certifying	Names can be self-certifying	Unspecified	Signatures included in objects

The ICN architectures have similarities and differences, as shown in Table.

**Naming.** One of the major characteristics of all ICN architectures is the structure of name for a content that makes content communicable over the network. The common point among all the ICN architectures is that the content names are all independent of location. On the other side, the point of difference among the ICN architectures is that the names can be flat or hierarchical; or the names can be human-readable or not [3].

**Name resolution and data routing.** The concept of name resolution is process of finding a provider or source that would be able to supply the requested named information. Data routing includes building a path from the provider to the requested information deliver. The major issue here is that whether name resolution and data routing are integrated or decoupled. If these two functions are integrated, the request for information will be routed to the information provider first. Then, the provider sends the information to the host asking for information by going through the reverse path on which the request has been forwarded. On the other hand, the first function that is name resolution does not define or limit the path over which the data will be delivered from the provider to subscriber [3–4].

**Caching.** There is a difference between on-path caching and off-path caching. If on-path approach for caching is used, the network employs cached information as well as the path through which name resolution request is delivered. On the other hand, the network in off-path caching uses the information that is cached outside the path. If name resolution and data routing are decoupled in the ICN architectures, the name resolution system (that is responsible for managing caches as normal pub-

lishers of information) must be able to support off-path caching method. If integrated name resolution and data routing are utilized in the network, off-path caching is needed to be supported by the routing system [4] **Mobility.** Mobility of subscriber is a matter that is naturally supported by all ICN architectures. The reason is that mobile subscribers are only able to send new information subscriptions after a handoff. It is more troublesome to support mobility of publisher because if the integrated name resolution and data routing is used, the name resolution system must be updated; and if the decoupled approach is used, the routing tables are needed to be updated [5–7].

**Security.** The issue of security is highly in relation with naming structure. If human-readable names are used, an entrusted agent (or a trust association with the name resolution system) is required to ensure that returned content matches the requested name. On the other hand, if flat names are used, self-certification is supported. However, flat names are no human-readable. As a result, an entrusted system is needed to map human-readable names into flat one [5–7].

**Conclusion.** In modern Internet architecture, there are certain problems that require a fundamental rethinking of how the Internet should work. Several ICN architectures have already been proposed, to address such issues as information delivery and mobility support. Although the field of ICN-related research is still being formed, a set of core ICN functionality has been defined, such as naming, name resolution and data routing, caching, mobility, and security, which compared the functionality of ICS projects. Thus, ICN is a promising research area that requires further research to assess potential benefits and productivity.

## References

1. Al-Naday M. F., Thomos N., Reed M. J. Information-centric Multilayer Networking: improving performance through an ICN/WDM architecture. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 2006, no. 25 (1), pp. 83–97.
2. Anand A., Gupta A., Akella A., Sessa S., Shenker S. Packet caches on routers: the implications of universal redundant traffic elimination. *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, 2008, vol. 38, no. 4, 2008, pp. 219–230.
3. ANR Connect project. Available at: <http://anr-connect.org/> (accessed 23.03.2017).
4. Arianfar S., Nikander P., Ott J. On content-centric router design and implications. *Proceedings of the Re-Architecting the Internet Workshop*, 2008, p. 5.
5. Barakabitze A. A., Xiaoheng T., Tan G. A Survey on Naming, Name Resolution and Data Routing in Information Centric Networking (ICN). *Int. J. Adv. Res. Comput. Commun. Eng.*, 2008, no. 3 (10), pp. 8322–8330.
6. Bari M. F., Chowdhury S. R., Ahmed R., Boutaba R. A survey of naming and routing in information-centric networks. *IEEE Communications Magazine*, 2012, no. 50 (12), pp. 44–53.
7. Bloom B. H. Space/time trade-offs in hash coding with allowable errors. *Communications of the ACM*, 2008, no. 13 (7), pp. 422–426.

8. Carzaniga A., Wolf A. L. Content-based networking: A new communication infrastructure. *Workshop on Infrastructure for Mobile and Wireless Systems, 2006*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 59–68.
9. Cerf V. G., Icahn R. E. A protocol for packet network intercommunication. *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, 2005, no. 35 (2), pp. 71–82.
10. Choi J., Han J., Cho E., Kwon T., Choi Y. A survey on content-oriented networking for efficient content delivery. *IEEE Communications Magazine*, 2001, no. 49 (3), pp. 121–127.

#### **Information about the authors**

**Jaber Ghassan** – PhD student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ghassanjaber@hotmail.com

**Patsei Natallia Vladimirovna** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information systems and technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: n.patsei@belstu.by

*Received 25.04.2017*

УДК 003.26+347.78

**Н. П. Шутько**

Белорусский государственный технологический университет

**ЗАЩИТА И ПЕРЕДАЧА ТЕКСТОВОЙ ИНФОРМАЦИИ  
НА ОСНОВЕ ИЗМЕНЕНИЯ КЕРНИНГА**

Описан и проанализирован новый метод текстовой стеганографии для скрытой передачи данных и охраны прав интеллектуальной собственности на текстовые документы (контейнеры). Метод основан на модификации одного из пространственно-геометрических параметров текста-контейнера – кернинга. Метод предусматривает изменение значения кернинга любых кернинговых пар символов в документе-контейнере. Модификация указанных параметров позволяет осаждать тайное сообщение (авторскую информацию) в процессе прямого стеганографического преобразования защищаемого текста-контейнера либо передавать эту информацию по стегоканалу. В первом случае решается задача защиты права интеллектуальной собственности, во втором – обеспечения повышенного уровня конфиденциальности передаваемых сообщений между абонентами. Учитывая специфическую особенность процессора MS Word, состоящую в том, что кернинг применяется к символам, размер (кегель) которых не ниже заданного специальной опцией в диапазоне от 1 до 1638 пт, и такая опция может применяться независимо к любым парам знаков и даже единичным знакам текста, предложены два варианта практической реализации метода. Метод характеризуется более высокой эффективностью в сравнении с другими методами текстовой стеганографии.

**Ключевые слова:** текстовая стеганография, авторское право, параметры шрифта, кернинг.

**N. P. Shutko**

Belarusian State Technological University

**PROTECTION AND TRANSFER OF TEXT INFORMATION  
ON THE BASIS OF KERNING CHANGING**

A new method of text steganography for hidden data transmission and protection of intellectual property rights for text documents (containers) is described and analyzed. The method is based on the modification of one of the spatial-geometric parameters of the text-container – kerning. The method involves changing of the kerning value of any kerning pairs of characters in the document-container. Modification of these parameters allows to embed a secret message (author's information) during the process of direct steganographic transformation of the protected text-container or transmit this information by a stegochannel. In the first case, the problem of protection of intellectual property rights is solved, in the second one – ensuring of an increased level of confidentiality of transmitted messages between abonents. Considering the specific feature of the MS Word processor, which consists in the fact that kerning is applied to symbols whose size (font size) is not lower than specified by a special option in the range from 1 to 1638 pt, and such option can be applied independently to any pairs of characters and even single characters of the text, two variants of practical implementation of the method are proposed. The method is characterized by a higher efficiency in comparison with other methods of text steganography.

**Key words:** text steganography, copyright, font parameters, kerning.

**Введение.** Проблема защиты информации и защиты авторских прав на текстовые документы приобретает все большую актуальность. Основными объектами авторского права, относящимися к информационным технологиям, в том числе издательским, являются: бумажные и электронные версии различных текстовых или иных документов, базы данных, компьютерные программы. Это означает, что объекты интернета также относятся к интеллектуальной собственности. Среди множества предлагаемых методов защиты текстовой информации ни один не дает полной гарантии. В последние годы предпринимаются попытки создания инст-

рументов защиты контента от несанкционированного использования, особенно через глобальные информационные сети, на основе стеганографии [1–2]. При этом защита или передача информации производится путем ее тайного размещения (осаждения) в текстовый документ, называемый контейнером. Процесс осаждения подразумевает изменение одного или нескольких параметров контейнера. В случае решения задачи по защите авторских прав именно этот документ-контейнер и является объектом авторского права, т. е. объектом защиты. А размещенная в нем информация используется для доказательств авторского права.

В настоящей статье предлагается и анализируется метод текстовой стеганографии, основанный на осаждении/извлечении тайной информации в документ-контейнер путем модификации кернинга.

**Сущность метода.** Для понимания сущности метода кратко поясним специфику используемого здесь параметра шрифта.

В текстовых документах встречаются такие сочетания знаков, которые образуют визуальные «дыры» либо «сгущения». Например, в текстах на основе кириллицы – это такие сочетания: ГА, ТА, АТА, БТ и т. п., на основе латиницы – АУ, АВ, Т, ff, а на основе греческого алфавита – ΘΑ, ΔΟ, λκ. Под кернингом обычно понимается межсимвольное расстояние между отдельными парами символов (именно фактор парности отличает кернинг от апроша). Таким образом, технология кернинга, появившаяся в полиграфии после внедрения фотонабора (а затем и компьютерного набора), включает подбор межбуквенных интервалов для конкретных пар букв с целью улучшения внешнего вида и удобочитаемости текста. Такой избирательный подбор позволяет компенсировать неравномерности визуальной плотности текста, получаемой при использовании стандартных апрошей для каждой буквы.

На рис. 1 приведен пример применения кернинга для некоторых пар символов. Создается визуальное впечатление, что промежуток между «А» и «W» гораздо больше, чем между «W» и «Е» (в первом случае), хотя формально они одинаковы.



Рис. 1. Пример применения кернинга

В данном случае сочетание «AW» как раз и является кернинговой парой. После применения автоматического (во втором случае) и ручного (в третьем случае) кернинга визуальное восприятие текста улучшилось.

С появлением цифрового фотонабора стало возможным хранить такие критические сочетания знаков (кернинговые пары) для некоторого

условного шрифта, общее число которых мы обозначим  $N_k$ , в памяти компьютера с указанием величины ( $\sigma$ ), на которую необходимо сдвинуть символы, чтобы визуально выровнять буквенные просветы.

Как правило, текстовые редакторы или процессоры содержат встроенные средства настройки кернинга, которые определяют стандартный межбуквенный интервал для того или иного шрифта. При этом  $\sigma$  устанавливается в соответствии со значениями из таблицы кернинговых пар, встроенной в вышеуказанный файл со шрифтом. Такая настройка позволяет выровнять шрифт и является стандартной. В некоторых шрифтах сейчас количество пар доходит до нескольких тысяч. Считается, что для качественного набора достаточно учитывать 300–700 пар [3].

Значение кернинга может быть как положительным (когда знаки раздвигаются, разреживаются,  $\sigma > 0$ ), так и отрицательным (когда сдвигаются,  $\sigma < 0$ ). Эта величина в программах верстки устанавливается в процентах от ширины символа пробела используемого шрифта.

Кернинг, как параметр, измеряется в тысячных долях круглой шпации ( $E_m$ ) – единицы измерения, которая определяется относительно текущего размера шрифта и равна ширине символа «М». Например, для шрифта размером 6 пунктов одна круглая шпация равна 6 пунктам, а для шрифта размером 10 пунктов – 10 пунктам. Таким образом, размер кернинга  $\sigma$  строго пропорционален текущему размеру шрифта. Сдвиги букв относительно автоматически установленного межсимвольного расстояния (измеряемого, например, апрошем) можно производить с различным шагом: от 0,01 до 0,04 величины  $E_m$ , в зависимости от нужной точности.

На основе анализа общих принципов задания размера кернинга и управления этим размером, предлагаемый метод основывается на принудительном применении кернинга, не зависящем от установок параметров текста-контейнера, созданных средствами текстового процессора или иного специализированного текстового редактора. Здесь есть одна важная особенность. Изменять значения кернинга можно лишь в программах верстки (например, таких, как InDesign) или в программах, предназначенных для работы с векторной или растровой графикой (например, CorelDraw, Photoshop). В текстовом процессоре MS Word значения кернинга автоматически установлены в таблицах кернинговых пар каждого шрифта, доступа к которым нет.

Поскольку нас в большей степени интересует MS Word, как основная среда работы с текстовыми документами, и возможности мо-

дификации кернинга значительно ограничены, наш дальнейший анализ будет привязан именно к MS Word. Здесь возможности пользователя практически связаны лишь с указанием минимального размера шрифта, для которого можно применять кернинг. Это означает, что, если текст набран на основе шрифта размером, например, 14 пт, а мы в специальной опции (Главная/Шрифт) установили минимальный размер в 15 пт, при котором будет выполняться кернинг (см. поясняющую иллюстрацию на рис. 2), то для нашего текста эта процедура не будет выполнена.

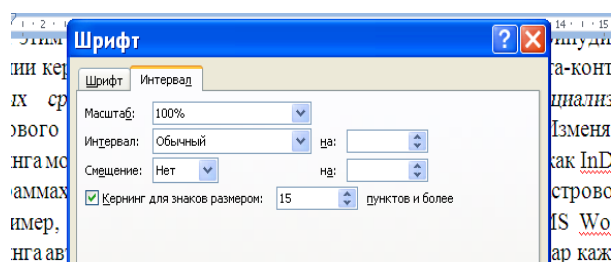


Рис. 2. Пример установки параметров для применения кернинга в MS Word

Таким образом, предлагаемый метод может быть интерпретирован так, что само значение кернинга мы программно не изменяем, а изменяем лишь размер символов, к которым будет применен кернинг в результате осаждения секретной информации.

Следует принять во внимание также следующую важную особенность. Текстовый процессор MS Word позволяет изменять параметры кернинга для знаков определенного размера. Размер символов, к которым может быть применен кернинг, должен быть в диапазоне между 1 и 1638 пт; в частном случае этот размер может быть указан в последней строке окна на рис. 2 (а сам размер шрифта можно устанавливать с точностью до 0,5 пт). Исходя из приведенных возможностей и ограничений, предлагается реализация стеганографического метода в двух вариантах.

Вариант 1. Предполагает осаждение в одной кернинговой паре одного бита сообщения  $M_i$ , переведенного в двоичный вид при соответствующем объеме  $N_{2c}$ : например, «0», если кернинг для этой пары не применяется, и «1» – если применяется. Идея основывается на том, что автоматическое установление кернинга приводит к изменению определенного межсимвольного расстояния на величину  $\Delta\sigma$  для шрифта с установленным размером (кеглем)  $E_m$  (например, 14,5 пт; см. опцию на рис. 2) не будет применяться процессором по отношению к любым парам символов меньшего раз-

мера ( $E_m - (\Delta E_m)$ ). Таким уменьшенным размером шрифта будет написан текст  $M_i$  (например, это будет размер 14 пт). Отклонение размера в 0,5 практически визуально не ЗАМЕТНО (средняя часть – «аметн» – последнего слова набрана размером 14,5 пт, основной текст – 14 пт; здесь  $\Delta E_m = 0,5$  пт). Приведенный простой пример означает, что если мы устанавливаем в соответствии с рис. 2 кернинг для знаков размером 14,5 пт, то эта операция не будет распространяться на основной текст.

Отклонение размера  $(E_m)_t$  некоторой  $t$ -й кернинговой пары символов на величину  $\Delta E_m$  от установленной  $E_m$  означает, что в ней осажден «0» (кернинга нет) и «1» – в противном случае:

$$\Delta\sigma_t = 0; \text{ при } E_m - (E_m)_t = \Delta E_m, \quad (1)$$

$$\Delta\sigma_t \neq 0; \text{ при } E_m - (E_m)_t = 0, \quad (2)$$

где  $t = 1, 2, \dots, Z_k$ ,  $Z_k$  – количество кернинговых пар в документе-контейнере.

Таким образом, для данного метода стеганографические ключи [4] определяют методы выбора очередности кернинговых пар символов текста-контейнера и метод применения либо неприменения кернинга для выбранной пары символов.

Легко заметить, что максимальный объем (бит) осажденного сообщения в анализируемом варианте не может превысить число выявленных кернинговых пар в тексте-контейнере  $Z_k$ .

Вариант 2. Отличается от предыдущего варианта методом кодирования осаждаемого сообщения. С учетом того, что, как отмечено выше, размер символов, к которым может быть применен кернинг, должен быть в диапазоне между 1 и 1638 пт, наша идея основывается на том, что сам факт применения или неприменения кернинга значения не имеет, как не имеет значения и размер шрифта документа. Имеет значение лишь указанный для произвольной ( $t$ -й) кернинговой пары текста-контейнера параметр  $(E_m)_t$ , который может выбираться из указанного диапазона.

Такой «индивидуальный подход» применен для примера к следующей последовательности символов «ГАТААТАБТ»: для первых двух символов  $E_m = 11$  пт, для двух последующих  $E_m = 72$  пт, для 5–7 символов  $E_m = 1000$  пт, для двух последних  $E_m = 1$  пт. Понятно, что собственно кернинг применен к двум первым и двум последним символам.

Принимая во внимание число 1638 (максимально возможное значение  $E_m$ ), отмечаем, что достаточно просто в любой кернинговой паре осаждать до 10 бит сообщения  $M_i$ ; для этого нам достаточно иметь и  $E_{m\max} = 1024$  пт. Таким образом, по определению данный вариант, с

точки зрения информативности, на порядок превышает предыдущий. Исходя из этого, значению  $(E_m)_i = 1$  пт может соответствовать осаждаемая последовательность 0000000001, а  $(E_m)_i = 15$  пт – 0000001111 и т. д.

Как видно из выполненного анализа, предлагаемый метод по уровню сложности алгоритма его реализации сопоставим с известными алгоритмами текстовой стеганографии, например, Line-Shift Coding или Word-Shift Coding.

Если выполняется условие  $Z_k \geq N_c$ , где  $N_c$  – число символов в исходном сообщении  $M_i$ , и, если исходное сообщение не подвергается дополнительным преобразованиям, то целесообразно принять  $E_{m\max} = 2^8 = 256$  пт, что даст возможность осаждать в любой кернинговой паре по одному символу (в кодах ASCII) сообщения  $M_i$ .

В других случаях нужно предусматривать возможность удлинения последней осаждаемой последовательности до стандартного размера (например, 10 бит).

**Заключение.** Предложенный и проанализированный на примерах метод тайной передачи информации в тексте-контейре или защиты авторского права на этот текстовый документ основан на реализации текстовой стеганографии путем изменения такого пространственно-геометрического параметра текста-контейнера, как кернинг. По уровню сложности сопоставим с методами на основе модификации междустрочного интервала (Line-Shift Coding) и пробельного расстояния между словами (Word-Shift Coding), если принять, что в последних может применяться псевдослучайный выбор модифицируемых элементов.

Вместе с тем, предлагаемый метод характеризуется большей эффективностью, поскольку число символов и их кернинговых пар в текстах всегда значительно превышает число строк или число слов. Необходимо также отметить, что стегознаками являются все символы документа, в том числе специальные знаки и символы.

### Литература

1. Шутько Н. П. Защита авторских прав на электронные текстовые документы методами стеганографии // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 131–134.
2. Шутько Н. П., Романенко Д. М., Урбанович П. П. Математическая модель системы текстовой стеганографии на основе модификации пространственных и цветовых параметров символов текста // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 152–156.
3. Шрифты. Разработка и использование / Барышников Г. М. [и др.]. М.: ЭКОМ, 1997. 288 с.
4. Шутько Н. П. Алгоритмы реализации методов текстовой стеганографии на основе модификации пространственно-геометрических и цветовых параметров текста // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 160–165.

### References

1. Shutko N. P. Copyright protection on the electronic text documents by methods of steganography. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 131–134 (In Russian).
2. Shutko N. P., Romanenko D. M., Urbanovich P. P. Mathematical model of the text steganography on the base of modifying the spatial and color settings of text characters. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 152–156 (In Russian).
3. Baryshnikov G. M., Bizyaev A. U., Efimov V. V., Moiseev A. A. *Shrifty. Razrabotka i ispolzovanie* [Fonts. Development and using]. Moscow, ECOM Publ., 1997. 288 p.
4. Shutko N. P. The algorithms of realization of text steganography methods based on the modification of the geometric and color text parameters. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 160–165 (In Russian).

### Информация об авторе

**Шутько Надежда Павловна** – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: shutko\_bstu@mail.ru

### Information about the author

**Shutko Nadezhda Pavlovna** – PhD (Engineering), Senior Lecturer, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: shutko\_bstu@mail.ru

Поступила 22.04.2017



УДК 004.5(075.8)

**Т. В. Кишкурно, Т. П. Брусенцова**

Белорусский государственный технологический университет

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПОВ ЮЗАБИЛИТИ  
ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ВОСПРИЯТИЯ  
ЭКРАННОГО ПРОСТРАНСТВА**

Статья посвящена рассмотрению использования принципов юзабилити проектирования интерфейсов пользователя.

Описаны наиболее важные особенности восприятия интерфейсов пользователем и сформированы правила юзабилити с точки зрения организации экранного пространства. Визуальное восприятие экранного пространства основано на психофизических законах. В следствии этого, чтобы создать экранный интерфейс, соответствующий принципам юзабилити, необходимо знать психологию восприятия человеком компьютера.

Проектирование интерфейса пользователя должно выполняться по принципам юзабилити с использованием законов психологии восприятия, теории передачи информации, а также психофизиологии человека. Это позволяет удовлетворить потребности пользователя, снизить когнитивную нагрузку на пользователя, уменьшить время для поиска нужной информации, нивелировать риск ошибок при работе на компьютере.

Материал, представленный в статье, может быть использован в образовательной практике студентов ИТ-специальностей.

**Ключевые слова:** интерфейс пользователя, экранное пространство, юзабилити.

**T. V. Kishkurno, T. P. Brusentsova**

Belarusian State Technological University

**USE OF USABILITY PRINCIPLES  
FOR OPTIMIZATION OF THE PROCESS  
OF PERCEPTION OF THE SCREENING SPACE**

The article is devoted to the consideration of using usability principles of designing user interfaces.

The most important features of the perception of user interfaces are described and rules of usability from the point of view of screen space organization are formed. The visual perception of the screen space is based on psychophysical laws. Thus, in order to create a screen interface, consistent with the principles of usability, it is necessary to know the psychology of human perception of the computer.

The design of the user interface should be performed according to the usability principles using the laws of psychology of perception, the theory of information transfer, as well as human psychophysiology. This allows you to meet the needs of the user, reduce the cognitive load on the user, reduce the time to find the right information, and eliminate the risk of errors when working on a computer.

The material presented in the article can be used in the educational practice of students of IT specialties.

**Key words:** user interface, screen space, usability.

**Введение.** При разработке пользовательских интерфейсов словом юзабилити обозначают общую концепцию их удобства при использовании программного обеспечения, логичность и простоту в расположении элементов управления.

В современном мире понимание основ юзабилити является необходимостью. Раньше, когда технологии онлайн-взаимодействия находились в зачаточном состоянии, не слишком много внимания уделялось тем, для кого создавалось приложение. Пользователям приходилось немало времени тратить на изучение интерфейса, чтобы в итоге найти то, что нужно. Но теперь, когда число сайтов постоянно рас-

тет, а мобильные устройства и планшетные компьютеры используются повсеместно, пользователи не слишком расположены к «обучению». Большинство из них быстро теряют интерес, если чувствуют, что продукт, приложение или веб-сайт выполнены некачественно – и это справедливо.

**Основная часть.** Разработать дизайн интерфейса согласно собственным вкусам и предпочтениям всегда заманчиво. Но, если набор предпочтений и потребностей пользователей отличается от вашего, это не поможет им выполнять задачи на сайте или в приложении.

На самом деле не бывает абсолютной вещи, удобной для всех. Она удобна сейчас для реше-

ния конкретной задачи конкретным человеком. Но как только какая-то переменная изменится, то появляется другой человек, на которого не рассчитывали. Например, рассчитывали на мужчин, а пришла блондинка или наоборот, сделали для блондинки, а пришел инженер, и данный продукт не соответствует его ментальным моделям. Поэтому необходимо достигать золотой середины.

В юзабилити известен так называемый Принцип Парето, или правило 80/20. Это правило основывается на том, что 80% эффекта является результатом 20% действий. Если применить это правило к веб-дизайну, то его суть можно определить следующим образом: для того, чтобы улучшить отдачу сайта, особое внимание нужно обратить на 20% пользователей, процессов, действий, товаров, услуг, которые дают 80% прибыли.

Чтобы создать экранный интерфейс, соответствующий принципам юзабилити, необходимо знать психологию восприятия человеком компьютера.

Визуальное восприятие экранного пространства основано на психофизических законах, изучением которых занимались многие ученые.

Это и американский психолог, считающийся одним из известнейших когнитивных психологов, Джеймс Гибсон, который так определял восприятие: «Восприятие – это активный и непрерывный процесс извлечения информации» [4]. И Клод Элвуд Шённон [1], основатель теории информации. Он предложил для психологов теорию коммуникации (с использованием компьютера), которая тесно связана с теорией зрительного восприятия экранного пространства. Также следует отметить американского психолога Рудольфа Арнхейма (Rudolf Arnheim), использовавшего принципы и методологию гештальт психологии [3], в которой показано, что проявление любого элемента зависит от его места и функции в модели целого.

Исходя из этих работ и были определены особенности восприятия интерфейсов пользователем и сформированы правила юзабилити.

Интерфейс должен снижать когнитивную нагрузку на пользователя. Она должна быть минимальной. Здесь, прежде всего, следует учитывать нагрузку на основные психические процессы: память, внимание, воображение.

Когнитивная нагрузка относится к общему количеству информации, с которой может справиться память человека. Когнитивная перегрузка происходит, когда память получает больше информации, чем она может свободно обработать, что приводит к проблемам при принятии решений.

Но что это означает с точки зрения организации экранного пространства? Интерфейс сайта должен быть интуитивно понятным пользователю. «Не заставляйте меня думать», – первый закон юзабилити, о котором говорит в своей книге Стив Круг.

Поскольку память пользователя фокусируется на достижении конкретных целей, ненужные действия заставляют пользователя приложить больше усилий, что влечет за собой дополнительную когнитивную нагрузку на него.

Чаще всего такими виновниками являются вычурные или заумные названия, торговые марки, фирменные наименования и незнакомые технические термины. Ссылки и кнопки, вид которых не всегда ясно показывает, что на них можно нажать (рис. 1).

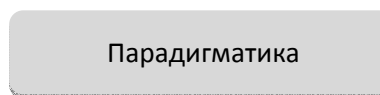


Рис. 1. Пример неочевидного решения для названия кнопки

Для того, чтобы интерфейс был эффективным, необходимо сделать его ясным, простым или, по крайней мере, понятным (рис. 2).

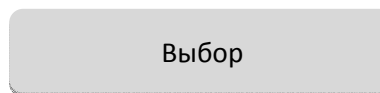


Рис. 2. Пример простого решения для названия кнопки

Этот принцип означает, что в той мере, насколько этого можно достичь, интерфейс должен быть максимально простой, понятный и «самоочевидный». Это главный и основной принцип юзабилити, который является решающим при оценке того, что и как работает (или не работает) в интерфейсе.

Визуальный шум является одним из основных препятствий для получения легко воспринимаемого интерфейса. В интерфейсе не должно быть перегруженности.

Интерфейс должен быть запоминающимся, не только по внешним характеристикам, но и по принципам работы в нем. В нем не должно присутствовать слишком большое количество объектов, отвлекающих внимание пользователя от восприятия основной информации. Такими, например, являются мигающие, двигающиеся, всплывающие баннеры, которые в большинстве случаев пользователь пытается игнорировать или совсем исключить из поля зрения. Этот принцип в юзабилити называется баннерной слепотой.

Для решения этой задачи необходимо избавиться от всего, что не является существенным и оставить только то, что необходимо. Это позволит также сократить время загрузки веб-страницы.

Изображения, видео, инфографика и другие элементы должны гармонично располагаться на странице и быть понятными и легкими для восприятия пользователем.

Так же, как и проблема визуальной перегруженности, когнитивную нагрузку на память пользователя будет вызывать большое количество контента.

В юзабилити существует правило 7 + 2. В соответствии с результатами исследования, которое было проведено Джорджем Миллером, кратковременная память может содержать одновременно от 7 до 9 сущностей. Этот факт часто используют, чтобы доказать необходимость сокращения числа элементов в навигационном меню до 7.

Если у вас есть слишком много информации, вы должны научиться так организовать ее, чтобы не напрягать пользователей.

Для этого необходимо создать ясную визуальную иерархию:

- более важный элемент должен быть самым заметным на экране;
- элементы, логически связанные между собой, также должны быть связаны визуально;
- элементы, которые представляются в виде вложений, должны являться частями друг друга.

Кроме этого, необходимо разделять веб-страницы на четкие области.

При написании текстов для веб-сайтов необходимо придерживаться принципа перевернутой пирамиды. Этот принцип соблюдает сам гурю юзабилити, Якоб Нильсен. Статья должна начинаться с итогового вывода, за которым следуют ключевые моменты, а завершаться наименее важной для читателей информацией. Это оптимально для веб-сайта, где пользователь хочет получить информацию максимально быстро.

Самой большой проблемой в когнитивной перегрузке является неоднозначный интерфейс.

Пользователь никогда не должен тратить много времени на выяснение того, как выполнить то или иное действие, либо задумываться о том, что обозначает тот или иной значок. Необходимо использовать принятые условности и общие правила.

В графических интерфейсах используется метод метафор. Он позволяет пользователю не создавать новую модель, а воспользоваться готовой моделью, которую он ранее построил по другому поводу. Самая известная метафора, применяемая и в Windows и в Macintosh, – это метафора «десктоп» (рабочий стол). Еще один пример метафоры в интерфейсе – устройство программ для проигрывания звуков на компьютере. Исторически сложилось, что вся аудиотехника имеет почти одинаковый набор кнопок.

Не нужно изобретать колесо, лучше использовать визуальные подсказки, которые пользователи уже знают из других веб-сайтов. Если что-либо нельзя сделать «самопроизвольно» понятным, всегда можно сделать это везде одинаково, чтобы пользователи обучались только один раз. Например, кран с горячей водой всегда маркируют красным цветом, а кран с холодной – синим.

Основные программы пакета Microsoft Office – Word и Excel – разрабатывались с нуля программистами компаний. Другие же были куплены на стороне: FrontPage, например, у Vermeer, или Visio – у Visio. Что у этих программ общего? Дизайн обеих создавался с самого начала так, чтобы они выглядели и работали как приложения Microsoft Office.

Последовательность в реализации интерфейса есть первое условие качества результата.

**Заключение.** Разрабатывать интерфейс пользователя необходимо по принципам юзабилити, т. е. с использованием законов психологии восприятия, теории передачи информации, а также психофизиологии человека. Это даст возможность удовлетворить потребности пользователя, снизить когнитивную нагрузку на пользователя, уменьшить время для поиска нужной информации, нивелировать риск ошибки при работе на компьютере

### Литература

1. Купер А., Рейман Р., Кронин Д. Об интерфейсе. Основы проектирования взаимодействия. СПб.: Символ-Плюс, 2009. 649 с.
2. Нильсен Я., Лоранжер Х. Веб-дизайн: удобство использования Web-сайтов. М.: Вильямс, 2007. 368 с.
3. Уэйншенк С. Интуитивный веб-дизайн. М.: Эксмо, 2011. 160 с.

### References

1. Cooper A., Rayman P., Cronin D. *Ob interfejse. Osnovy proektirovaniya vzaimodeystviya* [On the interface. Fundamentals of interaction]. St. Petersburg, Symbol-Plus Publ., 2009. 649 p.

2. Nielsen J., Lorzher H. *Veb-dizayn: udobstvo ispol'zovaniya Web-saytov* [Web design: usability of Web-sites]. Moscow, Williams Publ., 2007. 368 p.

3. Ueynshenk S. *Intuitivnyy web-dizayn* [Intuitive Web design]. Moscow, Eksmo Publ., 2011. 160 p.

#### **Информация об авторах**

**Кишкурно Татьяна Владимовна** – старший преподаватель кафедры информатики и веб-дизайна. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: kishkurno\_tv@mail.ru

**Брусенцова Татьяна Палладьевна** – ассистент кафедры информатики и веб-дизайна. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tpb@tut.by

#### **Information about the authors**

**Kishkurno Tatjana Vadimovna** – senior lecturer, the Department of Informatics and Web-design. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kishkurnotv@mail.ru

**Brusentsova Tatjana Palladjevna** – assistant, the Department of Informatics and Web-design. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tpb@tut.by

*Поступила 14.04.2017*

# СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ОБУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ

---

УДК 004.021

**В. Л. Колесников, А. И. Бракович**

Белорусский государственный технологический университет

## **ГРАФИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ УСЛОВИЙ РАБОТЫ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО КОМПЛЕКСА НА ОСНОВЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ**

Виртуальный производственный комплекс представляет собой компьютерную программную системную математическую модель, которая воспроизводит основные функциональные возможности реального прототипа в режиме реального времени. Многообразие условий работы производственного комплекса определяют 16 параметров окружения, 9 параметров для оперативного управления, 6 параметров результатов, оценивающих качество и себестоимость продукции, загрязнение окружающей среды. Работа осуществляется в режиме реального времени и сопровождается фиксацией условий и результатов в базе данных, которая содержит информацию по 26 столбцам. Системным временем является время выработки одной тонны продукции. Размерность базы данных для анализа составляет 500–1000 строк и 26 столбцов. Интерпретировать результаты очень сложно. Нейронные сети оказываются мощным средством не только для классификации данных, но и для графического решения оптимизационных задач в разнообразных формулировках. По простоте и гибкости настройки этот метод оптимизации превосходит классические и градиентные методы. Поскольку в данном случае используются не традиционные математические модели, а базы данных результатов наблюдений за длительный период времени, то предлагаемый метод обладает наибольшей оперативностью и экспрессностью в подстройке задач при изменении текущих условий функционирования производственного комплекса.

**Ключевые слова:** графическая оптимизация, имитационное моделирование, программное средство, нейронные сети.

**V. L. Kolesnikov, A. I. Brakovich**

Belarusian State Technological University

## **GRAPHIC OPTIMIZATION OF WORKING CONDITIONS FOR INDUSTRIAL ENTERPRISE ON THE BASIS OF NEURAL NETWORKS**

The virtual industrial enterprise is a computer program, based on a system mathematical model that reproduces the basic functionality of a real prototype in real time. The variety of working conditions of the virtual industrial enterprise is determined by 16 environmental parameters, 9 parameters for operational control, 6 parameters of results, assessing the quality and cost of production, environmental pollution. The work is carried out in real time and is accompanied by fixing the conditions and results in the database, which contains information on 26 columns. System time is the time taken to produce one ton of product. The size of the database for analysis is 500–1000 rows and 26 columns. To interpret the results is a very difficult task. Neural networks are a powerful tool not only for data classification, but also for graphical optimization tasks in a variety of formulations. By the simplicity and flexibility of the setting, this method of optimization is superior to classical and gradient methods. Since in this case, not traditional mathematical models are used, but databases of results of observations over a long period of time, the proposed method has the greatest efficiency and speed in adjusting tasks in changing current conditions of the virtual industrial enterprise.

**Key words:** graphic optimization, simulation, software tool, neural networks.

**Введение.** В предыдущих работах авторов разработано интерактивное программное средство, имитирующее все основные условия функционирования реального предприятия [1]. Виртуальный производственный комплекс представляет собой компьютерную программную

системную математическую модель, которая воспроизводит основные функциональные возможности реального прототипа в режиме реального времени [2].

Многообразие условий работы производственного комплекса определяют 16 параметров

окружения, 9 параметров для оперативного управления, 6 параметров результатов, оценивающих качество и себестоимость продукции, загрязнение окружающей среды. Работа осуществляется в режиме реального времени и сопровождается фиксацией условий и результатов в базе данных, которая содержит информацию по 26 столбцам. Системным временем является время выработки одной тонны продукции. Таким образом, размерность базы данных для анализа составляет 500–1000 строк и 26 столбцов.

**Основная часть.** В предлагаемом примере снижена размерность решаемой задачи. Количество признаков, характеризующих условия, уменьшено до 9. Задача классификации данных этого примера методом нейронных сетей решается быстро и просто. Интерпретировать результаты очень сложно. Только парных взаимодействий придется рассмотреть 36, а с учетом взаимовлияния различных значений внутри признаков это количество возрастает до 630.

В таких случаях эффективным оказывается применение метода прогрессивной централизации. Для снижения размерности решаемой задачи можно, например, сосредоточиться на проблеме коррекции технологического режима для различных сезонных условий.

Для моделирования накопления результатов длительных наблюдений за работой комплекса мы использовали возможность генерирования и фиксации сочетаний всевозможных случайных значений природных сезонных погодных условий, ценовой ситуации на рынке сырья, химикатов, воды, энергии, возмещения ущерба, нанесенного окружающей среде производственной деятельностью, значений управляющих воздействий с синхронным вычислением каче-

ства получаемой продукции, загрязнения атмосферы и проточного водоема, суммы удельных энерготехнологических затрат (рис. 1).

База данных, приведенная на рис. 2, служит просто одним из возможных примеров накопленной информации. Подобных плохо структурированных сведений скапливается немало на каждом предприятии из журналов ОТК и лабораторий, синоптических карт, бухгалтерских отчетов и других источников.

В среде JMP SAS можно заказать получить ответ в виде оптимальных значений расхода волокна и степени помола (главные управляющие параметры), при которых обеспечивается минимум загрязнения (рис. 3, 4). Тем самым мы уходим от необходимости рассматривать все остальные парные взаимодействия. Перемещениями ползунков мы добиваемся такого их положения, при котором на графике отмечается минимальное значение загрязнения. Перемещения оказываются целенаправленными, и отпадает надобность в их полном переборе. Перемещение ползунка Response Greed Slider синхронно перемещает решетку значений аппликаты (загрязнение водоема), а галочка в окошке фиксирует минимальное значение (0.17886).

Альтернативным инструментом для проведения аналогичных вычислений является надстройка Microsoft Excel «Интеллектуальный анализ данных с помощью SQLServer» (рис. 5).

На рис. 5 остались только два незадаанных атрибута – «Допустимо Al» и «Расход полимера». Оказалось, что для выпуска продукции заданного качества (прочность 4,78–6,28) при расходе волокна 104,3–132,2 и степени помола 21,7–27,2 расход полимера должен быть в пределах 63,5–110,1, а содержание сульфата алюминия не должно превышать 0,093.

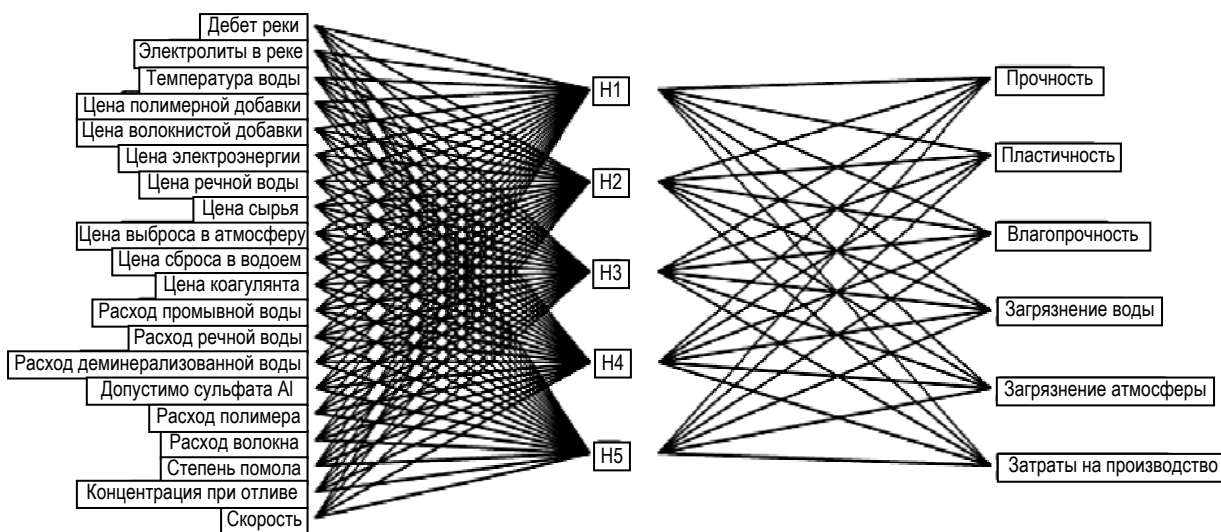


Рис. 1. Архитектура нейронной сети

№	Дебет реки	Электролиты в реке	Температура воды	Цена полимерной добавки	Цена волокнистой добавки	Цена электроэнергии	Цена речной воды	Цена сырья	Цена выброса в атмосферу	Цена сброса в водоем	Цена коагулянта	Расход промывной воды	Расход речной воды	Расход деминерализованной воды	Допустимо сульфата Al	Расход полимера	Расход волокна	Степень помола	Концентрация при отливе	Скорость	Прочность	Влажность	Загрязнение воды	Загрязнение атмосферы	Суммарный расход	
1	12.69...	0.006...	15.35	2.74	1.72	0.066	2.41	51.34	0.55	0.30	0.13	7470...	1106...	197.26	0.0500	74.59	100.02	20.01	0.700	149.99	1.89	9.66	10.57	0.2447	0.1474	759.13
2	12.53...	0.008...	15.53	2.77	1.74	0.057	2.54	53.16	0.52	0.29	0.13	7456...	1184...	191.25	0.0500	74.58	99.99	20.00	0.700	149.97	1.71	10.06	10.89	0.0917	0.1793	831.57
3	12.18...	0.007...	15.69	2.66	1.77	0.068	2.59	51.20	0.56	0.28	0.13	7364...	1189...	195.13	0.0500	74.58	99.96	20.00	0.700	149.97	1.71	10.06	10.89	0.0917	0.1793	802.40
4	12.76...	0.008...	15.94	2.53	1.69	0.069	2.53	53.08	0.59	0.29	0.13	7426...	1178...	203.84	0.0500	75.00	99.95	20.00	0.700	149.99	1.63	10.23	11.03	0.2307	0.1754	777.51
5	13.02...	0.007...	15.97	2.48	1.72	0.057	2.56	50.77	0.57	0.30	0.13	7605...	1174...	200.31	0.0500	75.02	99.96	20.01	0.700	149.98	1.57	10.30	11.16	0.4203	0.1723	758.14
6	12.87...	0.008...	16.07	2.57	1.70	0.066	2.48	49.02	0.56	0.30	0.13	7788...	1182...	198.59	0.0500	75.03	100.00	20.00	0.700	150.01	1.51	10.50	11.26	0.5298	0.1760	754.27
7	12.77...	0.007...	16.15	2.60	1.77	0.066	2.45	51.29	0.55	0.29	0.13	7388...	1200...	202.02	0.0500	75.03	100.03	20.00	0.700	150.04	1.46	10.59	11.34	0.5910	0.1761	776.16
8	12.35...	0.008...	16.19	2.64	1.69	0.068	2.54	49.47	0.51	0.29	0.13	7603...	1216...	196.24	0.0500	75.01	100.05	19.99	0.700	149.99	1.44	10.85	11.38	0.6323	0.1777	773.62
9	12.12...	0.008...	16.21	2.64	1.70	0.069	2.40	50.90	0.53	0.30	0.13	7679...	1220...	199.08	0.0500	75.01	100.03	19.99	0.700	149.98	1.43	10.67	11.40	0.6710	0.1782	777.95
10	12.96...	0.007...	16.20	2.63	1.68	0.068	2.45	52.79	0.57	0.30	0.13	7714...	1208...	208.32	0.0500	75.01	100.00	20.00	0.700	150.04	1.44	10.64	11.38	0.6967	0.1789	766.78
11	12.23...	0.007...	16.16	2.62	1.69	0.067	2.48	49.83	0.54	0.29	0.13	7540...	1191...	206.17	0.0500	75.01	99.98	20.00	0.700	150.05	1.46	10.80	11.34	0.4020	0.1792	770.41
12	11.62...	0.008...	16.09	2.63	1.66	0.066	2.42	50.69	0.54	0.28	0.13	7356...	1178...	203.01	0.0500	74.99	99.98	20.00	0.700	150.00	1.50	10.52	11.28	0.7040	0.1795	765.24
13	12.55...	0.006...	16.01	2.61	1.74	0.057	2.51	49.23	0.56	0.28	0.13	7403...	1177...	205.02	0.0500	74.97	100.00	20.00	0.700	150.00	1.54	10.43	11.20	0.7199	0.1797	773.67
14	13.28...	0.008...	15.91	2.57	1.61	0.068	2.60	46.71	0.56	0.29	0.13	7556...	1188...	198.46	0.0500	74.97	100.01	20.00	0.700	149.98	1.58	10.31	11.10	0.7403	0.1789	765.49
15	12.38...	0.007...	15.80	2.53	1.71	0.059	2.54	48.57	0.56	0.28	0.13	7550...	1159...	198.84	0.0500	74.99	100.02	20.00	0.700	149.99	1.65	10.19	11.00	0.7462	0.1801	760.75
16	12.35...	0.007...	15.69	2.55	1.67	0.067	2.54	47.69	0.60	0.28	0.13	7437...	1200...	207.31	0.0500	75.01	100.00	20.01	0.700	149.95	1.72	10.05	10.89	0.7415	0.1802	757.58
17	13.41...	0.008...	15.57	2.62	1.79	0.064	2.50	48.17	0.55	0.28	0.13	7467...	1188...	203.90	0.0500	75.01	99.98	20.00	0.700	150.02	1.78	9.92	10.77	0.7446	0.1803	774.26
18	12.91...	0.008...	15.48	2.66	1.74	0.063	2.43	51.39	0.57	0.28	0.13	7513...	1172...	199.94	0.0500	75.00	99.97	20.00	0.700	150.04	1.83	9.79	10.67	0.7551	0.1803	774.54
19	11.84...	0.008...	15.36	2.68	1.76	0.068	2.52	49.18	0.53	0.29	0.13	7597...	1163...	201.42	0.0500	74.99	99.98	20.00	0.700	150.01	1.88	9.68	10.58	0.7586	0.1804	775.47
20	12.25...	0.007...	15.28	2.60	1.66	0.066	2.51	49.68	0.53	0.29	0.13	7381...	1170...	194.66	0.0500	74.99	100.01	19.99	0.700	150.02	1.93	9.58	10.50	0.7444	0.1804	758.94
21	12.57...	0.007...	15.21	2.57	1.71	0.066	2.44	50.12	0.54	0.29	0.13	7249...	1189...	193.44	0.0500	75.00	100.02	20.00	0.700	150.02	1.97	9.50	10.43	0.7397	0.1805	759.32
22	12.02...	0.008...	15.16	2.59	1.70	0.064	2.48	47.11	0.58	0.29	0.13	7325...	1208...	202.10	0.0500	75.01	100.02	20.00	0.700	149.98	1.99	9.46	10.38	0.7474	0.1805	758.24
23	12.09...	0.008...	15.12	2.63	1.72	0.063	2.44	49.57	0.56	0.30	0.13	7390...	1220...	199.95	0.0500	75.00	100.01	20.00	0.700	150.00	2.01	9.41	10.35	0.7510	0.1805	767.59
24	12.53...	0.007...	15.11	2.63	1.66	0.064	2.48	50.29	0.53	0.29	0.13	7296...	1218...	196.84	0.0500	75.00	100.01	19.99	0.700	150.04	2.01	9.39	10.34	0.7417	0.1804	752.17
25	12.66...	0.007...	15.11	2.57	1.63	0.067	2.61	49.98	0.57	0.29	0.13	7245...	1209...	198.31	0.0500	75.00	100.01	20.00	0.700	150.00	2.02	9.39	10.34	0.7359	0.1804	756.47
26	12.96...	0.007...	15.12	2.61	1.64	0.069	2.66	53.73	0.57	0.28	0.13	7422...	1206...	193.11	0.0500	75.02	100.01	20.00	0.700	149.94	2.01	9.41	10.35	0.7478	0.1805	754.81
27	12.92...	0.008...	15.15	2.53	1.69	0.069	2.53	52.28	0.55	0.29	0.13	7641...	1213...	191.80	0.0500	75.03	100.00	20.01	0.700	149.96	2.00	9.44	10.37	0.7630	0.1805	761.44
28	12.39...	0.007...	15.18	2.64	1.74	0.058	2.52	51.40	0.57	0.29	0.14	7544...	1231...	201.70	0.0500	75.02	99.98	20.01	0.700	149.98	1.98	9.47	10.40	0.7651	0.1805	782.33
29	12.69...	0.008...	15.21	2.74	1.71	0.068	2.43	52.46	0.53	0.29	0.14	7528...	1248...	201.85	0.0500	75.00	99.96	20.00	0.700	149.98	1.96	9.51	10.43	0.7671	0.1804	793.09
30	11.87...	0.008...	15.24	2.73	1.71	0.070	2.49	49.93	0.50	0.29	0.13	7551...	1253...	198.23	0.0500	56.88	99.96	20.00	0.700	150.02	1.79	7.77	9.17	0.7577	0.1453	702.62
31	11.63...	0.007...	15.27	2.61	1.68	0.072	2.53	49.83	0.54	0.29	0.13	7697...	1242...	201.09	0.0640	56.90	99.90	20.00	0.700	150.07	1.47	7.22	10.41	0.7156	0.1408	692.22
32	12.76...	0.008...	15.28	2.46	1.77	0.072	2.44	51.12	0.56	0.30	0.13	7623...	1747...	197.90	0.0640	56.99	100.02	20.01	0.700	150.03	1.47	7.24	10.42	0.7695	0.1404	700.85
33	12.61...	0.007...	15.28	2.43	1.74	0.070	2.47	49.43	0.56	0.31	0.12	7437...	1726...	633.79	0.0640	56.99	100.05	20.00	0.700	149.98	1.46	7.24	10.43	0.6941	0.1393	796.01
34	11.81...	0.008...	15.26	2.52	1.77	0.068	2.46	52.27	0.58	0.30	0.12	7396...	5264...	666.86	0.0640	56.99	100.06	20.00	0.700	150.00	1.47	7.22	10.41	0.5225	0.1385	784.46
35	12.70...	0.007...	15.23	2.67	1.65	0.068	2.46	51.41	0.57	0.29	0.12	9007...	5301...	669.71	0.0640	56.99	100.03	19.99	0.700	150.01	1.40	7.19	10.58	0.6945	0.1390	785.20
36	13.48...	0.008...	15.18	2.75	1.69	0.069	2.58	48.34	0.53	0.30	0.13	9147...	5342...	695.02	0.0640	56.99	148.98	20.00	0.700	149.98	1.58	8.36	11.18	0.7358	0.1408	929.27

Рис. 2. Автоматическая запись накапливаемой информации

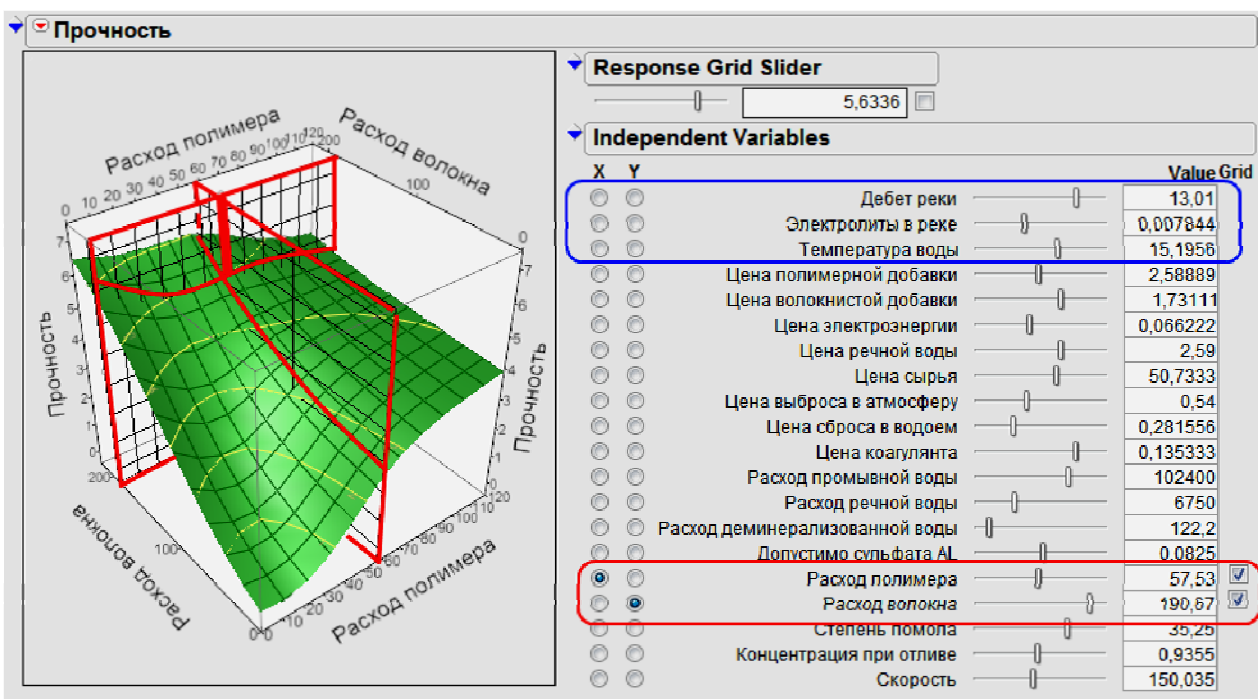


Рис. 3. Определение рекомендательного режима получения заданного качества продукции в сезонных условиях

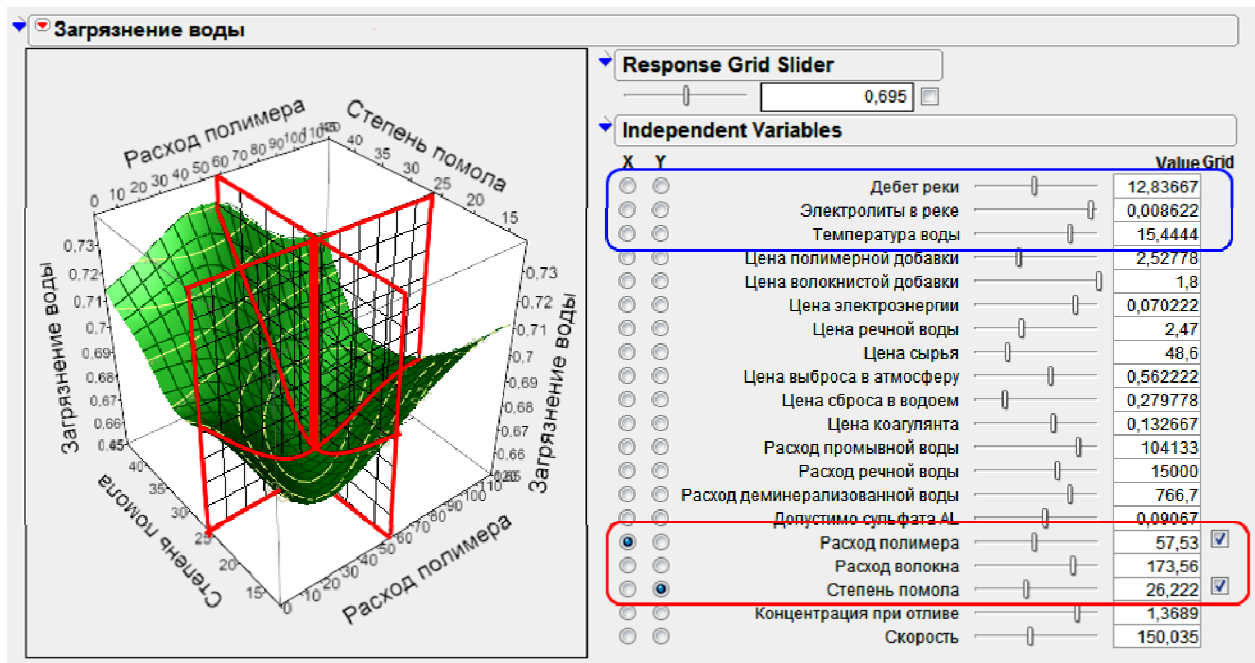


Рис. 4. Определение рекомендательного режима получения минимального загрязнения водоема в сезонных условиях

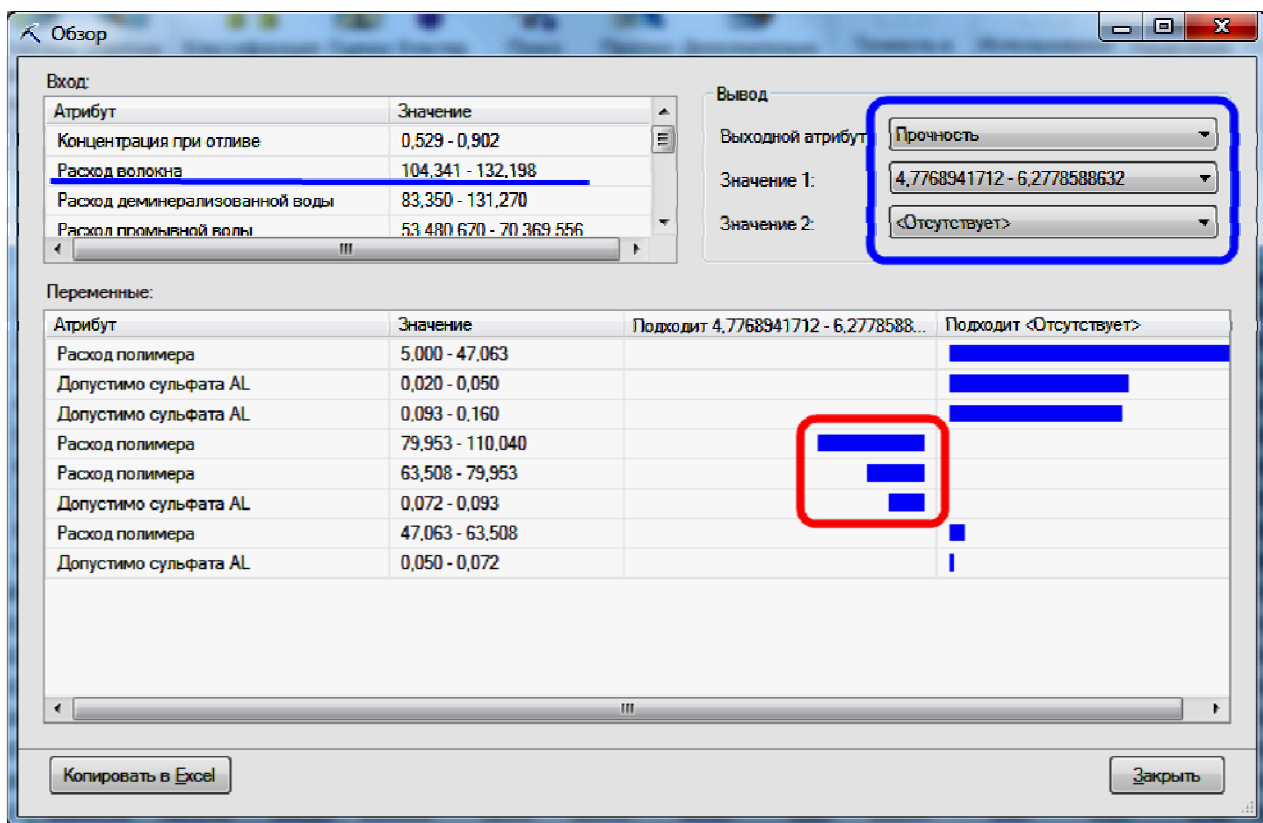


Рис. 5. Реализация рабочего примера в Microsoft Excel

Здесь просматриваются сюжеты интересных вычислительных экспериментов. Обычно основными подстраиваемыми параметрами являются «Расход полимера», «Расход волокна», «Степень помола», а главным «возбудителем спокойствия» выступает «Допустимое содержа-

ние сульфата алюминия». Значит, если закрепить на среднем уровне значения всех входных атрибутов, кроме «Расход полимера», «Расход волокна», «Степень помола», а «Допустимое содержание сульфата алюминия» закрепить на нижнем уровне, то для заданных требований по



качеству мы получим оптимальный технологический режим по трем управляющим воздействиям. Фиксируем его и далее, последовательно изменяя значения входного атрибута «Допустимое содержание сульфата алюминия», мы получим необходимые коррекции оптимальных значений параметров технологического режима в различных условиях солевого состава речной воды. Те же самые действия можно повторить для разных требований к качеству продукции.

**Заключение.** Нейронные сети оказываются мощным средством не только для классификации данных, но и для графического решения

оптимизационных задач в разнообразных формулировках.

По простоте и гибкости настройки этот метод оптимизации превосходит классические и градиентные методы.

Поскольку в данном случае используются не традиционные математические модели, а базы данных результатов наблюдений за длительный период времени, то предлагаемый метод обладает наибольшей оперативностью и экспрессностью в подстройке задач при изменении текущих условий функционирования производственного комплекса.

### Литература

1. Колесников В. Л., Урбанович П. П., Жарский И. М. Компьютерное моделирование и оптимизация химико-технологических систем. Минск: БГТУ, 2004. 532 с.
2. Kolesnikov V., Urbanovich P., Brakovich A. Modeling and software implementation of fibrous waste disposal processes // *New Electrical and Electronic Technologies and their Industrial Implementation – NEET' 2015: proc. of the 9-th Intern. conf. Lublin, 2015.* P. 37.

### References

1. Kolesnikov V. L., Urbanovich P. P., Zharsky I. M. *Komp'yuternoe modelirovanie i optimizatsiya khimiko-tekhnologicheskikh sistem* [Computer simulation and optimization of chemical processes: manual for universities]. Minsk, Belarusian State Technological University, 2004. 532 p. (In Russian)
2. Kolesnikov V., Urbanovich P., Brakovich A. Modeling and software implementation of fibrous waste disposal processes. *New Electrical and Electronic Technologies and their Industrial Implementation – NEET' 2015: proc. of the 9-th Intern. conf. Lublin, 2015,* p. 37.

### Информация об авторах

**Колесников Виталий Леонидович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [vitalykolesnikov@mail.ru](mailto:vitalykolesnikov@mail.ru)

**Бракович Андрей Игоревич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [brakovich@yandex.ru](mailto:brakovich@yandex.ru)

### Information about the authors

**Kolesnikov Vitalii Leonidovich** – DSc (Engineering), Professor, Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [vitalykolesnikov@mail.ru](mailto:vitalykolesnikov@mail.ru)

**Brakovich Andrei Igorevich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [brakovich@yandex.ru](mailto:brakovich@yandex.ru)

Поступила 14.04.2017

УДК 004.853

**Н. И. Гурин, Я. А. Жук**

Белорусский государственный технологический университет

**АЛГОРИТМ ПОДГОТОВКИ ТЕКСТА  
ОБУЧАЮЩЕЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ  
К СЕМАНТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

Статья посвящена описанию алгоритма подготовки текста информационной системы к семантическому анализу. Основными блоками данного алгоритма являются морфологический анализ слов, синтаксический анализ предложений и формирование базы типов семантических связей. С целью оптимизации в алгоритме предусмотрено параллельное выполнение процессов синтаксического анализа и формирования запроса на вставку типов семантических связей, полученных на основании морфологического анализа, в таблицу реляционной базы данных. Результатами алгоритма являются база типов связей дуг и набор подготовленных к семантическому анализу предложений. Морфологический анализ необходим как для составления базы типов связей семантической сети, так и для синтаксического анализа. В рамках синтаксического анализа предложений предлагается преобразовать текст в соответствии с рядом правил. Первое правило состоит в удалении предложений и оборотов, не несущих смысловой нагрузки. Второе – в разрешении анафор в исходном тексте, т. е. замене местоимений на обозначаемые ими информационные единицы. Третье – в преобразовании сложносочиненных предложений и предложений с однородными сказуемыми в набор самостоятельных простых предложений. Выполнение данных правил обеспечивает эффективность выявления связей семантической сети информационной системы.

**Ключевые слова:** морфологический анализ, синтаксический анализ, обработка естественного языка, семантические сети.

**N. I. Gurin, Ya. A. Zhuk**

Belarusian State Technological University

**ALGORITHM OF THE PREPARING E-LEARNING SYSTEM  
FOR SEMANTIC ANALYSIS**

The article describes the algorithm for preparing text information system for semantic analysis. The main blocks of this algorithm are morphological analysis of words, parsing sentences and building a base of semantic relations types. The algorithm includes parallel execution of the processes of parsing sentences and the formation of the insert request for semantic relations types, obtained on the basis of morphological analysis, into a table of a relational database. Results of the algorithm are the database of semantic relationships types and the set of prepared for the semantic analysis sentences. Morphological analysis is required both for generating semantic relationships types database and for parsing sentences. The base of the parsing sentences consists of three rules. The first rule is to remove parts of sentences, that does not bear semantic load. The second rule is to resolve anaphor in the source text, i. e. make the replacement of pronouns on the referred information items. The third rule is to convert compound sentences and sentences with homogeneous predicates in the set of independent simple sentences. These rules provide the further identification of semantic network relations.

**Key words:** morphological analysis, syntax analysis, natural language processing, semantic networks.

**Введение.** Создание диалоговой информационной системы, способной точно отвечать на поставленные вопросы одиночными предложениями, требует составления базы знаний, содержащей понятия предметной области и связи между ними. Качественное извлечение знаний из текстов информационных систем остается актуальной задачей для разработчиков интеллектуальных систем. Общими чертами существующих алгоритмов извлечения знаний является выделение этапов морфологического, синтаксического и семантического анализа [1]. Наличие подготовительных этапов морфологическо-

го и синтаксического анализа обусловлено неспособностью алгоритмов семантического анализа обрабатывать предложения произвольной структуры и необходимостью предварительной подготовки базы типов семантических связей, которая будет использоваться при выявлении новых связей семантической сети.

Существующие программные средства морфологического анализа, построенные на анализе псевдоокончаний слов, позволяют достаточно точно определить морфологические признаки слов [2]. В связи с фактически произвольным порядком слов в предложениях на

русском языке, синтаксический анализ предложений является более сложной задачей [3]. Однако, в рамках русского языка существует научный функциональный стиль, который отличается подчеркнутой логичностью и точностью, достигаемыми путем использования четкой структуры предложений и специальной терминологии. Учет данных особенностей стиля позволил определить ключевые правила для подготовки текста обучающей информационной системы, составленного в научном функциональном стиле, к преобразованию в семантическую сеть диалогового модуля.

**Основная часть.** Для выполнения задач подготовки текста к семантическому анализу был разработан соответствующий алгоритм. Он включает в себя блоки морфологического анализа, формирования запроса на вставку типов связей в таблицу реляционной базы данных и преобразования сложных предложений, характерных для научного функционального стиля, в простые предложения, над которыми можно будет выполнить операцию актуального членения предложения в ходе дальнейшего семанти-

ческого анализа. Следует отметить возможность параллельного выполнения процессов формирования запроса на вставку типов семантических связей в базу данных и подготовки текста к актуальному членению предложений. Блок-схема алгоритма подготовки текста к семантическому анализу показана на рис. 1.

Нами обнаружена в текстах научного стиля высокая встречаемость особой структуры предложений, используемая с целью обеспечения недвусмысленности высказываний. Данная структура состоит из трех частей: подлежащего с относящимися к нему дополнениями и определениями, сказуемого и других дополнительных членов предложения, связанных со сказуемым, а не с подлежащим. Важно отметить, что подлежащее с набором связанных с ним вспомогательных членов предложения в тексте научного стиля образует единый термин. Таким образом, сказуемое в таких предложениях находится между двумя информационными единицами, что позволяет автоматизировать выявление смысловых единиц после нахождения сказуемых.

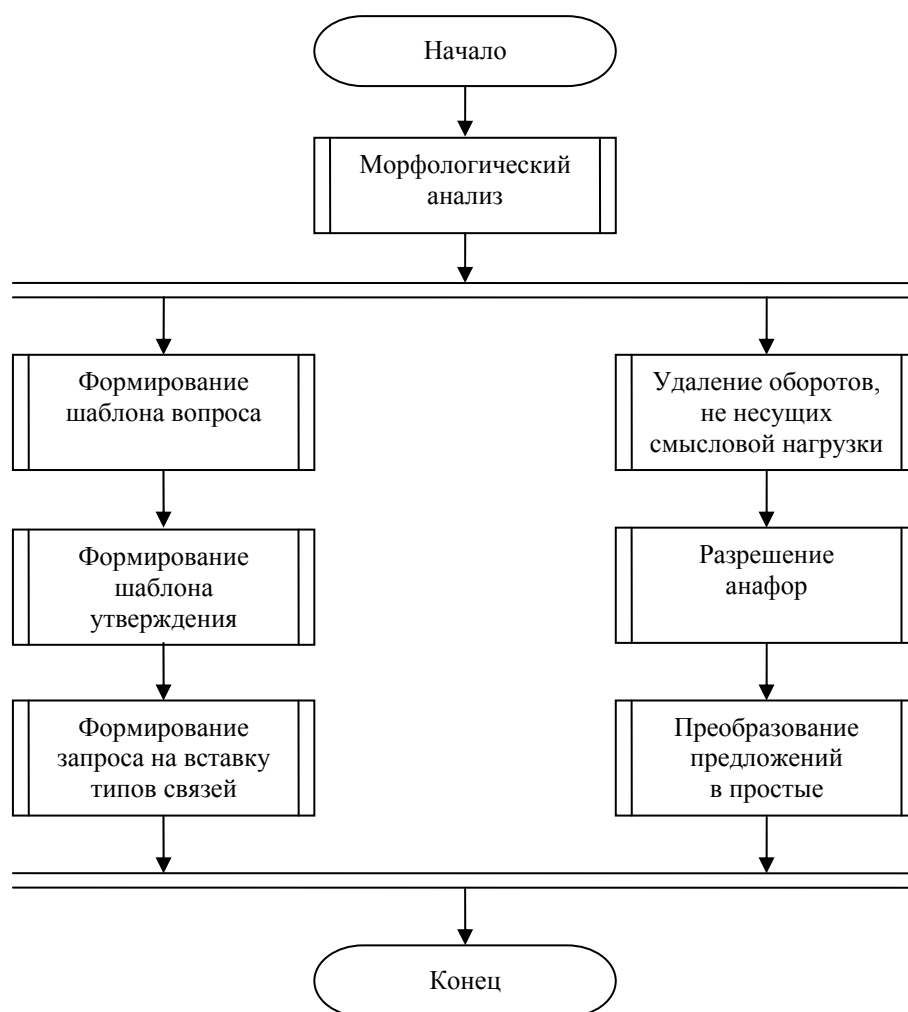


Рис. 1. Блок-схема алгоритма подготовки текста к семантическому анализу

Поскольку в текстах научного стиля встречаются предложения и с другой структурой, целесообразно создать список всех структур предложений, включив в него универсальные для всех текстов типы связей, для последующего выявления информационных единиц в ходе семантического анализа. Примером таких универсальных семантических связей являются причинно-следственные связи, которым соответствуют шаблоны предложений «если [А], то [Б]» и «[А] потому, что [Б]». Важно отметить, что части таких предложений, соответствующие тегам [А] и [Б], часто следует рассматривать отдельно как самостоятельные предложения, для которых нужно создавать шаблон при помощи описанного алгоритма. Определить случаи, когда такое распознавание необходимо, можно по наличию в данных частях предложений сказуемых, выявляемых по морфологическим признакам.

Благодаря принадлежности большинства сказуемых к определенным частям речи и морфологическим формам существует возможность автоматической генерации списка шаблонов предложений. В основе данных шаблонов лежат сказуемые с обрезанными псевдоокончаниями. Согласно нашим наблюдениям, в качестве сказуемых в текстах научного стиля наиболее часто выступают глаголы в форме третьего лица, краткие причастия и краткие прилагательные. Для обозначения псевдоокончаний глаголов используются теги [Г1], [Г2] в соответствии со спряжением. Также используется тег [Г3] для обозначения псевдоокончаний глаголов, у которых при спряжении изменяется последняя буква основы, например, «может» – «могут». Для окончаний кратких причастий и прилагательных используется тег [О].

Разрабатываемая диалоговая информационная система, нацеленная на формулирование точных ответов на поставленные вопросы одиночными предложениями, ориентирована на выражение семантических связей определенного типа пар из шаблонов вопросительного и утвердительного предложений. Шаблон вопросительного предложения представляет собой тег вопросительного слова [В], сказуемое с тегом псевдоокончания и тег подлежащего [А]. Таким образом, обнаружение сказуемых при помощи морфологического анализа позволяет составить базу типов связей и соответствующих им шаблонов предложений. Важно отметить, что отсутствие шаблонов предложений для прочтения семантической связи в обратном направлении требует коррекции модулей семантического анализа и диалога с пользователем.

Выявленные закономерности были использованы в специальном программном средстве,

выполняющем генерацию базы типов связей семантической сети по исходному тексту. Так, из предложения «Уравнение Нернста является чрезвычайно полезным уравнением, т. к., помимо расчёта электродных потенциалов, позволяет проводить вычисления различных термодинамических характеристик веществ и реакций, протекающих в гальванических элементах» были выявлены два сказуемых: «позволяет» и «является». После замены окончаний данных глаголов на соответствующие теги и добавления тегов, обозначающих положение других членов вопросительного и утвердительного предложений относительно сказуемого, был составлен следующий запрос на вставку в таблицу типов связей семантической сети:

```
INSERT INTO шаблоны VALUES
  ("[В] позволя[Г1] [А]", "[А] позволя[Г1] [Б]", "_", "_", "_", "_", "_", "_", "_", "_", "_", "_"),
  ("[В] явля[Г1]ся [А]", "[А] явля[Г1]ся [Б]", "_", "_", "_", "_", "_", "_", "_", "_", "_")
```

В ходе ручной подготовки текстов научного стиля к семантическому анализу был выработан ряд правил преобразования предложений для их корректного актуального членения.

Первое правило заключается в удалении вводных и вставных конструкций. Данные конструкции не несут собственной смысловой нагрузки и используются только для связи семантически нагруженных фрагментов в единый текст. При формировании диалоговой системой точечных ответов из одного предложения в данных оборотах нет необходимости. Так, в предложении «К тому же величина  $E_{\text{оиф}}$  существенно зависит от структуры пограничного переходного слоя, в котором распределяется диффузионный поток электролита; а структура слоя, в свою очередь, определяет способами создания и стабилизации жидкостного соединения двух растворов» в соответствии с данным правилом удаляются обороты «к тому же», «а» и «в свою очередь». В результате база знаний будет пополнена семантическими связями, соответствующими частям предложения «величина  $E_{\text{оиф}}$  существенно зависит от структуры пограничного переходного слоя, в котором распределяется диффузионный поток электролита» и «структура слоя определяет способами создания и стабилизации жидкостного соединения двух растворов».

Кроме общих для всех текстов конструкций, к вспомогательным оборотам следует отнести некоторые обороты, включающие специфические для конкретного текста глаголы. Отличить глаголы во вспомогательных конструкциях от глаголов, выражающих семантические связи, можно по морфологическим признакам: глаголы во вспомогательных оборотах,

как правило, стоят в первом лице, а глаголы, выражающие семантические связи, – в третьем. Вспомогательными оборотами могут быть целые предложения, в которых сказуемым является глагол в форме первого лица. На рис. 2 приведены результаты реализации данного правила в разработанном приложении.

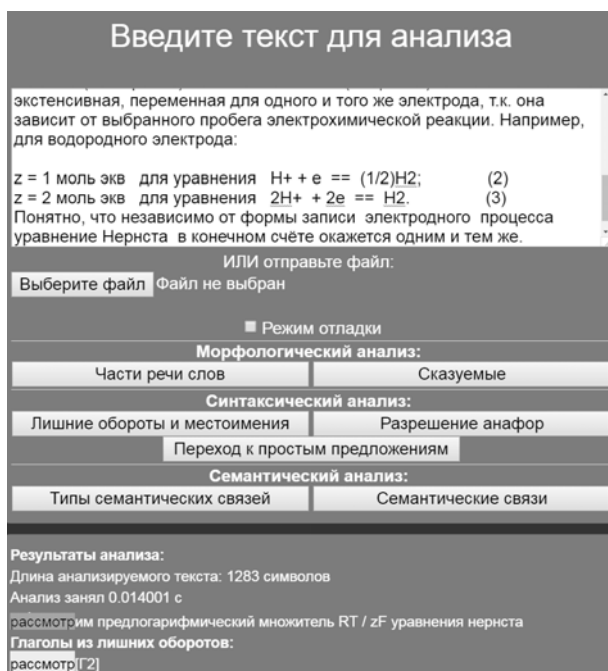


Рис. 2. Результаты поиска вспомогательных конструкций в тексте

Как видно из рисунка, реализованная функция выявления вводных и вставных конструкций обладает достаточно высокой скоростью обработки текста (порядка 280 символов в секунду) и успешно выявила вводное предложение по наличию в нем глагола в форме первого лица множественного числа «*рассмотрим*». Данное предложение является примером использования распространенного в текстах научного стиля приема «авторское мы». В таких случаях в предложениях невозможно выявить подлежащее, а значит и семантическую связь, поэтому такое предложение исключается из текста при семантическом анализе.

Второе правило заключается в разрешении анафор, т. е. местоимений и других оборотов, которые обозначают информационные единицы, встречавшиеся в тексте ранее. При формировании диалоговой системой точечных ответов из одного предложения применение анафор недопустимо, т. к. перед ответным предложением отсутствует необходимый контекст. В варианте текста для семантического анализа анафорические обороты, выступающие в роли информационных единиц, должны быть заменены на полные наименования информационных

единиц. Например, в соответствии с данным правилом во втором предложении пары «*Если имеется обратимо работающий ГЭ, то для него  $E > 0$  по определению (см. подразд. 2.4). Такой элемент способен произвести максимальную по величине полезную работу по переносу электрического заряда*» следует заменить оборот «*такой элемент*» на выражение «*обратимо работающий гальванический элемент*» из первого предложения.

Третье правило заключается в преобразовании сложных предложений и предложений с однородными сказуемыми, характерных для текстов научного стиля, в простые предложения с одним сказуемым. Именно благодаря данному правилу каждая связь семантической сети будет отвечать на конкретный вопрос, не затрагивая информационные единицы, стоящие в одном сложном предложении, а также выбирая связь конкретного типа из предложений, выражающих несколько семантических связей. При форматировании текста в соответствии с данным правилом фрагменты предложений, стоящие в скобках и являющиеся частями сложносочиненных предложений, будут нуждаться в дополнении подлежащим, а иногда и сказуемым. Для уточнений в скобках нужно подбирать глагольное сказуемое из универсальных для всех текстов слов в зависимости от контекста, а не искать в тексте. Для случаев, когда в скобках находится один термин, используется глагол «*называется*», а при наличии в скобках перечисления – глагол с предлогом «*состоит из*». Так, предложение «*Знак  $Q_{обр}$  совпадает со знаком  $\Delta S$  реакции, протекающей в гальваническом элементе: если энтропия увеличивается, то теплота поглощается из окружающей среды*» следует разбить на два предложения.

Важно отметить отсутствие необходимости в преобразовании сложноподчиненных предложений в простые. Например, в предложении «*Все химические гальванические элементы (ХГЭ) составлены из электродов, различающихся по своей химической природе*» выражение «*из электродов, различающихся по своей химической природе*» следует рассматривать как единую информационную единицу, т. к. благодаря причастному обороту выявляется новая информационная единица, отличная от термина «*электроды*».

**Заключение.** Описанная обработка текста позволяет приступить к автоматической генерации семантической сети [4]. Разработано программное средство, позволяющее составить базу типов связей семантической сети на основании результатов морфологического анализа. Для подготовки текста к семантическому ана-

лизу выработаны правила, позволяющие привести исходные предложения в соответствие с созданными или универсальными типами свя-

зей. Реализован автоматический поиск вспомогательных конструкций, не содержащих семантических связей, для их дальнейшего удаления.

### Литература

1. Представление знаний в информационных системах. Томск: Изд-во ТПУ, 2007. 160 с.
2. Большаков И. А., Большакова Е. И. Автоматический морфоклассификатор русских именных групп // Компьютерная лингвистика и интеллектуальные технологии: материалы Междунар. конф., Бекасово, 30 мая – 3 июня 2012 г. В 2 т. Т. 1: Основная программа конференции / РГГУ. М., 2012. С. 81–92.
3. Стилистический энциклопедический словарь русского языка / под ред. М. Н. Кожинной. М.: Флинта: Наука, 2011. 696 с.
4. Гурин Н. И., Жук Я. А. Генератор семантической сети информационной системы в таблицу реляционной базы данных // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 181–185.

### References

1. *Predstavlenie znanii v informatsionnykh sistemakh* [Knowledge representation in information systems]. Tomsk, TPU Publ., 2007. 160 p.
2. Bol'shakov I. A., Bol'shakova E. I. [Automated morphoclassifier of russian nominal groups] *Materialy Mezhdunarodnoy konferentsii (Komp'yuternaya lingvistika i intellektual'nye tekhnologii)* [Materials of the International conference (Computer linguistics and artificial intelligence)], Bekasovo, 2012, pp. 81–92 (In Russian).
3. *Stilisticheskiy entsiklopedicheskiy slovar'* [Stylistic encyclopedic dictionary]. Moscow, Flinta Publ., 2011. 696 p.
4. Gurin N. I., Zhuk Ya. A. The information system semantic network generator to a relational database table generator. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 181–185 (In Russian).

### Информация об авторах

**Гурин Николай Иванович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ngourine@mail.ru

**Жук Ярослав Александрович** – аспирант. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: zhuk@belstu.by

### Information about the authors

**Gurin Nikolay Ivanovich** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ngourine@mail.ru

**Zhuk Yaroslav Aleksandrovich** – PhD student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zhuk@belstu.by

Поступила 25.04.2017

УДК 004.65

**A. I. Brakovich, A. Hassan**  
Belarussian State Technological University

### **THE CLASSIFICATION AND BRIEF ANALYSIS OF EXISTING DEVELOPMENTS FOR THE SEARCH OPTIMIZATION IN DATABASES**

The article is devoted to the classification and brief analysis of existing developments, which can be used to optimize the search database in the cloud. The growing demand for service providers offering a broad range of cloud computing services for large numbers of users all over the world, leading to increase in the number of applications, the purpose of which is to process large data sets. The operation of the database in the cloud leads to the need to find new search instruments. The present level of development of information technology makes real-time information resources available. In the article the description of query optimization in the cloud SQL type database, NoSQL type and architecture-specific solutions are given. For all methods advantages and disadvantages are presented. Common to all methods is the lack of synthetic nature of the results, that is, that the introduction of statistics obtained in artificial systems created just for testing approach. However, relatively to large number of studies for a fairly young field suggests that the problem is urgent and the optimization of such developments in the near future will be in demand.

**Key words:** database, information technologies, optimization, cloud computing, information resources, forms and methods.

**Introduction.** The present level of development of information technology makes available real-time information resources of different volume and content. To facilitate the handling of large volumes of information are developed a variety of forms and methods, of its presentation, as well as search techniques, which is expressed, for example, in the creation of proprietary standards and systems, individually configurable by the user.

Widely used the notion of “information system” has virtually no single conceptual definition. Most often this concept is treated as a “complex of information collection and procedures: management, updates, information retrieval and post-processing – which allows to accumulate, store, update and provide information”.

Such user-utilitarian definition of information systems is associated with a well-established and already familiar, but, nevertheless, a special form of purposeful human activity – processing of information as the information about something material presented in the form of traditional paper documents or computer readable media. That is, the “system” reflects the essence of the functional relationship: the composition and structure of the information system is determined based on the requirements for the efficiency of the service the information needs of end-users, especially in terms of being in accumulated arrays of those documents, which are suspected to contain necessary information.

However, the crucial factor in determining the direction of developing modern information systems, is that the user interaction with information resources takes place in the informational self-service, when a user is substantially no longer divides his activities on information and basic one. It is especially important in the processes of infor-

mation support of scientific research, where the search object can not be clearly defined in advance, and when the originally defined search target may change in the course of the search. For example, when reading the documents found, and the fact of changing the target may not be comprehended researcher clearly, that in the end can lead to an incomplete search results.

In addition, using information resources, along with original author's presentation of the material in the majority are characterized by high systematic-dosing as well as almost obligatory presence of background information. Also it should be noted that the search tools and technologies used for the implementation of information requirements, depend on the type and condition of the problem to be solved by the user operations: the relation of his knowledge and ignorance about the object.

The functioning of modern information retrieval system is based on two assumptions:

- documents needed by a user, are united by the presence of some feature or combination of features;
- a user is able to specify this feature.

Both of these assumptions are not fulfilled in practice, and we can only talk about the likelihood of their implementation. Therefore, the information search process is typically a sequence of steps leading to the system by means of some results, and its completeness. In this case user's behavior as organizing principle of management search process, motivated by the need of not only information, but also of a variety of strategies, technologies and tools provided by the system. Concepts such as strategy and search technology, tools, and methods, models and algorithms are enough to consume, but different authors use these terms in different contexts [1].

**Main part.** For solving the problem of query optimization in the cloud storage system should be taken into account network topology.

*Query optimization in the cloud SQL type database.* Request handling is reduced to transform the high-level inquiry into the equivalent of a low-level form, and the main difficulty in this case is to ensure the efficiency of the conversion-specific cloud storage. Standard SQL statements use the connection, a selection, projections, groups (group-by). The key principles of this architecture are as follows:

- all files are stored in the local file system (e. g., file system Windows, Linux, etc.);
- cloud database is designed to store and manage huge amounts of index files and metadata. It should be noted that the cloud database and all its contents is deployed on top of a distributed file system;
- enter the query and get the results performed by the web user interface;
- upon receipt of a user request is executed the current semantic search query plan in the global scheme (as a subset).

The results of the pilot implementation of the architecture show four times performance increase, indicating the efficiency of the algorithms.

*Query optimization in cloud databases NoSQL type.* Programming model map-reduce (MR) is a popular platform for cloud computing, which allows analysis of large amounts of data in the cloud. MR facilitates parallel execution of special, long-term problems of the analysis of large data volumes in a cluster with a shared-nothing architecture. The basic idea of MR model is simple. Each task is represented as a map and reduce tasks. Target map indicating how to be processed key or value pairs to generate a set of intermediate pairs, whereas reference reduce determines how to combine all intermediate values associated with one intermediate. MR Kernel for storage and data replication uses a distributed file system.

At the core of this approach lies the use of algebra queries and application of some higher order operators that are implemented in the existing map-reduce systems (for example, Hadoop). It should be noted that the proposed approach is primarily targeted for use with MRQL language. Unlike other map-reduce existing languages such as HiveQL and PigLatin, which allow to create scripts using non-declarative languages, MRQL expressive enough and allows a user to write own scripts for a large range of tasks in declarative form, and at the same time lends itself to optimization.

As is the case with relational databases, to optimize MRQL query is to find an optimal execution plan. Performance evaluation plan algorithm MRQL requests consists of the following steps:

- simplification of the request;
- building a query graph;

- the query graph representation in algebraic form;

- formation of algebraic form card for assessment and improvement plan using the algebraic method optimization;

- create a function of MR combination basing on MR reduce function.

The advantage of this approach is that the developed algorithms are implemented as a framework, the source code that is freely available. This project is currently being actively developed [2].

Another example is genetic algorithm. It is a search procedure inspired by principles from natural selection and genetics. It is often used as an optimization method to solve problems where little is known about the objective function. The operation of the genetic algorithm is quite simple. It starts with a population of random individuals, each corresponding to a particular candidate solution to the problem to be solved. Then, the best individuals survive, mate, and create offspring, originating a new population of individuals. This process is repeated a number of times, and typically leads to better and better individuals.

Generic algorithm theory is centered around the notion of a building block. The study will be talking about deception, population sizing studies, the role of parameters and operators, building block mixing, and linkage learning. These studies are motivated by the desire of building better Generic algorithms. Algorithms that can solve difficult problems quickly, accurately, and reliably. It is therefore a theory that is guided by practical matters.

Genetic algorithm operation describes the operation of a simple genetic algorithm. The exposition uses a step-oriented style and is written from an application perspective. The steps of applying a genetic algorithm are:

- to choose an encoding;
- choose a fitness function;
- choose operators;
- choose parameters;
- choose initialization method and stopping criteria.

Large amount of information serves as a huge information repository for organizations. However, it also makes finding relevant information from it extremely difficult. How to help users find their required information is the central task of any information retrieval system or search engine. However, precision and recall, the two most commonly used performance measures, of commonly used search engines are usually very low.

Retrieval performance of an information retrieval system can be affected by many factors: the ambiguity of query terms, unfamiliarity with system features, as well as factors relating to document representation. Many approaches have

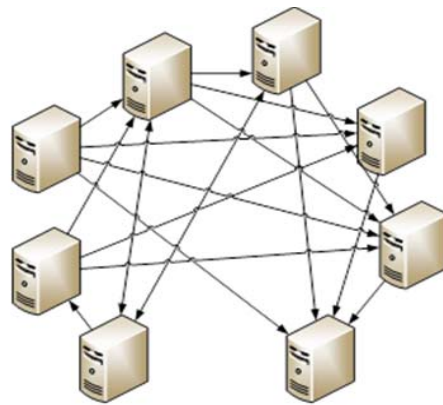


been proposed to address these issues. For example, query expansion techniques based on a user's relevance feedback have been used to discover a user's real information need. Similarly, document descriptions have been modified. Another very important factor is the ranking/matching function. It is this ranking function that to focus most of the discussion on. A ranking function is used to order documents in terms of their predicted relevance to a particular query. It is very difficult to design such a ranking function that can be successful for every query, user, or document collection (which we will call contexts). In this search, it is argue in favor of a method that systematically adapts a ranking function and tailors it to different users' needs (i. e. in different contexts). In particular, an inductive learning technique, for the adaptation purpose and compare our results against two well-known retrieval systems.

Fuzzy theory, as a framework describing formally the concepts of vagueness, imprecision, uncertainty and inconsistency provide interesting extensions to the area of information retrieval. Imprecision and vagueness are present in natural language and take part in real-world human communication. User friendly and flexible advanced information retrieval system should be able to offer user interface for non experienced users allowing natural deployment of these concepts in user system interaction for more effective information retrieval. Information retrieval models exploiting fuzzy techniques can overcome some of the limitations pointed out in first part of this article. They support different grades of document-query relevance, cut inaccuracies and oversimplifications happening during document indexing and introduce the concepts of vagueness and imprecision in query language.

*Architecture-specific solutions.* Decentralized management of migrating virtual machines in large-scale cloud-based processing centers. The main interest of this approach lies in the fact that its purpose is to balance the load on equipment through the migration of virtual machines in the cloud environment, which indirectly leads to an increase in the quality of the search (it is obvious that the speed with which the cloud responds to user requests, is one of the search quality criteria).

It often happens so, that for resource management in large-scale data centers are developed and implemented a centralized solution, but in this case the occurrence of a failure at the control node, resulting in malfunction of the whole system. As shown in Figure, each active node in the process of functioning selectively at a predetermined interval sends its own index of congestion in some nodes of the system, at the same time to get the index of congestion random active nodes.



Decentralized exchange of index congestion

This change target nodes at each iteration. Information on the utilization of other components added to the vector of current workload. Thus, the average length of the vector unit load is equal to the number of iterations of sending the index. A load information will be stored in a decentralized, in order to avoid trouble in the event of a failure of the node, another positive aspect is that the network traffic is distributed across all active nodes (as opposed to the scheme with centralized management, where all packets should go through common node).

Unit load index is a tuple of the form:

$$LI = \langle src, dest, util \rangle,$$

where *src* – node identifier, when it has received index; *dest* – contains a node ID that will receive the index, *util* – CPU usage source node (*src*).

**Conclusion.** As virtual machines are host to deploy a variety of applications with different workloads on the CPU, then eventually the physical CPU utilization can vary. The decision on the virtual machine migration can be taken in two cases:

- when the CPU usage exceeds a certain level (the upper limit). The purpose of establishing an upper threshold is to keep the additional computing power in case of situations with a sharp (unplanned) increasing load;
- when the CPU usage is below a certain level (the lower limit) – unit underutilized. The purpose of establishing a lower threshold is to possibly increasing the number of physical units that transferred to the “sleep” mode, thus reducing power consumption.

After the decision to migrate a virtual machine, start searching the destination node. To do this a user has to crawl load vector of the current node to detect the node with lowest amount of CPU provided in contact with predetermined intervals. If a node can not detect this unit searches for the index which load when transferring to it the selected virtual machine does not exceed the lower utilization of the border. If in this case no search results, one

of the nodes are in “sleep” mode is transferred to the active state and migrating.

In the article is given the description of query optimization in the cloud SQL type database, NoSQL type and architecture-specific solutions. Each of mentioned methods has both advantages and disadvantages. Common to all methods is the

lack of synthetic nature of the results, that is, that the introduction of statistics obtained in artificial systems created just for testing approach. However, the relatively large number of studies for a fairly young field suggests that the problem is urgent and optimization such developments in the near future will be in demand.

### References

1. Vakkari P., Hakala N. An Appropriate Boolean Query Reformulation Interface for Information Retrieval Based on Adaptive Generalization. *In WIRI*, 2015, pp. 145–150.
2. Ullman Jeffrey D., Hector Garcia–Molina, Widom Jennifer. Database Systems: the complete book. 2nd ed. USA, Pearson, 2013. P. 218–256.

### Information about the authors

**Brakovich Andrei Igorevich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: brakovich@yandex.ru

**Hassan Ali** – PhD student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: teacher.ali.h@hotmail.com

*Received 26.04.2017*

# АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

---

УДК 512.8:681.55

Ю. О. Герман<sup>1</sup>, О. В. Герман<sup>1</sup>, А. А. Дунаев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

## МЕТОД УСТАНОВЛЕНИЯ ИЗОМОРФИЗМА ГРАФОВ

В работе представлен оригинальный подход к проверке изоморфизма двух связанных графов. Подход ориентирован на прикладные системы искусственного интеллекта и системы принятия решений, использующие технику распознавания на основе изоморфизма графов. Достоинство такого подхода состоит в том, что он «не чувствителен» к искажениям изображений, но «схватывает» топологию связей. Разработанный авторами подход базируется на использовании определенной инвариантной характеристики графа, представляющей матрицу кратчайших расстояний между парами вершин. Данная характеристика вычисляется через вводимые длины ребер, определяемые через степени вершин графа. Таким образом, длины ребер отражают характер связей между вершинами и для изоморфных графов остаются неизменными. Представлено обоснование установления изоморфизма на базе введенного критерия, а также метод отыскания соответствия вершин на основе матрицы кратчайших расстояний. Рассмотренная в статье задача может встретиться, например, при распознавании лиц в условиях наличия искажений на изображениях. Вершинами графа изображения являются некоторые характерные точки. Точки соединяются ребрами, если их яркость и цвет достаточно схожи. Очевидно, что при искажении изображений ребрам могут быть приписаны оценки степени сходства, отличные от «1». Представленный в статье подход может быть интересен для специалистов-прикладников, занимающихся проблемами распознавания и классификации.

**Ключевые слова:** граф, изоморфизм, кратчайшее расстояние, распознавание.

Yu. O. German<sup>1</sup>, O. V. German<sup>1</sup>, A. A. Dunaev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Belarusian State Technological University

<sup>2</sup>Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

## AN ALGORITHM FOR ESTABLISHING GRAPH'S ISOMORFISM

An original approach to test two connected graphs isomorphism is given. The approach is oriented at applied artificial intelligence systems and decision making systems based on the recognition technique with graph isomorphism. An advantage of the suggested approach is based on its indifference to images distortions and a possibility to catch the topology of links. The suggested approach uses a definite invariant characteristic of a graph representing a modified the shortest-length paths matrix between the pairs of nodes. This characteristic is computed through the edges lengths defined with the help of the nodes degrees. The edges lengths reflect the graph topology and remain invariant for isomorphic graphs. A ground for isomorphism on the basis of the introduced invariant feature is given with a method to find the correspondence between the graph nodes. The problem considered in the paper may be encountered in face recognition with some distortions. The graph nodes are associated with characteristic points on the face. The points are connected if they have similar brightness or/and color. If the face is distorted the similarity degrees different from «1» may be used instead. The entire approach may be interesting for those specializing in pattern recognition and classification.

**Key words:** graph, isomorphism, the shortest length path, recognition.

**Введение.** Задача изоморфизма графов имеет важное прикладное значение [1–3], особенно для задач распознавания. В связи с прикладной направленностью вычислительный аспект имеет важнейшее значение. Не так давно Л. Бабаи [4] анонсировал метод с квазиполиномиальной сложностью для задачи установления изомор-

физма графов. Он использовал подход Люкса [1] для формирования блоков группы перестановок, причем проблема сводилась к определению изоморфизма блочных структур двух групп перестановок. На момент написания этой статьи нам не известен результат независимой экспертизы работы Бабаи. Вместе с тем, имеет-

ся, по крайней мере, два пункта для критики подхода Л. Бабаи. Во-первых, его квазиполиномиальность связана с субэкспоненциальностью метода для графов большой размерности. Во-вторых, теоретико-групповая платформа для обоснования метода делает его труднопринимаемым даже для математиков, специализирующихся на теории групп. Заметим также, что алгоритм Бабаи не решает проблему изоморфизма при заданных и в общем случае не совпадающих весах ребер. Имеются указания предвзятельного характера о возможной ошибке в доказательстве этого автора.

Данная статья излагает иной подход для решения задачи изоморфизма в достаточно общем случае с позиций, делающих алгоритм доступным широкому кругу лиц. Эти обстоятельства существенны не только для оценки алгоритма, но и расширения сферы его использования, т. к. алгоритм ориентирован на взвешенные графы. Работа имеет некий аналог [5], который анонсирует полиномиальность изложенного там метода. Используемая здесь инвариантная характеристика существенно иная. Мы отмечаем переборный в общем характер описываемого здесь метода, но указываем, что на практике алгоритм ведет себя практически как эффективный.

**Основная часть.** Два графа  $G_1(U_1, W_1)$ ,  $G_2(U_2, W_2)$  с множествами вершин  $U_i$  (ребер  $W_i$ ) изоморфны, если существует взаимно-однозначное отображение  $H$  множества вершин одного графа на множество вершин другого, сохраняющее связи между вершинами, т. е. для любых двух вершин первого графа  $\alpha, \beta$ , соединенных ребром, вершины  $H(\alpha), H(\beta)$  второго графа также соединены ребром, и наоборот.

**Определение 1.** Характеристика вершин графа называется инвариантной, если она не изменяется в каждом графе, изоморфном исходному.

**Определение 2.** Две вершины графа назовем различимыми, если хотя бы одна инвариантная характеристика графа у этих вершин различна.

Например, степень любой вершины не изменяется при изоморфном отображении данного графа.

Будем использовать минимальные расстояния между парами вершин графа. Ясно, что в изоморфном графе эти расстояния должны сохраняться. Поэтому сначала укажем, как определять минимальные расстояния. Пусть дан граф на рис. 1 (изначально числа ребрам не приписаны). Определим расстояние между парой вершин  $\alpha, \beta$ , соединенных ребром:

$$\rho_{\alpha\beta} = (\deg(\alpha) + \deg(\beta)) / 2, \quad (1)$$

где  $\deg(x)$  – степень вершины  $x$ . Используя, например, алгоритм Дейкстры, построим матрицу  $D$  кратчайших расстояний между парами вершин. Далее ссылаемся на такую матрицу как на  $D$ -матрицу.

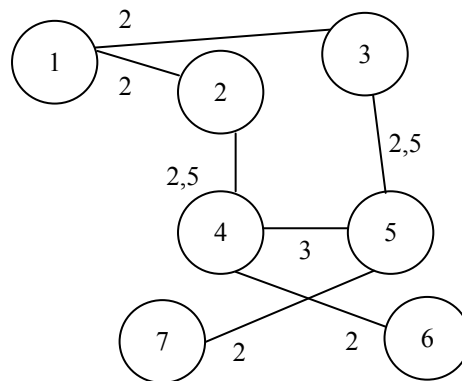


Рис. 1. Вычисление длин ребер

Таблица 1  
Матрица кратчайших расстояний

	1	2	3	4	5	6	7
1	–	2	2	4,5	4,5	6,5	6,5
2	2	–	4	2,5	5,5	4,5	7,5
3	2	4	–	5,5	2,5	7,5	4,5
4	4,5	2,5	5,5	–	3	2	5
5	4,5	5,5	2,5	3	–	5	2
6	6,5	4,5	7,5	2	5	–	7
7	6,5	7,5	4,5	5	2	7	–

Поскольку минимальные расстояния в изоморфных графах сохраняются, то сразу устанавливаем следующие множества попарно неразличимых вершин (например, вершины {2, 3} неразличимы по минимальным расстояниям. Назовем такие вершины  $d$ -неразличимыми):

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}. \quad (2)$$

**Определение 3.** Назовем граф симметричным, если его можно представить как сумму двух или более изоморфных подграфов, содержащих хотя бы одну общую вершину и отличающихся хотя бы одной парой вершин.

Так, граф на рис. 1 является симметричным.

Изоморфными являются подграфы с вершинами {1, 2, 3, 4, 5, 7} и {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

**Лемма.** Пусть даны два связных симметричных графа  $G_1(U_1, W_1)$ ,  $G_2(U_2, W_2)$ . Тогда они изоморфны, если изоморфны образующие их подграфы.

Обратимся к разложению (2), полученному по табл. 1. Если бы множества  $d$ -неразличимых вершин содержали ровно по одной вершине, то установить изоморфизм графов можно было бы простой проверкой. В общем случае нам потребуется сделать следующую проверку. Возьмем

какое-нибудь множество  $d$ -неразличимых вершин минимальной мощности. Так, возьмем, например, множество  $\mu = \{2, 3\}$ . Построим два подграфа исходного графа на рис. 1. Берем первую вершину из  $\mu$ , например вершину 2. Удаляем из исходного графа все ребра, инцидентные вершинам из  $\mu$ , кроме вершины 2, включая также ребра, связывающие только вершины из  $\mu$ . Если при этом вершина лишается всех ребер, то удалим и эту вершину. В итоге получим первый подграф (назовем его 2-подграф) (рис. 2).

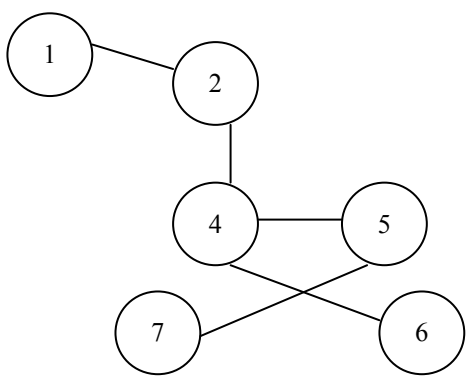


Рис. 2. 2-подграф

Таблица 2

Матрица кратчайших расстояний 2-подграфа

	1	2	4	5	6	7
1	–	1,5	3,5	6	5,5	7,5
2	1,5	–	2	4,5	4	6
4	3,5	2	–	2,5	2	4
5	6	4,5	2,5	–	4,5	1,5
6	5,5	4	2	4,5	–	6
7	7,5	6	4	1,5	6	–

Множество  $d$ -неразличимых вершин в соответствии с табл. 2 состоит только из одноэлементных подмножеств.

Аналогичные построения можно провести для 3-графа и убедиться, что его множество  $d$ -неразличимых вершин также представлено одноэлементными подмножествами. Устанавливаем соответствие вершин обоих подграфов и факт их изоморфизма. Таким образом, нами описана некоторая базовая процедура расщепления графа на подграфы по вершинам некоторого подмножества  $d$ -неразличимых вершин. Эта процедура выполняется с целью выявления изоморфных подграфов (исходного) графа. Замечательно, что если удастся установить изоморфизм двух или более подграфов исходного графа, то можно оставить для последующего рассмотрения только один подграф. Если мы обнаружим два неизоморфных подграфа, то нужно проводить дальнейшие рассмотрения с каждым из них. Этим мы определили некото-

рую общую схему установления изоморфизма двух графов.

Пусть дан граф с матрицей кратчайших расстояний, представленной в табл. 3.

Таблица 3

Матрица кратчайших расстояний изоморфного графа

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$
$a$	–	5,5	4	4,5	2,5	7,5	2
$b$	5,5	–	2,5	5	3	2	4,5
$c$	4	2,5	–	7,5	5,5	4,5	2
$d$	4,5	5	7,5	–	2	7	6,5
$e$	2,5	3	5,5	2	–	5	4,5
$f$	7,5	2	4,5	7	5	–	6,5
$g$	2	4,5	2	6,5	4,5	6,5	–

Множества  $d$ -неразличимых вершин и их соответствий в обоих графах таковы:

$$\{1\} \leftrightarrow \{g\}, \{2, 3\} \leftrightarrow \{c, a\},$$

$$\{4, 5\} \leftrightarrow \{e, b\}, \{6, 7\} \leftrightarrow \{f, d\}. \quad (3)$$

Теперь, пользуясь соответствием  $\{2, 3\} \leftrightarrow \{c, a\}$ , можно расщепить второй граф на два подграфа по вершинам  $c$  и  $a$ . Как и для первого графа, получаем два изоморфных подграфа:  $c$ -подграф и  $a$ -подграф с одноэлементными множествами  $d$ -неразличимых вершин. Простой проверкой находим их соответствие 2-подграфу и 3-подграфу. Исходя из этих рассуждений, сформулируем метод установления изоморфизма графов.

1. Расщеплять первый исходный граф для выявления изоморфных компонентов. Если таковые будут определены, то заменить рассмотрение всех этих изоморфных подграфов одним из них. Если будут определены неизоморфные компоненты, то рассматривать их по отдельности. Очевидно, расщепление выполняем до получения одноэлементных множеств  $d$ -неразличимых вершин.

2. Расщеплять второй исходный граф по подмножествам  $d$ -неразличимых вершин, сопоставленным аналогичным подмножествам первого исходного графа (требуемое сопоставление осуществляется на основании матриц кратчайших расстояний).

3. Установить соответствие итоговых одноэлементных подмножеств  $d$ -неразличимых вершин обоих графов.

На практике процедура расщепления завершается сравнительно быстро, хотя теоретически она имеет переборный характер.

**Заключение.** Вычислительная сложность метода напрямую определяется тем, сколько подграфов было порождено в результате операции расщепления исходного графа. В худшем случае эта величина оценивается сверху как  $O(2^k)$ , т. е. метод сохраняет свойства перебор-

ного алгоритма. На практике, однако, процесс останавливается досрочно, когда матрицы кратчайших расстояний различаются хотя бы по одной строке, что является, скорее, типичной ситуацией. Проведенный эксперименталь-

ный цикл показал практическую эффективность метода «в среднем».

Если графы не изоморфны, то ситуации, когда матрицы минимальных расстояний оказываются идентичными, практически маловероятны.

### Литература

1. Luks E. M. Isomorphism of graphs of bounded valence can be found in polynomial time // *Journal of Computational Sciences*. 1982. Vol. 1, no. 25. P. 42–65.
2. Babai L. Moderately exponential bound for graph isomorphism // *Proceedings of the International FCT-Conference on foundations of computer theory*. London, 1981, P. 34–50.
3. Babai L., Erdos P., Selkow M. Random graph isomorphism // *SIAM Journal of Computing*. 1980, Vol. 3, no. 9. P. 628–635.
4. Babai L. Graph isomorphism in quasipolynomial time // *Univ. of Chicago*. 2015. P. 84.
5. Dharwadker A., Tevet J-T. The graph isomorphism algorithm // *Proc. of the Institute of Mathematics and Structure Semiotics*. Tallinn, 2009. P. 37.

### References

1. Luks E. M. Isomorphism of graphs of bounded valence can be found in polynomial time. *Journal of Computational Sciences*, 1982, vol. 1, no. 25, pp. 42–65.
2. Babai L. Moderately exponential bound for graph isomorphism. *Proceedings of the International FCT-Conference on foundations of computer theory*. London, 1981, pp. 34–50.
3. Babai L., Erdos P., Selkow M. Random graph isomorphism. *SIAM Journal of Computing*, 1980, vol. 3, no. 9, pp. 628–635.
4. Babai L. Graph isomorphism in quasipolynomial time. *Univ. of Chicago*, 2015, p. 84.
5. Dharwadker A., Tevet J-T. The graph isomorphism algorithm. *Proc. of the Institute of Mathematics and Structure Semiotics*. Tallinn, 2009, p. 37.

### Информация об авторах

**Герман Юлия Олеговна** – старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: juliagerman@tut.by

**Герман Олег Витольдович** – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ovgerman@tut.by

**Дунаев Александр Александрович** – аспирант. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220600, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь).

### Information about the authors

**German Yulya Olegovna** – senior lecturer, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: juliagerman@tut.by

**German Oleg Vitoldovicz** – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ovgerman@tut.by

**Dunaev Alexander Alexandrovich** – PhD student. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220600, Minsk, Republic of Belarus).

Поступила 25.04.2017

УДК 004.27

**N. A. Zhilyak, Mohamed Ahmad El Seblani**  
Belarusian State Technological University

### CLASS TECHNOLOGY ANALYSIS OF BIG DATA

The article discusses an overview of some technologies of BIG DATA class. The article includes the classification and analysis of methods of processing large amounts of data. The theoretical aspects associated with the emergence of the phenomenon of big data, explores the epistemology and heuristic possibilities of big data. The practical significance of the chosen theme is to develop new methods and algorithms for analysing large amounts of data (BIG DATA), allowing early detection of possible loss or distortion of information, which in turn may lead to reduction in financial losses. This article will be useful for specialists dealing with the problems of organization and processing of databases, in particular BIG DATA.

**Key words:** Big Data, business, factor, scoring technology.

**Introduction.** The category of large Big Data includes information which is no longer possible to process by conventional methods, including structured data, media and random objects. Some experts believe that in order to work with them to replace the traditional monolithic systems have new massively parallel solutions. From the name we can assume that the term “great data” simply refers to the large amounts of data management and analysis. According to the report McKinsey Institute “big data: the new frontier for innovation and competition” (Big data: The next frontier for innovation, competition and productivity), the term “great data” refers to data sets whose size is beyond the capabilities of typical databases for named, storage, management and analysis of information. And global repository of data, of course, continue to grow [1].

Big Data suggest something more than just an analysis of huge amounts of information. The problem is not that organizations create huge amounts of data, but the fact that most of them are presented in a format that bad associated traditional structured format database – a web-based magazines, videos, text documents, computer code, or, for example, geospatial data. Everything is stored in a variety of different storage facilities, sometimes even outside the organization. As a result, corporations can have access to a huge amount of their data and do not have the necessary tools to establish the relationship between these data and make on the basis of their significant conclusions. Add to this the fact that the data is now updated more and more, and you get a situation where the traditional data analysis methods can not keep up with the vast amounts of constantly updated data, which ultimately paves the way for big data technologies. The aim of the further work with big data is the development of methods and algorithms for processing large data scoring model [2].

**Main part.** The Big Data movement has only magnified the complexities that have existed in data architectures for decades. Any architecture based primarily on large databases that are updated

incrementally will suffer from these complexities, causing bugs, burdensome operations, and hampered productivity. Although SQL and NoSQL databases are often painted as opposites or as duals of each other, at a fundamental level they are really the same. They encourage this same architecture with its inevitable complexities [3].

In fact the concept of big data involves work with the vast volume of information and varied composition, very frequently updated and located in different sources in order to increase efficiency, create new products and improve competitiveness. Forrester Consulting Company gives a brief formulation: “Large data combined techniques and technologies that extract meaning from data practicality” extreme limit.

Craig Baty, Executive Director of Marketing and Director of Fujitsu Australia Technology, pointed out that business analysis is descriptive results of the analysis process, achieved business in a certain period of time, whereas the speed of large data allows us to analyze predictive capable of offering business recommendations future. Big Data technologies can also analyze more data types in comparison with business intelligence tools, which makes it possible to focus not only on the structured storage.

Matt Slocum from O'Reilly Radar says that although big data and business analytics have the same target (search for answers to the question), they differ from each other in three dimensions.

Big data is designed to handle larger amounts of information than a business analyst, and this, of course, corresponds to the traditional definition of big data.

Big data is designed to handle more quickly received and changing information, which means that in-depth study and interactivity. In some cases, the results are generated faster than loading a web page [4].

Big data is intended for processing unstructured data, use of which we are only beginning to study after they were able to organize the collection and storage, and we need algorithms and the ability to dialogue in order to facilitate the search trends contained within these arrays [3].

According to the Oracle white paper published by “Oracle Information Architecture: Architect Guide great data” (Oracle Information Architecture: An Architect's Guide to Big Data), when working with large data, we come to the information other than during business analysis.

Analysis of Big Data, which raises the question of how to work with unstructured information, generate analytical reports, as well as the implementation of predictive models [4].

Market Big Data projects intersect with the market of business intelligence (BA), the volume of which in the world, according to experts, it amounted to about 100 billion dollars in 2012. It includes a networking component, servers, software and technical services.

Also, the use of Big Data technologies relevant for the class revenue assurance solutions (RA), designed to automate the activities of companies. Modern revenue assurance systems include inconsistencies detection tools and in-depth analysis of data, allowing early detection of loss or distortion of information that could lead to a decrease in financial results. Against this background, Russian companies, confirming the presence of Big Data technologies in demand in the domestic market, noted that factors that stimulate the development of Big Data in Russia are data growth, accelerate management decision-making and improve their quality.

Unfortunately, today, only 0.5% of analyzed digital data accumulated, despite the fact that there are objectively industry-wide problem which could be solved by making analytical grade Big Data. Development of IT-markets already have results, which can assess the expectations associated with the accumulation and processing of large data. One of the main factors which hinders the implementation of Big Data – projects, in addition to the high cost, it is considered the problem of selecting data to be processed: that is, to determine which data need to extract, store and analyze, and what – is not taken into account.

There are many hardware and software combinations that allow you to create effective solutions for Big Data of various business disciplines, from social media and mobile applications to intelligent analysis and visualization of business data. An important advantage of Big Data – it is compatible with the new tools are widely used in business database, which is especially important when dealing with cross-disciplinary projects, for example, such as the organization of multi-channel sales and customer support.

The sequence of work with Big Data includes data collection, structuring the information obtained via reports and dashboards (dashboard), creating insights and contexts, as well as the formulation of recommendations for action. Since

working with Big Data implies high costs of data collection, which is the result of processing is not known beforehand, the main task is a clear understanding of what data are needed, and not how much they have in stock. In this case, the collection of data is converted into the process of obtaining the necessary solely for specific tasks of information [4].

Based on the definition of Big Data, we can formulate the main principles of work with the following data:

- horizontal scalability. Since data can be arbitrarily long – any system that involves processing of big data must be scalable. 2 times increased the volume of data in 2 times increased the amount of iron in the cluster, and all continued to work;

- fault tolerance. The principle of horizontal scalability implies that the machines in the cluster can be many. For example, Hadoop cluster Yahoo has more than 42,000 machines. This means that some of these cars is guaranteed to fail. Methods of working with big data should consider the possibility of such failures and survive them without any significant consequences;

- the data locality. In large distributed systems data spread over a large number of machines. If the data is physically located on the same server, and processed on the other – the data transfer costs can exceed the cost of the treatment itself. Therefore, one of the most important design principles big data solutions is the principle of data locality – if possible, process data on the same machine on which they are stored.

All modern means of big data one way or another followed these three principles. In order for you to follow – you must invent some methods, techniques and paradigms of development, development tools data. One of the classical methods I will explore in today's article.

MapReduce is a distributed processing model proposed by Google for processing large amounts of data on computer clusters. MapReduce is illustrated by the following (Fig. 1).

MapReduce assumes that the data is organized in records. Processing of data occurs in three stages:

1. The Stage Map. At this stage the data predostavlyayutsya function map () that the user defines. The work of this stage is pre-processing and filtering. The work is very similar to the map operation in functional programming languages – user-defined function is applied to each input record.

The map() function applied to one input record and outputs a set of pairs key-value. Many ie only issues a single entry may not give anything, and can give out a few pairs key-value. What is the key and the value to solve, but the key is a very important thing, since the data with one key in the future will fall into one instance of the reduce function.



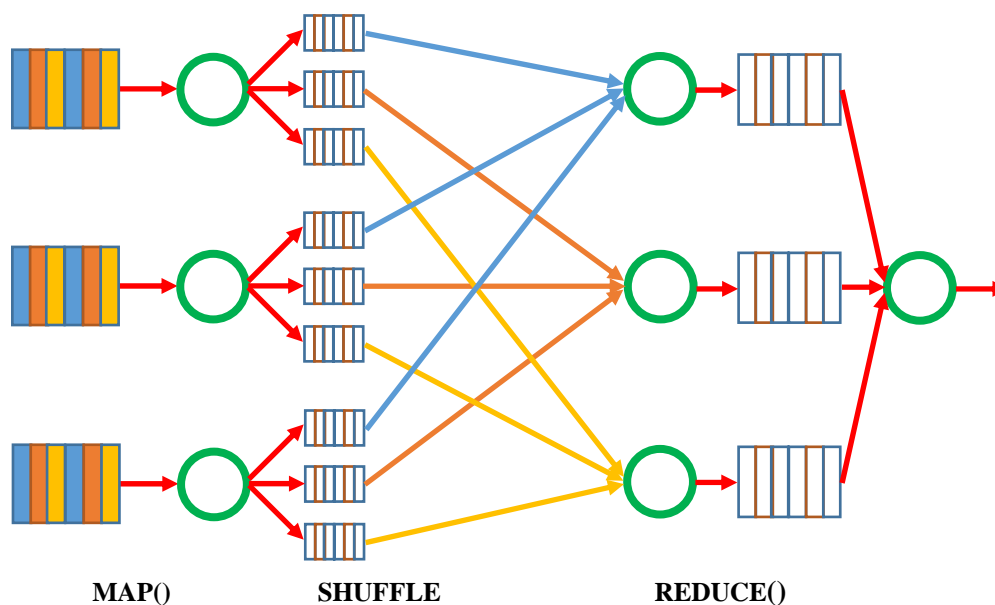


Fig. 1. The distributed processing model

2. Stage Shuffle. Runs invisibly to the user. In this stage, the output of the map function and “versed in the baskets” – each basket corresponds to one key of the output stage of the map. In the future, these will serve as input to reduce.

3. Stage Reduce. Each “basket” with the values generated at the stage of shuffle, gets the input of reduce().

The reduce function is specified by the user and calculates the final result for the individual “basket”. The set of all values returned by the function reduce () is the final result of a MapReduce task.

A few additional facts about MapReduce:

1) for All runs map function work independently and can work in parallel on different machines of the cluster;

2) all runs of the reduce function are independent and can run in parallel, including on separate machines in the cluste;

3) shuffle within itself is parallel sorting, so it can also run on different machines in the cluster. Paragraphs 1 to 3 allow you to perform the principle of horizontal scalability;

4) map Function, usually used on the same machine on which data is stored – it allows to reduce data transfer over the network (the principle of data locality);

5) mapReduce is always a full scan of the data, no indexes, no. This means that MapReduce is hardly suitable when the response is required very quickly.

Those who are accustomed to working with relational databases, often use a very convenient Join operation that allows to simultaneously process the content of some tables, combining them according to some key. When working with big data this problem is also sometimes. Consider the following example.

There are logs of two web servers, each log is as follows:

\t. Example piece of log.

1446792||139

178.7||8.82.1/sphingosine/unllhurrying.css  
 1446792||139 126.3||1.163.222 /accentually.jsll  
 1446792|139 154.1||64.149.83  
 /pyroacid/unkemllptly.jpg  
 1446792||139 202.2||7.13.181/Chawia.jsll  
 1446792||139 67.12||3.248.174  
 /morphograllphical/dismain.css  
 1446792||139 226.7||4.123.135 /phaneritell.php  
 1446792||139 157.1||09.106.104  
 /bisonant.css

You need to count for each IP address on which of the 2 servers he often came by. The result should be presented in the form:

\t. An example of the result:

178. ||78.82.1 first  
 126. ||31.163.222 second  
 154.164.149.83 second  
 226. ||||74.123.135 first

Unfortunately, unlike relational databases, in General the Union of two logs according to the key (in this case IP address) is a rather heavy operation and can be solved using MapReduce pattern and Reduce the Join (Fig. 2).

It is important that at this moment on reducer get entries from both logs and the type field can be used to identify from which of the two logs got to a specific value. So the data is enough to solve the original problem. In our case, reducere just have to count for each key of the records with which the type was found more and bring this type.

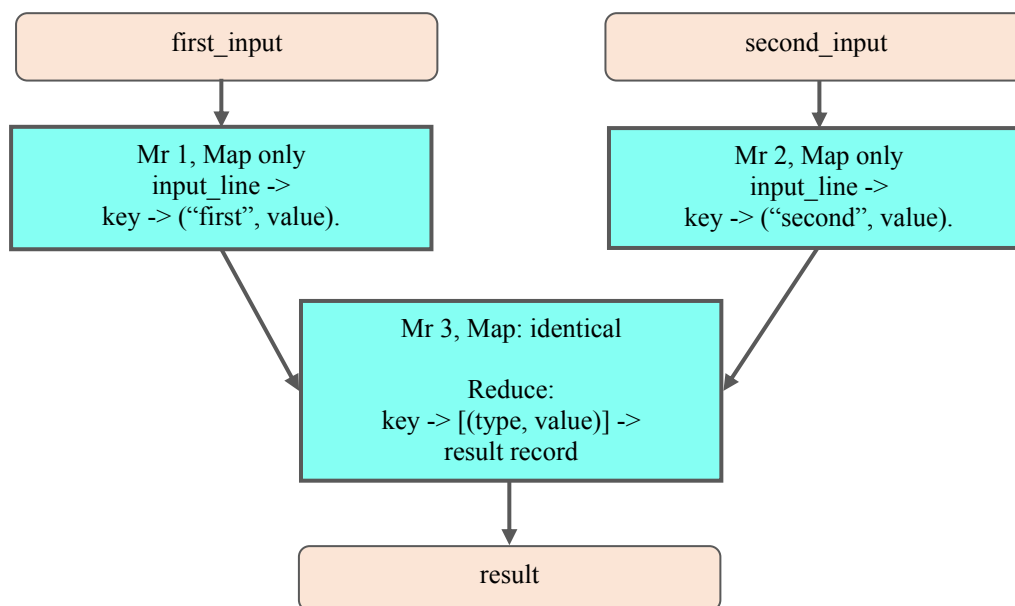


Fig. 2. The MapReduce pattern

Another example – how banks can use Big Data to prevent fraud. If the customer says about loss of the card, and when making a purchase with the help of the bank sees in real time the location of the customer's phone in the shopping area, where the transaction, the bank may verify the information on the client's request, I did not try whether he deceive him. Or the opposite situation, when a customer makes a purchase at the store, the bank sees that the card, on which the transaction, and the client's mobile phone are in one place, the bank may conclude that the card uses the owner. Due to such advantages Big Data, expand the boundaries of which are endowed with traditional data warehouse.

**Conclusion.** After analyzing the different approaches to big data revealed that an important

factor in achieving business goals when working with large data is to choose the right strategy, which includes analytics, that highlights the demands of consumers, as well as the use of innovative technologies in the area of Big Data.

In practice, a chain of MapReduce tasks can be quite complex sequences that MapReduce tasks can be connected as series and parallel to each other.

Thus, it must be noted that while the “Big Data” – this is a great potential that still need to be able to take advantage of.

Thus one of the goals is the development and analysis of new methods and algorithms for the organization of unstructured information for big data Analytics on the basis of scoring model, and classifying the customer base into different groups with unknown characteristics that separates these groups.

### References

1. Konstantin B. Optimizations in computing the Duquenne-Guigues basis of implications – *Annalise of Mathematics and Artificial Intelligence*, 2014, vol. 70, no. 1–2, pp. 5–24.
2. Obiedkov S. Modeling ceteris paribus preferences in formal concept analysis, in: *Formal Concept Analysis*. Vol. 7880. Berlin, Heidelberg, Springer, 2013. P. 188–202.
3. Raman V., Swart G. How to wring a table dry: Entropy compression of relations and querying of compressed relations. *Proceedings of International Conference on Very Large Data Bases (VLDB)*, 2006, pp. 34–46.
4. Stonebraker M., Cetintemel U. One size fits all: An idea whose time has come and gone. *Proceedings of the International Conference on Data Engineering (ICDE)*, 2008, pp. 18–64.

### Information about the authors

**Mohamed Ahmad El Seblani** – PhD student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: msiblani@hotmail.com

**Zhilyak Nadezhda Aleksandrovna** – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gh\_nadya@mail.ru

Received 14.09.2017

УДК 004.27

**А. М. Шитько**

Белорусский государственный технологический университет

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ МИКРОСЕРВИСНОЙ АРХИТЕКТУРЫ  
ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ**

Статья посвящена изучению технологии построения микросервисной архитектуры, которая позволяет сохранять модульность и независимость развертывания компонент Enterprise приложения. Микросервисная архитектура – это подход к созданию приложения, подразумевающий отказ от единой, монолитной структуры. То есть вместо того чтобы исполнять все ограниченные контексты приложения на сервере с помощью внутривещных взаимодействий, используется несколько небольших приложений, каждое из которых соответствует какому-то ограниченному контексту. Причем эти приложения работают на разных серверах и взаимодействуют друг с другом по сети, например посредством HTTP. В статье описывается процесс моделирования сервисов, способы интеграции микросервисов между собой, их основные свойства. Рассматривается алгоритм разбиения цельного приложения (монолита) на части, методы развертывания микросервисов. Также исследованы различные типы микросервисной архитектуры и способы их связи. Благодаря анализу полученной информации по теме статьи были выявлены преимущества и недостатки в сравнении с монолитными системами. Результатом выполненного исследования является получение научных и практических знаний для проектирования и разработки высокоэффективных Enterprise приложений, а также для получения хорошей производительности приложения при минимальных трудозатратах.

**Ключевые слова:** микросервисная архитектура, проектирование, Enterprise приложения.

**A. M. Shytska**

Belarusian State Technological University

**THE DESIGN OF THE MICROSERVICE ARCHITECTURE OF SOFTWARE**

The article is devoted to the study of the technology of building a microservice architecture that allows to preserve the modularity and independence of the deployment of Enterprise application components. Microservice architecture is an approach to the creation of an application, implying a refusal from a single, monolithic structure. That is, instead of executing all the restricted application contexts on the server with the help of intraprocess interactions, several small applications are used, each of which corresponds to some limited context. And these applications run on different servers and interact with each other over the network, for example, via HTTP. It describes the process of modeling services, the ways to integrate microservices between each other, their basic properties. It considers the algorithm for partitioning a single-piece application (a monolith) into parts, methods for deploying microservices. Also, various types of microservice architecture and methods of their connection were explored. Analyzing the obtained information on the subject of the article, advantages and disadvantages were revealed in comparison with monolithic systems. The result of the research is to obtain scientific and practical knowledge for the design and development of high-performance Enterprise applications, as well as to obtain good application performance with minimal labor costs.

**Key words:** microservice architecture, design, Enterprise applications.

**Введение.** С ростом объема кода и функциональности программного продукта, возникает необходимость управления сложностью приложения. Хорошо продуманная архитектура и правильное разбиение приложения на модули помогают справляться с поставленной задачей. Вариантом реализации архитектуры может быть монолитное приложение, когда вся или большая часть бизнес-задач имеет одну кодовую базу. Актуальным решением в настоящее время является построенное на микросервисах приложение, в котором общая бизнес-задача разбита на отдельные части, каждая из которых имеет отдельное приложение (микросервис) со своей кодовой базой.

**Основная часть.** Микросервисная архитектура – это архитектура, в которой имеются следующие сервисы.

1. Небольшие сервисы. Сервис в микросервисной архитектуре не может разрабатываться больше чем одной командой. Одна команда разрабатывает не более шести сервисов, при этом каждый сервис решает одну бизнес-задачу, и ее способен понять один человек, в противном случае сервис необходимо разделить.

2. Узко сфокусированные сервисы. Сервис в микросервисной архитектуре решает только одну бизнес-задачу. Его можно отделить от

системы, и, дописав некоторую логику, использовать как отдельный продукт.

3. Слабосвязанные сервисы. Изменение одного сервиса не требует изменений в другом.

4. Высоко согласованные сервисы. Класс или компонент сервиса содержит все нужные методы для решения поставленной задачи только в этом классе или компоненте [1].

*Характеристики микросервисной архитектуры.* Вне зависимости от того когда нужно применить микросервисный подход (при разработке приложения с нуля или разбиении существующего монолитного приложения) любая микросервисная архитектура должна обладать определенными свойствами. Первое из них – это разбиение через сервисы. Здесь существуют два понятия: библиотека и сервис, которые взаимодействуют по сети. В мире микросервисов библиотеки – это компоненты, которые подключаются к программе и вызываются ею в том же процессе, в то время как сервисы – компоненты, выполняемые в отдельном процессе и связывающиеся друг с другом с помощью REST или RPC. Таким образом, если имеется приложение, которое состоит из нескольких библиотек, работающих в одном процессе, любое изменение в этих библиотеках потребует переразвертывания всего приложения. Но если приложение разбито на несколько сервисов, то изменения потребуют переразвертывания только изменившегося сервиса.

*Группировка команд по бизнес-задачам.* Как правило, при разработке монолита разработчики группируются по интересам: группа разработчиков внешнего представления, группа разработчиков внутренней реализации и группа проектирования базы данных. Когда команды разбиты таким образом, то они выстраивают определенные границы, каждая со своей стороны. А это мешает прохождению бизнес-задачи, т. к. она проходит и слой внешнего представления, и слой внутренней реализации, и слой базы данных, и обратно. Поэтому для правильного создания микросервисной архитектуры необходимо придерживаться закона Конвея, который гласит, что структура вашего приложения повторяет структуру вашей команды, т. е. необходимо формировать команды согласно бизнес-задачам. Это позволит создавать микросервисы, которые будут полностью соответствовать всем потребностям поставленной бизнес-задачи [2].

*«Умные» сервисы и простые коммуникации.* Есть разные варианты взаимодействия сервисов. Чаще всего в механизмы передачи данных помещается существенная часть логики. Тогда получается очень «умный» канал передачи и «глупые» сервисы. В микросервисной архитек-

туре вся бизнес-логика должна находиться в сервисах, а по каналу передачи отсылаются только данные, он никак не связан с бизнес-задачей.

*Децентрализованное управление данными.* При проектировании микросервисной архитектуры каждый сервис имеет только свою базу данных. Пример представлен на рис. 1.

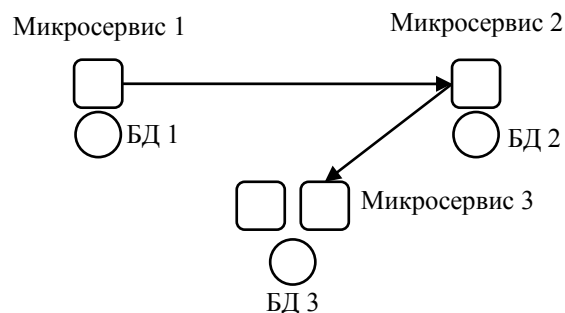


Рис. 1. Схема экземпляров баз данных микросервисов

Единственный случай, когда разные сервисы могут использовать одно хранилище – если эти службы представляют собой точные копии друг друга, но базы данных друг с другом не взаимодействуют.

*Автоматизация развертывания и мониторинга.* Это свойство, пожалуй, самое важное, которое должно присутствовать в микросервисной архитектуре. В данном контексте подразумевается наличие автоматического развертывания и непрерывной интеграции, т. е. автоматической доставки кода и его проверки, убеждаясь в том, что код скомпилирован и тесты с ним проходят без сбоев. Так как сервисы могут отказать в любое время, очень важно иметь непрерывный мониторинг, что даст возможность быстро обнаружить неполадки и, если возможно, автоматически восстановить работоспособность сервиса. Также мониторинг полезен для отслеживания рабочих показателей микросервисов.

*Проектирование под отказы.* Также важная характеристика, означающая, что начиная строить микросервисную архитектуру, необходимо исходить из предположения, что сервисы должны работать при отказе отдельных сервисов. Таким образом, необходимо реализовывать дополнительную логику для того, чтобы система была устойчива к таким сбоям.

*Взаимодействие с микросервисами.* Когда мы говорим о микросервисах, то всегда стоит вопрос о том, как клиенты приложения на основе микросервисов получают доступ к отдельным услугам. Существуют различные паттерны взаимодействия с микросервисами. Наиболее общеизвестной является модель API Gateway, представленная на рис. 2.

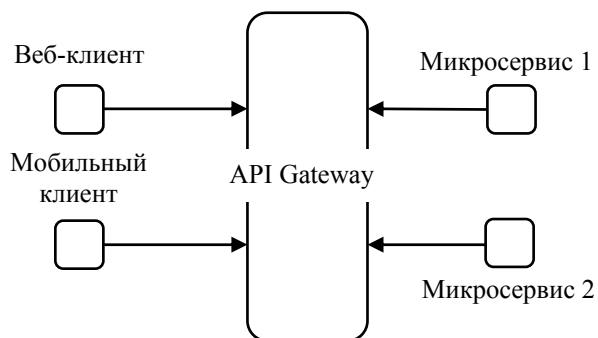


Рис. 2. Схема взаимодействия API Gateway

API Gateway – дополнительный сервис, задача которого – собирать бизнес-вызовы к целевым сервисам. То есть вместо того, чтобы обращаться к каждому сервису, клиент обращается к шлюзу, а тот в свою очередь перенаправляет запрос к нужному сервису. Также API Gateway осуществляет поддержку разных API для каждого клиента.

Теперь рассмотрим схемы связи микросервисов между собой. Первый подход называется «Обнаружение службы» (Service Discovery, SD). В данном случае сервисы знают друг о друге и общаются напрямую с использованием технологии RPC. Данный шаблон имеет два вида реализации. Первый тип – это Server-Side SD. Данный паттерн имеет следующие свойства: каждый экземпляр предоставляет удаленный API, такой как HTTP / REST с определенным адресом (хост и порт); количество экземпляров служб и их адреса изменяется автоматически; виртуальным машинам и контейнерам обычно назначаются динамические ip-адреса. На рис. 3 представлена схема взаимодействия микросервисов согласно модели Server-Side SD.

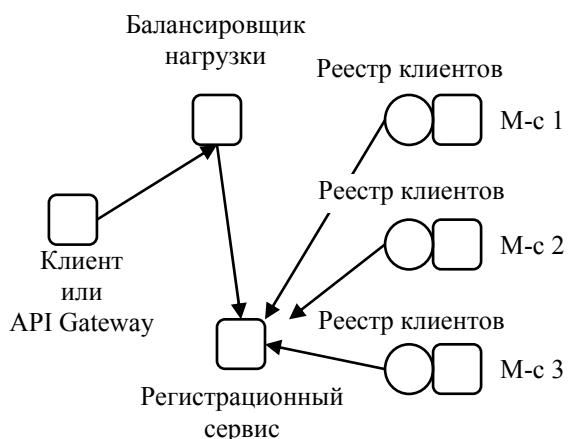


Рис. 3. Схема взаимодействия Server-Side SD

При данном типе клиент взаимодействует не напрямую с конкретным микросервисом, а с балансировщиком нагрузки. Дополнительно применяется регистрационный сервис. Его за-

дача – хранить регистрационные данные сервисов, и делать это он может по-разному: может опрашивать сервисы, брать данные из внешнего конфигурационного файла и т. д. Балансировщик нагрузки берет все данные у регистрационного сервиса. Таким образом, задача балансировщика – получать данные о местоположении сервисов из регистрационного сервиса и передавать запросы к ним.

Другой реализацией SD модели является Client-Side SD. Данному паттерну характерны те же свойства, что и предыдущему типу связи микросервисов. На рис. 4 представлена схема взаимодействия согласно модели Client-Side SD.

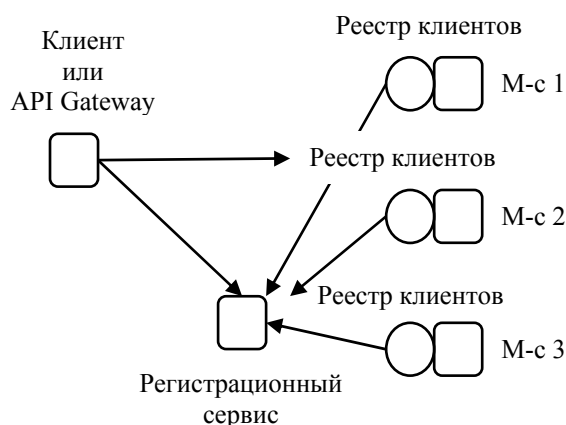


Рис. 4. Схема взаимодействия Client-Side SD

При данном виде взаимодействия отсутствует балансировщик нагрузки и клиент обращается напрямую к регистрационному сервису. Этот подход лучше тем, что выполняется на один запрос меньше, из-за чего взаимодействие происходит быстрее.

Вторым способом связи микросервисов является «Шина сообщений» (Message Bus, MB). В данном случае микросервисы подписываются на определенные события, при возникновении которых микросервисы отреагируют на это соответствующим образом. Данный способ нужен, чтобы один сервис мог сообщить другому, что у него изменилось состояние, чтобы другие сервисы могли на это среагировать.

Таким образом, при анализе микросервисной архитектуры были выявлены следующие преимущества: модульное деление команды – разбиение команды по бизнес-задачам позволяет увеличить эффективность разработки приложений за счет компетентных в данной области бизнес-задачи участников команды; высокая доступность – при нарушении работы одного из сервисов остальные продолжают работать; неограниченный выбор технологий – для определенной задачи есть возможность подобрать нужную технологию, а также есть возможность просто

протестировать ее на каком-нибудь сервисе, что не повлияет на другие сервисы; независимое развертывание – простые сервисы проще развернуть, и меньше вероятность отказа системы.

Но, в свою очередь, есть ряд недостатков: поддержка конечной согласованности – необходимость работать с отложенными данными, что требует постоянной доступности приложения; сложность операционной поддержки – необходимость поддержки непрерывного развертывания, непрерывной интеграции и автоматического мониторинга.

**Заключение.** Таким образом, использование микросервисного подхода позволяет создавать отказоустойчивые приложения, которые

без труда можно масштабировать без тесной привязки к целевой платформе, а также гибко конфигурировать сервисы и развертывать их в различных средах. Помимо всего прочего было установлено, что использование микросервисной архитектуры значительно сократит время непрерывного развертывания и поставки по сравнению с монолитными архитектурами за счет слабой связности между компонентами всей системы целиком. К сожалению, добавляется сложность в организации взаимодействия сервисов между собой, что приводит к падению общей производительности всей системы за счет сетевых задержек и пропускной способности каналов связи.

### Литература

1. Ньюмен С. Создание микросервисов. СПб.: Питер, 2016. 304 с.
2. Microservice Architecture [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://microservices.io/>. Дата доступа: 30.01.2017.

### References

1. Newman S. Building Microservices. USA, O'Reilly Media Publ., 2016. 304 p.
2. Microservice Architecture [Electronic resource]. Available at: <http://microservices.io/> (accessed 30.01.2017).

### Информация об авторе

**Шитько Андрей Михайлович** – аспирант. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [andrew.shitsko@gmail.com](mailto:andrew.shitsko@gmail.com)

### Information about the author

**Shytska Andrei Mikhaylovich** – graduate student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [andrew.shitsko@gmail.com](mailto:andrew.shitsko@gmail.com)

*Поступила 20.04.2017*

УДК 519.86

**Н. Н. Буснюк<sup>1</sup>, В. А. Новиков<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет<sup>2</sup>Белорусская государственная академия связи**МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ  
ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ТРУДОВЫХ РЕСУРСАХ**

В практических задачах ценность представляет формирование сетевого плана, основанного на выборе из возможных альтернативных вариантов самого оптимального. В качестве исходных данных в таких задачах задается матрица времен выполнения каждой работы каждым рабочим. Данная задача представляет собой комбинацию задачи о назначении и задачи сетевого планирования. В общем случае можно сделать предположение о возможности выполнения двух и более работ одним рабочим. Решение этой задачи на математическом уровне позволяет выполнять минимизацию сетевого графика по критерию трудовых ресурсов.

В статье предложен метод решения задачи оптимального назначения в сетевом планировании с ограничением на количество работ, выполняемых одновременно. Предлагаемый алгоритм позволяет строить локально-оптимальный план за линейное время от количества дуг в сетевом графе. Рассмотренная задача помогает оптимизировать стоимость проекта по сумме времени, затраченного работниками на выполнение работ.

**Ключевые слова:** сетевой график, критический путь, дуга графа, вершина графа, задача о назначениях, задача сетевого планирования, алгоритм.

**N. N. Busnyuk<sup>1</sup>, V. A. Novikov<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Belarusian State Technological University<sup>2</sup>Belarusian State Academy of Communications**SOLUTION METHOD OF NETWORK PLANNING TASK  
WITH RESTRICTED MANPOWER**

In practice, the formation of a network plan based on the selection of the best possible alternatives is of special value. As the source data in such tasks the performance time matrix of each work done by each worker is set. This is a combination of task assignments and task network planning. Generally it is possible to make the assumption about the ability to run two or more jobs by one worker. The solution to this problem on a mathematical level allows you to carry out the network chart according to the criterion of minimizing manpower.

The optimal solution method of task assignments in network planning with the restriction on the amount of work performed at the same time is received in this article. The proposed algorithm allows us to build locally optimal plan in linear time from the number of arcs in a network graph. Reviewed task allows you to optimize the cost of the project for the amount of time spent by employees to execute works.

**Key words:** network chart, critical path, arc graph, a vertex of a graph, task assignments, task network planning, algorithm.

**Введение.** В [1] была рассмотрена задача, представляющая собой синтез задачи о назначении и задачи сетевого планирования. Веса дуг сетевого графа являлись переменными величинами, и была предложена методика назначений работников на работы в случае, если работников меньше, чем работ.

От правильно спланированного сетевого графика рабочих процессов во многом зависит эффективность функционирования предприятия. Классические математические методики не позволяют алгоритмизировать процесс модификации сетевого графа, например, из условия оптимизации логистических цепочек по критерию трудовых ресурсов.

**Основная часть.** В классической задаче сетевого планирования задана последовательность выполнения работ некоторого проекта и их продолжительность [2]. В соответствующем ориентированном взвешенном по дугам графе отыскивается наиболее длинный путь из исходного узла в завершающий узел. Этот путь задает время выполнения всего проекта. Алгоритм нахождения такого пути определяет и график выполнения всех работ проекта. При фиксированных весах дуг оптимальный (критический) путь в сетевом графе определяется за время, линейно зависящее от количества дуг в графе [3].

На практике часто бывает, что сроки выполнения работ не определены. Можно строить

некоторые предположения о времени выполнения каждой работы, но нельзя предусмотреть все возможные задержки выполнения. В более общей задаче сетевого планирования предполагаются продолжительности работ переменными величинами; задаются нижняя, верхняя оценки длительности работ и наиболее вероятная средняя оценка. Для управления проектами с неопределенным временем выполнения работ разрабатываются вероятностные методы. По переменным оценкам рассчитывают наиболее ожидаемое время выполнения всего проекта. По такой схеме работает известный метод оценки и пересмотра проектов (PERT) [4].

В [5] рассмотрен имитационный метод оценки срока завершения проекта на основе анализа его вероятностной сетевой модели. Под вероятностными сетевыми графиками понимают такие сетевые модели, которые обладают детерминированной структурой, а продолжительности работ задаются некоторыми случайными величинами. При этом предполагается, что законы распределения этих случайных величин должны быть установлены на основе анализа аналогичных работ, проводившихся ранее. Применение имитационного метода позволяет использовать любой закон вероятностного распределения для каждой работы сетевого графика, не требует предположений о неизменности критического пути и не накладывает ограничений на структуру сетевого графика.

Такие оценки характерны для типовых проектов и типичных работ. Но может оказаться так, что работники индивидуальны, каждый обладает присущей ему производительностью для различных работ проекта. Сетевой график допускает одновременное выполнение работ, не лежащих на одном пути, т. е. не предшествующих друг другу. Когда проект включает много работ, а исполнителей – ограниченное количество, то не исключено, что некоторые из работ будут простаивать. Для сведения решения к классическому методу в таких ситуациях вводят понятия фиктивных работ и событий.

На практике особую ценность представляет формирование сетевого плана, основанного на выборе из возможных альтернативных вариантов самого оптимального. В качестве исходных данных в таких задачах задается матрица времен выполнения каждой работы каждым рабочим. В общем случае можно сделать предположение о возможности выполнения двух и более работ одним рабочим. Решение этой задачи на математическом уровне позволяет автоматически выполнять минимизацию сетевого графика по критерию трудовых ресурсов.

При ограниченных трудовых ресурсах одновременно может выполняться лишь столько ра-

бот, сколько в наличии работников. Естественно, что любой работник выполняет не более одной работы в один и тот же промежуток времени.

Сформулируем задачу в общем виде. Допустим, что сетевой график содержит  $n$  работ, и в наличии у исполнителя имеется  $m$  работников:

$$m < n.$$

Каждому работнику присуща своя производительность для каждой из работ. Эти производительности (длительности выполнения работ) определены матрицей назначений  $A$ . Строки этой матрицы соответствуют рабочим, столбцы – работам, а элементы  $a_{ij}$  – трудоемкостям работ. Веса дугам выбираются из матрицы назначений  $A$ .

Целевой функцией данной задачи является критический путь сетевого графика.

Для описания алгоритма нахождения локального оптимума введем следующие обозначения:

$G$  – сетевой граф проекта;

$n$  – количество работ;  $j$  – номер работы;  $l$  – текущая (рассматриваемая) работа;

$e_l$  – длина частичного пути из источника и заканчивающегося дугой  $l$ ;

$m$  – количество работников;  $i$  – номер работника;  $k$  – текущий работник (назначенный на работу  $l$ );

$A$  – матрица времен выполнения работы  $j$  работником  $i$ ,  $a_{ij}$  – элемент матрицы  $A$ ;

$t_j$  – метка работы под номером  $j$ ; означает ранний срок ее начала;

$p_i$  – метка для работника под номером  $i$ ; означает ранний срок, к которому работник  $i$  освободится после выполнения порученных ему работ.

Вначале работы алгоритма все метки равны нулю.

Предлагаемый алгоритм позволяет строить локально-оптимальный план за один проход графа, т. е. за линейное время от количества дуг. Для этого дуги сетевого графа  $G$  нумеруются следующим образом.

Вначале все узлы графа  $G$  нумеруются по возрастанию в соответствии с методом поиска в ширину. На основании этой нумерации затем нумеруются дуги графа от 1 до  $n$  таким образом, чтобы работа с меньшим номером предшествовала работе с большим номером, если они лежат на одном пути. Дуги, исходящие из одного и того же узла, получают соседние номера по порядку.

*Общий шаг  $l$ .* Назначаем на работу  $j = l$  работника  $k = i$ , определив его порядковый номер  $i$  из соотношения

$$e_l = \min_{1 \leq i \leq m} \{ \max \{ p_i, t_l \} + a_{ij} \}. \quad (*)$$



Для всех дуг  $j$  графа, начало которых совпадает с концом дуги  $l$ , корректируем метки

$$t_j = \max\{t_j, e_l\}.$$

Корректируем метку, соответствующую рабочему  $k$ , назначенному на работу  $l$ :

$$p_k = e_l.$$

Для учета времени выполнения всего проекта (длины критического пути) введем фиктивную работу  $n + 1$ , исходящую из стока. Значение метки  $t_{n+1}$ , найденное на последнем шаге, будет определять длину критического пути. По расставленным меткам можно восстановить сам путь.

Найденный алгоритмом локальный оптимум будет глобальным, если каждой дуге сетевого графа будет присвоен в качестве веса наи-

меньший элемент соответствующего столбца матрицы  $A$ , и в формуле (\*) всегда

$$t_l = \max\{p_l, t_l\}.$$

**Заключение.** Классическая задача о назначениях не допускает одному рабочему выполнять несколько работ. В то же время сетевой график это позволяет. Более того, может оказаться, что при меньшем числе задействованных рабочих искомый критический путь окажется меньше.

В такой задаче необходимо учесть возможности выполнения нескольких работ одним рабочим.

По величине критического пути определяют длительность выполнения проекта и его стоимость. Рассмотренная задача позволяет оценивать стоимость проекта по сумме времени, затраченного  $m$  работниками на выполнение  $n$  работ.

### Литература

1. Буснюк Н. Н., Новиков В. А. Метод оптимального решения задачи о назначениях в сетевом планировании // Труды БГТУ. 2016. № 6 (188): Физ.-мат. науки и информатика. С. 170–172.
2. Конвей Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В. Теория расписаний. М.: Наука, 1975. 360 с.
3. Буснюк Н. Н., Черняк А. А. Математическое моделирование. Минск: Беларусь, 2014. 216 с.
4. Смелов В. В., Брусенцова Т. П. Основы сетевого планирования. Минск: БГТУ, 2010. 212 с.
5. Еськова О. И., Кикоть И. И. Планирование кредитных условий на основе метода имитационного моделирования вероятностного сетевого графика // Проблемы физики, математики и техники. 2010. № 3 (4). С. 74–80.

### References

1. Busnyuk N. N., Novikov V. A. Optimal solution method of assignment problem in network planning. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6 (188): Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 170–172 (In Russian).
2. Conway R. W., Maxwell W. L., Miller L. W. *Teoriya raspisaniy* [Theory of scheduling]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 360 p.
3. Busnyuk N. N., Chernyak A. A. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling]. Minsk, Belarus Publ., 2014. 216 p.
4. Smelov V. V., Brusentsova T. P. *Osnovy setevogo planirovaniya* [Basics of network planning]. Minsk, BGTU Publ., 2010. 212 p.
5. Es'kova O. I., Kikot' I. I. Planning of the credit condition based on simulation of probabilistic net diagram. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki* [Problems of physics, mathematics and technique], 2010, no. 3 (4), pp. 74–80 (In Russian).

### Информация об авторах

**Буснюк Николай Николаевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: busnnn@belstu.by

**Новиков Василий Алексеевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения сетей телекоммуникаций. Белорусская государственная академия связи (220114, г. Минск, ул. Ф. Скорины, 8/2, Республика Беларусь). E-mail: vanovikov@tut.by

### Information about the authors

**Busnyuk Nikolay Nikolaevich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: busnnn@belstu.by

**Novikov Vasilyi Alekseevich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Communications Nets Software. Belarusian State Academy of Communications (8/2, F. Skoriny str., 220114, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vanovikov@tut.by

Поступила 25.04.2017

УДК 004.031.43–044.962

**А. С. Кобайло**

Белорусский государственный технологический университет

**ОСОБЕННОСТИ АРХИТЕКТУРНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ.  
ИНТЕГРИРОВАННЫЕ КОНВЕЙЕРНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛИ**

Построение вычислительных систем реального времени в большинстве случаев связано с решением задачи обеспечения высокой производительности. Попытка решить проблему повышением быстродействия элементной базы приводит к пределу, обусловленному конечным значением скорости света. В данной связи наиболее перспективным направлением поиска приемлемых решений указанной задачи является поиск нетрадиционных архитектурных решений. Одним из таких решений, предложенных автором настоящей статьи, является подход, основанный на модернизации известного принципа организации вычислительного процесса – конвейеризации. Конвейеризация позволяет получить значительный выигрыш в производительности по сравнению с последовательной системой при наличии возможности выделения в решаемой задаче множества подфункций приблизительно с одинаковыми временами их выполнения. В противном случае существенных преимуществ конвейеризация не дает. Предложенный метод основан на нетрадиционной конвейерной организации вычислительного процесса – реализации некоторой последовательности подфункций одной ступенью в случае существенного различия временных показателей выполнения операций и реализуется на так называемом интегрируемом конвейерном вычислителе. В статье также приводятся расчетные соотношения для определения эффективности вычислительных систем, организованных на основе предложенных методов.

Применение интегрированных конвейерных вычислителей окажется целесообразным при построении вычислительных систем в условиях отсутствия в распоряжении проектировщика функциональных устройств с временем выполнения операций алгоритма, не превышающим длительности цикла обработки данных, требуемой в соответствии с заданными условиями реального времени.

**Ключевые слова:** производительность, вычислительная система, параллелизм, конвейеризация, реальное время, цикл конвейера.

**A. S. Kobaylo**

Belarusian State Technological University

**THE PECULIARITIES OF ARCHITECTURAL ORGANIZATION  
OF COMPUTER SYSTEMS OF REAL TIME.  
INTEGRATED CONVEYOR CALCULATORS**

The construction of real-time computing systems in most cases is connected with the solution of the problem of ensuring high performance. An attempt to solve the problem by increasing the speed of the element base leads to a limit due to a finite value of the speed of light. In this regard, the most promising direction of finding acceptable solutions to this problem is the search for non-traditional architectural solutions. One of these solutions, proposed by the author of this article, is the approach based on the modernization of the well-known principle of organization of the computational process – pipelining. Pipelining allows you to get a significant performance gain over a serial system if you have the ability to allocate multiple subfunctions in the problem to be solved with approximately the same execution times. Otherwise, there is no significant advantage in terms of conveyerization. The proposed method is based on the unconventional pipeline organization of the computational process – the realization of a certain sequence of subfunctions with one step in the case of a significant difference in the timing of the execution of operations and is realized on a so-called integrable pipeline calculator.

The use of integrated pipeline calculators will prove to be useful in the construction of computing systems in the absence of functional devices at the disposal of the designer with an algorithm execution time that does not exceed the processing cycle time required in accordance with the specified real-time conditions.

**Key words:** performance, computational system, parallelism, pipelining, real time, conveyor cycle.

**Введение.** Одной из основных проблем, возникающих при проектировании вычислительных систем реального времени (ВСПВ), является достижение требуемого быстро-

действия (производительности). Для последовательного выполнения алгоритма из  $I$  операции необходим ресурс времени, который определяется

$$T = \sum_{i=1}^I \tau'_i \cdot \tau_c,$$

где  $\tau'_i$  – код продолжительности выполнения  $i$ -й операции,  $\tau_c$  – такт или время цикла, которому пропорциональны моменты начала или завершения любых действий в системе. Повышение быстродействия элементной базы или, что то же самое, уменьшение значения  $\tau_c$  имеет свой предел, ограниченный скоростью света. Поэтому для решения названной проблемы более перспективными являются пути поиска архитектурной организации ВС, связанные, в первую очередь, с совмещением операций. Два основных подхода в этом направлении – конвейеризация и параллелизм.

**Основная часть.** Остановимся на первом из названных подходов повышения производительности ВС. Применение конвейерной организации вычислительного процесса теоретически позволяет увеличить скорость обработки данных в  $\rho$  раз, где  $\rho$  – количество ступеней (глубина) конвейера [1]. Реально такое ускорение вычислительной системы достигнуто быть не может по ряду причин, основной из которых

является невозможность выделения в цепочке вычислений операций (подфункций конвейерируемой функции) с примерно равными длительностями их выполнения.

Можно выделить два уровня конвейеризации – на базе конвейерных функциональных устройств (ФУ) и на основе конвейерных вычислителей (КВ).

Первый из выделенных уровней предусматривает выполнение некоторой функции как последовательности подфункций и ориентирован на возможность реализации этой функции одним ФУ, организованным по конвейерному принципу. Примеры конвейеризации на первом уровне приведены в [1].

Второй уровень конвейеризации является более общим и ориентирован на конвейеризацию последовательности операций, которые могут быть самыми разными как по своей сущности, так и по времени реализации, причем каждая из операций может выполняться собственным ФУ. Такой подход к конвейеризации вычислительного процесса был предложен автором данного исследования и наиболее подробно рассмотрен в [2].

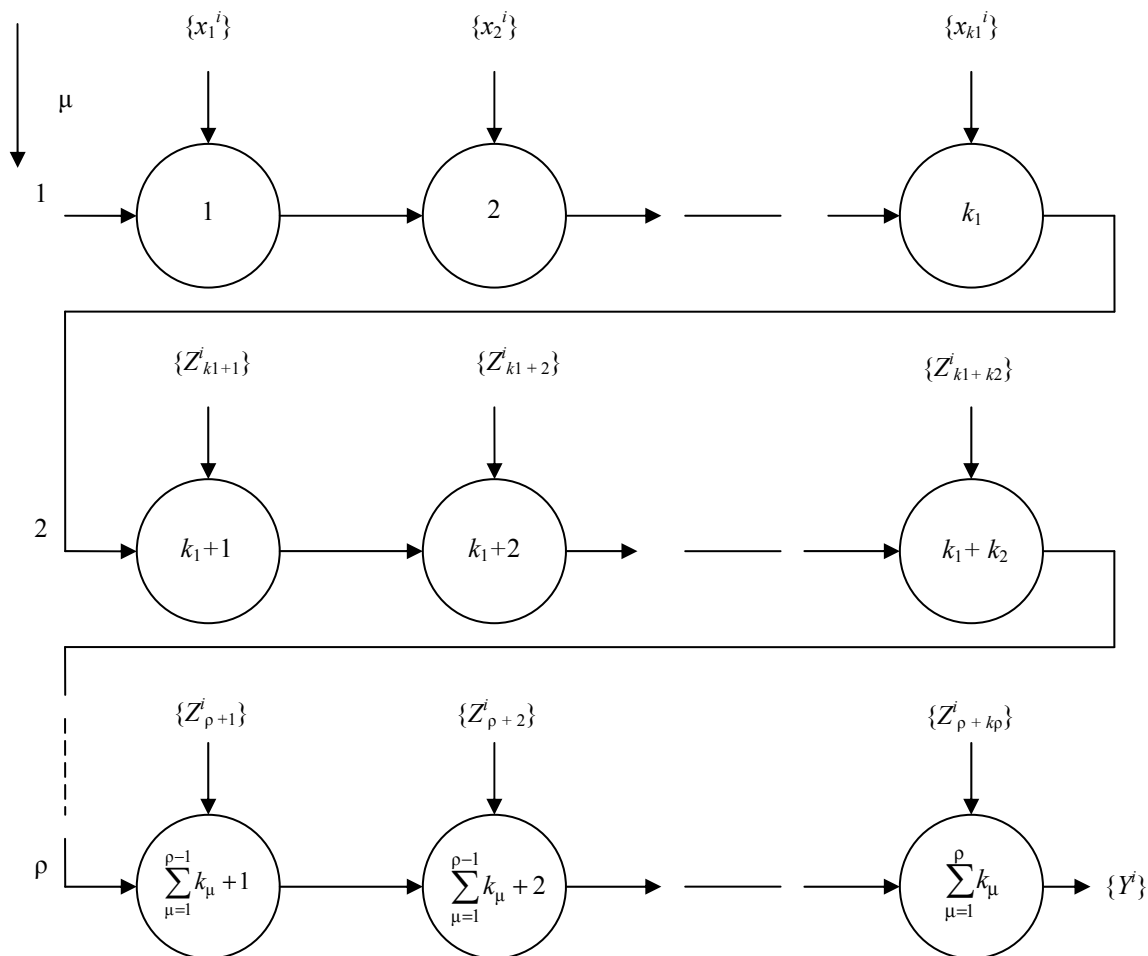


Рис. 1. Конвейеризация на основе КВ

Основные особенности этого подхода заключаются в следующем:

- для уменьшения разницы во времени выполнения операций разными ступенями на реализацию одной ступенью ориентируется последовательность операций (а не одна подфункция), т. е. каждый из уровней конвейера интегрирует ряд последовательно выполняемых операций алгоритма;
- каждая из ступеней конвейера строится как последовательное соединение ФУ различного назначения;
- входные данные ступени конвейера можно получать как от предыдущей ступени, так и от других технических средств системы, в том числе и от других конвейеров.

Назовем конвейер, реализующий данные принципы, в отличие от традиционного конвейерного вычислителя (КВ) [3], интегрированным конвейерным вычислителем (ИКВ).

Сущность принципа проиллюстрирована на рис. 1, соответствующая временная диаграмма приводится на рис. 2. На этих рисунках:  $\{X_{\mu}^j\}, j = i, i+1, i+2, \dots; \mu = 1, 2, \dots, \rho; k = 1, 2, \dots, K_{\mu}$  – входные сигналы  $\mu$ -й ступени на  $j$ -м цикле. Здесь  $K_{\mu}$  – общее количество операций  $\mu$ -й ступени, обозначения вершин – последовательные номера вершин конвейеризируемого пути. Методика расчета  $K_{\mu}$  на основе условия реализуемости пути алгоритма в реальном масштабе времени приведена в [2].

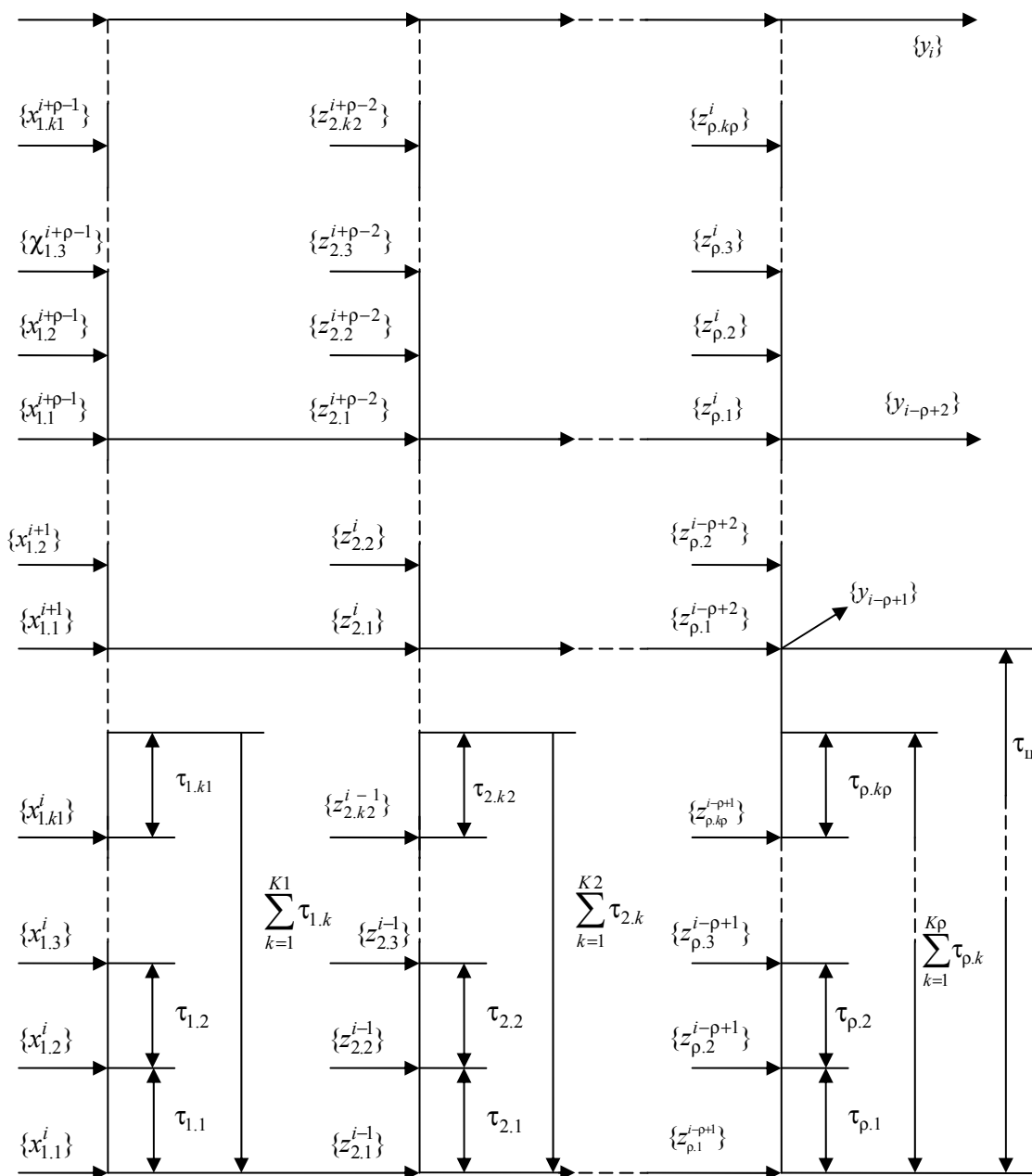


Рис. 2. Диаграмма загрузки КВ

Конвейеризация второго уровня представляет собой гибкий инструмент при выполнении сложных алгоритмов и построении соответствующих вычислительных структур, является одним из эффективных путей выполнения требований реального времени. При этом существенно повышается выигрыш в производительности по сравнению с традиционным КВ (ускорение) за счет повышения загруженности ступеней конвейера.

Отметим, что любой из рассмотренных уровней конвейеризации позволяет получить скорость обработки потока данных, определяемую циклом конвейера

$$\tau_{\text{ц}} = \tau'_{\text{к}} \cdot \tau_{\text{с}},$$

$$X = 1 / \tau_{\text{к}},$$

где  $X$  – количество машинных слов на выходе конвейера в единицу времени,  $\tau_{\text{к}}$  – код цикла конвейера. Этот показатель ограничен длительностью самой длинной из операций, выполняемых конвейером:

$$\tau_{\text{ц}} \geq \max_{1 \leq i \leq l} \tau_i,$$

где  $\tau_i$  – время выполнения  $i$ -й операции из конвейеризируемой последовательности.

При задании требований реализации вычислительного процесса в реальном времени шагами дискретизации  $\Delta t_i$  цикл конвейера прини-

мается равным шагу дискретизации для вершин конвейеризируемого пути [2], т. е.

$$\tau_{\text{ц}} = \Delta t_i.$$

Ускорение  $R$  ИКВ по сравнению с последовательной системой определяется следующим соотношением:

$$R = (\sum_{i=1}^l \tau_i) / ](\sum_{i=1}^l \tau_i / \tau_{\text{ц}})[ / \tau_{\text{ц}},$$

где  $](\cdot)[$  – ближайшее целое, не превышающее  $(\cdot)$ ,

$\cdot ](\sum_{i=1}^l \tau_i / \tau_{\text{ц}})[ = \rho$  – глубина конвейера, и по

сравнению с классическим КВ – выражением  $R = l / \rho$ .

Другие нетрадиционные архитектурные подходы к решению задачи повышения производительности ВС будут рассмотрены в последующих статьях автора настоящей работы.

**Заключение.** Предложенный принцип реализации конвейера на интегрированном конвейерном вычислителе основан на возможности объединения на одном уровне ряда последовательно выполняемых подфункций с учетом их реализации в реальном времени, что позволяет максимально загрузить ступени конвейера и приблизить реальное повышение производительности конвейера по отношению к последовательной вычислительной системе к теоретической, равной глубине конвейера.

### Литература

1. Коуги П. Архитектура конвейерных ЭВМ. М.: Радио и связь, 1985. 567 с.
2. Кобайло А. С. Основы теории синтеза вычислительных структур реального времени. Минск: БГУИР, 2001. 202 с.
3. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 609 с.

### References

1. Kougi P. *Arkhitektura konveyernykh EVM* [The architecture of conveyor computers]. Moscow, Radio i svyaz Publ., 1985. 567 p.
2. Kobaylo A. S. *Osnovy teorii sinteza vychislitel'nykh struktur real'nogo vremeni* [Fundamentals of the theory of synthesis of computational structures of real time]. Minsk, BGUIR Publ., 2001. 202 p.
3. Voevodin V. V., Voevodin Vl. V. *Parallel'nye vychisleniya* [Parallel computing]. St. Petersburg, BXW-Peterburg Publ., 2002. 609 p.

### Информация об авторе

**Кобайло Александр Серафимович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: kac\_53@mail.ru

### Information about the author

**Kobaylo Aleksandr Serafimovich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kac\_53@mail.ru

Поступила 28.05.2017

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ.....</b>	<b>5</b>
<b>МАТЕМАТИКА.....</b>	<b>5</b>
Борковская И. М., Пыжкова О. Н. О стабилизации некоторых видов гибридных динамических систем .....	5
Пономарева С. В., Пыжкова О. Н. Достаточные условия разрешимости уравнений со степенно-логарифмическими ядрами с действительной степенью логарифма .....	11
Волк А. М. Гидродинамика жидкой пленки на проницаемой цилиндрической поверхности .....	15
Соловьева И. Ф. Особенности решения граничных задач с пограничным слоем .....	20
Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае .....	25
Яроцкая Л. Д. Асимптотические представления по параметрам G-функции Мейера специального вида .....	28
Можей Н. П. Нормальные связности на симметрических многообразиях .....	33
<b>МЕХАНИКА .....</b>	<b>40</b>
Грода Я. Г., Бильданов Э. Э. Равновесные свойства решеточного флюида с притяжением ближайших соседей на простой кубической решетке с заблокированными узлами.....	40
Ласовский Р. Н., Вихренко В. С., Пацаган Т. Н. Распределение заряда и электрического потенциала в керамических электролитах при наличии внешнего электрического поля .....	45
Бокун Г. С., Головкин М. Ф., Вихренко В. С. Экранирование кулоновского взаимодействия в кристаллических материалах .....	50
<b>ФИЗИКА .....</b>	<b>56</b>
Чаевский В. В., Вишняков Н. Структура и фазовый состав ZrC-Ni-УДА покрытий фрезерного инструмента.....	56
Фарафотова Е. В. Применение функций распределения двухуровневого молекулярно-статистического подхода для исследования решеточных бинарных сплавов .....	61
Тулъев В. В., <b>Ташлыков И. С.</b> Состав и распределение элементов по глубине в покрытиях, полученных ионно-ассистированным осаждением титана и кремния на сталь марки 40Х.....	66
Мадьяров В. Р. Бесконтактные измерения электрических параметров полупроводников в СВЧ-диапазоне.....	71
<b>ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ.....</b>	<b>76</b>
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ .....</b>	<b>76</b>
Олиферович Н. М., Гринюк Д. А., Оробей И. О. Алгоритмы гармонической идентификации для технологических объектов и их апробация на тепловом объекте.....	76
Гринюк Д. А., Сухорукова И. Г., Олиферович Н. М. Использование алгоритмов аппроксимации для сглаживания трендов измерительных преобразователей .....	82
<b>ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ.....</b>	<b>88</b>
Jaber G., Patsei N. V. Information centric networking for web-based content distribution and manipulation .....	88
Шутько Н. П. Защита и передача текстовой информации на основе изменения кернинга .....	92

<b>Кишкурно Т. В., Брусенцова Т. П.</b> Использование принципов юзабилити для оптимизации процесса восприятия экранного пространства .....	96
<b>СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ОБУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ</b> .....	100
<b>Колесников В. Л., Бракович А. И.</b> Графическая оптимизация условий работы производственного комплекса на основе нейронных сетей .....	100
<b>Гурин Н. И., Жук Я. А.</b> Алгоритм подготовки текста обучающей информационной системы к семантическому анализу .....	105
<b>Brakovich A. I., Hassan A.</b> The classification and brief analysis of existing developments for the search optimization in databases .....	110
<b>АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ</b> .....	114
<b>Герман Ю. О., Герман О. В., Дунаев А. А.</b> Метод установления изоморфизма графов .....	114
<b>Zhilyak N. A., Mohamed Ahmad El Seblani.</b> Class technology analysis of Big Data .....	118
<b>Шитько А. М.</b> Проектирование микросервисной архитектуры программного обеспечения ...	122
<b>Буснюк Н. Н., Новиков В. А.</b> Метод решения задачи сетевого планирования при ограниченных трудовых ресурсах .....	126
<b>Кобайло А. С.</b> Особенности архитектурной организации вычислительных систем реального времени. Интегрированные конвейерные вычислители .....	129

# CONTENTS

.....

<b>PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES.....</b>	<b>5</b>
<b>MATHEMATICS.....</b>	<b>5</b>
<b>Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N.</b> On the stabilization of some kinds of hybrid dynamic systems.....	5
<b>Ponomareva S. V., Pyzhkova O. N.</b> The sufficient conditions of solvability of equations with power-logarithmic kernels.....	11
<b>Volk A. M.</b> Hydrodynamics of liquid film on a permeable cylindrical surface.....	15
<b>Solovyeva I. F.</b> Features of solving border tasks with border layer.....	20
<b>Yakimenka A. A.</b> Modal control for one neutral type system in general cyclic case.....	25
<b>Yarotskaya L. D.</b> Asymptotic representations of special Meijer's G-function by its parameters.....	28
<b>Mozhey N. P.</b> Normal connections on symmetric manifolds.....	33
<b>MECHANICS.....</b>	<b>40</b>
<b>Groda Ya. G., Bildanau E. E.</b> Equilibrium properties of lattice fluids with nearest neighbors attraction on a simple cubic lattice with blocked sites.....	40
<b>Lasovsky R. N., Vikhrenko V. S., Patsahan T. N.</b> Charge and electric potential distribution in ceramic electrolytes at the external electric field presence.....	45
<b>Bokun G. S., Holovko M. F., Vikhrenko V. S.</b> Screening of the Coulomb interaction in crystalline materials.....	50
<b>PHYSICS.....</b>	<b>56</b>
<b>Chayeuski V. V., Visniakov N.</b> The structure and phase composition of ZrC-Ni-UDD-coatings of a milling tool.....	56
<b>Farafontova E. V.</b> Application of functions of distribution of systems in case of using two-level molecular-statistical approach for researching of lattice binary alloys.....	61
<b>Tul'ev V. V., Tashlykov I. S.</b> The elements composition and distribution by depth in coverings obtained with the use of ion-beam assisted titanium and silicon deposition on steel 40X.....	66
<b>Madiarov V. R.</b> Contactless measurement of electric parameters of semiconductors in a microwave range.....	71
<b>COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING SCIENCES.....</b>	<b>76</b>
<b>MODELLING OF PROCESSES AND MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS.....</b>	<b>76</b>
<b>Oliferovich N. M., Hryniuk D. A., Orobei I. O.</b> Harmonic identification algorithms for technological objects and their approbation on a thermal object.....	76
<b>Hryniuk D. A., Suhorukova I. G., Oliferovich N. M.</b> The use of algorithmic approaches for smoothing of measurement information.....	82
<b>PROCESSING AND TRANSMISSION OF INFORMATION.....</b>	<b>88</b>
<b>Jaber G., Patsei N. V.</b> Information centric networking for web-based content distribution and manipulation.....	88
<b>Shutko N. P.</b> Protection and transfer of text information on the basis of kerning changing.....	92
<b>Kishkurno T. V., Brusentsova T. P.</b> Use of usability principles for optimization of the process of perception of the screening space.....	96



<b>SYSTEMS ANALYSIS AND TRAINING SYSTEMS .....</b>	<b>100</b>
<b>Kolesnikov V. L., Brakovich A. I.</b> Graphic optimization of working conditions for industrial enterprise on the basis of neural networks.....	100
<b>Gurin N. I., Zhuk Ya. A.</b> Algorithm of the preparing e-learning system for semantic analysis .....	105
<b>Brakovich A. I., Hassan A.</b> The classification and brief analysis of existing developments for the search optimization in databases.....	110
<b>ALGORITHMIC AND PROGRAMMING .....</b>	<b>114</b>
<b>German Yu. O., German O. V., Dunaev A. A.</b> An algorithm for establishing graph's isomorphism ....	114
<b>Zhilyak N. A., Mohamed Ahmad El Seblani</b> Class technology analysis of Big Data .....	118
<b>Shytska A. M.</b> The design of the microservice architecture of software .....	122
<b>Busnyuk N. N., Novikov V. A.</b> Solution method of network planning task with restricted manpower .....	126
<b>Kobaylo A. S.</b> The peculiarities of architectural organization of computer systems of real time. Integrated conveyor calculators .....	129

Редактор *Ю. Д. Нежикова*  
Компьютерная верстка *О. Ю. Шантарович, С. С. Белявская*  
Корректор *Ю. Д. Нежикова*

Подписано в печать 30.10.2017. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.  
Усл. печ. л. 15,9. Уч.-изд. л. 17,2.  
Тираж 100 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:  
УО «Белорусский государственный технологический университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/227 от 20.03.2014.  
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.